LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

①

U, V vektorové prostory $\varphi : U \to V$ lineární

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v) \\ &2)\ \varphi(au) = a\varphi(u) \end{aligned}\right\} \iff \varphi(au+bv) = a\varphi(u)+b\varphi(v)$$

<u>Lineární izomorfismus $\varphi : U \to V$</u> je lineární zobrazení, které je bijekcí.

Platí $\dim U = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$

φ je izo

φ je prosté, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$ (nebol $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\}$) φ je na, $\operatorname{Im}\varphi = V$.

L: 2

Z předchozího dostáváme

$$\dim U = \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V.$$

<u>Lemma</u>. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární izomorfismus. Pak inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V \to U$ je lineární.

<u>Dk:</u>

$v_1, v_2 \in V, \quad a, b \in \mathbb{K} \qquad \varphi^{-1}(v_1) = u_1, \quad \varphi^{-1}(v_2) = u_2 \iff \varphi(u_1) = v_1, \ \varphi(u_2) = v_2$

$$\varphi^{-1}(a v_1 + b v_2) \underset{\text{neboť}}{=} a u_1 + b u_2$$

$$\varphi(\underline{a u_1 + b u_2}) = a \varphi(u_1) + b \varphi(u_2) = \underline{a v_1 + b v_2}$$

Proto $\underline{\varphi^{-1}(a v_1 + b v_2)} = a u_1 + b u_2 = \underline{a \varphi^{-1}(v_1) + b \varphi^{-1}(v_2)}$

3

<u>Příklad</u> $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \varphi(x) = Ax \quad A$ je matice $n \times n$

φ je izomorfismus, právě když A má inverzní matici.
Pak $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \varphi^{-1}(x) = A^{-1}x$.

<u>Dk</u>: Nechť A má inverzní matici A^{-1}.
Pak $\varphi(x) = Ax$ je bijekce s inverzí $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x$.

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = A^{-1}(Ax) = x$$

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) = A(A^{-1}x) = x$$

Nechť φ má inverzní zobrazení. Už víme, že je lineární, proto je tvaru
$\varphi^{-1}(x) = Bx$.

1

$$(BA)x = B(Ax) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$$
$$(AB)x = A(Bx) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$$
$$\Rightarrow \quad BA = E = A \cdot B$$

Tedy $B = A^{-1}$.

Skládání lin. zobrazení

Lemma: Nechť $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to Z$ jsou lin. zobrazení.
Pak jejich složení $\psi \circ \varphi : U \to Z$ je rovněž lineární.

Dk: Jednoduchý, udělejte si sami

5

Příklad. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\psi\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$

$$\varphi(x) = Ax, \qquad \psi(y) = By$$

$$\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

Složené zobrazení k zobrazením zadaným maticemi A, B je zadáno maticí, která je součinem $B \cdot A$.

6

MATICE LIN. ZOBRAZENÍ

Viděli jsme, že každá matice zadává lin. zobrazení

Teď budeme postupovat obráceně. K zobrazení najdeme matici

$\varphi : U \longrightarrow V$ lin. zobrazení

$\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ báze prostoru U

$\beta = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ báze prostoru V

Matici lin. zobrazení φ v bazích α, β — označení $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ získáme takto:

7

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta \quad (\varphi(u_2))_\beta \quad \ldots\ldots \quad (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

souřadnice $\varphi(u_1)$
v bázi β
1. sloupec matice

Souřadnice vektoru $\varphi(u_1)$ jsou

$$(\varphi(u_1))_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} \qquad \varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots + a_{k1} v_k$$

$$= (v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_k) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

8

$$\varphi(u_2) = (v_1\, v_2 \,..\, v_k)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \text{atd} \quad \varphi(u_n) = (v_1, v_2, .. \, v_k)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\Big(\varphi(u_1)\;\; \varphi(u_2) \ldots \varphi(u_n)\Big) = (v_1\, v_2 \ldots v_k)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \end{pmatrix}$$

(1) $$\boxed{\Big(\varphi(u_1)\, \varphi(u_2) \ldots \varphi(u_n)\Big) = (v_1\, v_2 \ldots v_k)\; (\varphi)_{\beta,\alpha}}$$

Navíc platí: $\forall u \in U$

(2) $$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

(9)

Ukážeme prvně, že (2) platí pro vektory u z báze α.

$u = u_1$ $\quad (\varphi(u_1))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u_1)_\alpha = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$

$=$ 1. sloupec matice $(\varphi)_{\beta,\alpha}$

1. sloupec byl definován právě jako $(\varphi(u_1))_\beta$.

Pro obecné u $\quad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n))_\beta = (x_1 \varphi(u_1) + x_2 \varphi(u_2) + \dots + x_n \varphi(u_n))_\beta =$$

$$= x_1 (\varphi(u_1))_\beta + x_2 (\varphi(u_2))_\beta + \dots + x_n (\varphi(u_n))_\beta = \left((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \dots (\varphi(u_n))_\beta \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

10

Jiný pohled na formulku (2)

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha}\cdot(u)_\alpha$$

$$\begin{tikzcd}
u \in U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \ni \varphi(u) \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

$(u)_\alpha \qquad (\varphi(u))_\beta$

$x \longmapsto Ax$

$x \longmapsto (\varphi)_{\beta\alpha}x$

$(\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_\alpha$

$$A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$(\varphi(u))_\beta$ je cesta v diagramu

$(\varphi)_{\beta\alpha}\cdot(u)_\alpha$ je cesta v diagramu

Obě cesty dají stejný výsledek

Diagram je komutativní

11

Příklad $U = \mathbb{R}_3[x]$ $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x]$ $\beta = (1, x, x^2)$

$\varphi : U \to V$ $\varphi(p) = p'$ polynomu přiřadíme jeho derivaci

Jaká je matice $(\varphi)_{\beta,\alpha}$?

Počítáme podle definice:

$$\varphi(1) = (1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\varphi(x) = (x)' = 1 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{0} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$$

$$\varphi(x^2) = (x^2)' = 2x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{2} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$$

$$\varphi(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Overíme na tomto príkladu formulku (2)

$$(\varphi(p))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_\alpha$$

$$p = 2x^3 - 8x^2 + 6x - 1 = \underline{(-1)}\cdot 1 + \underline{6}\cdot x + \underline{(-8)}\,x^2 + \underline{2}\cdot x^3$$

$$(p)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \varphi(p) = p' = 6x^2 - 16x + 6 = 6\cdot 1 + (-16)\cdot x + 6\cdot x^2$$

$$(\varphi(p))_\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha}(p)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} = (\varphi(p))_\beta$$

(13)

Věta o počítání s maticemi zobrazení

(1) $id : U \to U$, α je báze v U, potom $(id)_{\alpha,\alpha} = E$.

(2) $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to Z$, α je báze v U, β je báze ve V, γ je báze v Z. Potom platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \qquad \psi \circ \varphi : U \to Z$$

požere se

(3) $\varphi : U \to V$ je lin. izomorfismus, α báze v U, β báze ve V pak

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left[(\varphi)_{\beta,\alpha}\right]^{-1} \qquad \varphi^{-1} : V \to U$$

14

Důkaz (1) $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \left((id(u_1))_\alpha, (id(u_2))_\alpha, \dots, (id(u_n))_\alpha \right) = \left((u_1)_\alpha (u_2)_\alpha \dots (u_n)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = E$$

(2) Ještě k požírání:

Důkaz obrázkem

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\,)_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\,)_\beta"] & Z \arrow[d, "(\,)_\gamma"] \\ K^n \arrow[r, "A"] & K^k \arrow[r, "y \mapsto By"] & K^p \end{tikzcd}$$

(2) $(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha$

požere se

$(\varphi)_{\beta,\alpha} = A$

$(\psi)_{\gamma,\beta} = B$

15

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"'] & Z \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
K^m \arrow[r, "x \mapsto Ax"'] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto (B\cdot A)x"'] & K^k \arrow[r, "y \mapsto By"'] & K^p
\end{tikzcd}
$$

Oba čtverce komutují. Proto komutuje i složený obdélník.

Tedy to, co je dole, je matice zobrazení $(\psi\circ\varphi)$ v bazích

Tedy

$$(\psi\circ\varphi)_{\gamma,\alpha} = B\cdot A = (\psi)_{\gamma,\beta}\cdot(\varphi)_{\beta,\alpha}$$

16

Příklad $U = V = \mathbb{R}^2$, $\quad \varepsilon = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\qquad \alpha = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \left(\left(\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_\varepsilon, \left(\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_\varepsilon \right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha, (\varphi(u_2))_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

neboť

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot u_1 = \underline{3} \cdot u_1 + \underline{0} \cdot u_2$$

$$\varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot u_2 = \underline{0} \cdot u_1 + \underline{1} \cdot u_2$$

17

Formulka (2) $\qquad (\varphi(u))_\alpha = (\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (\varphi(u))_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Předpis pro zobrazení φ v souřadnicích báze α je:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$