Báze a dimenze

Posloupnost vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoří bázi konečně dimenzionálního vekt. prostoru U jestliže

(1) jsou lin. nezávislé

$$\forall (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0} \Longrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

(2) $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují U:

$$(\forall u \in U)\ \exists (a_1, a_2, \dots a_n) \in K^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Dokážeme: (1) Každý kon. dim. prostor má bázi.

(2) každé dvě báze mají stejný počet prvků.

$\mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3$

(2)

Věta o výběru lin nezávislých vektorů

Nechť U je vekt. prostor nad K, nechť $v_1, v_2, \dots v_k \in U$ jsou lin. nezávislé, $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in U$ jsou libovolné. Potom lze z vektorů $u_1, u_2 \dots, u_\ell$ vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_p}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ jsou lin nezávislé

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}] = [v_1, v_2, \dots v_k, u_1, u_2, \dots, u_\ell]$

Důsledek: Každý konečnědim. vekt. prostor má bázi.

Důkaz pomocí věty: Máme-li U konečnědim. existují vektory $u_1, u_2, \dots u_\ell$ takové, že $[u_1, u_2, \dots, u_\ell] = U$

Aplikujme předchozí větu v situaci, že seznam vektorů $v_1 \dots v_k$ je prázdný. Potom lze vybrat

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_p}$$

tak, že

(1) $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_\ell}$ jsou lin. nezávislé

(2) $[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_\ell}] = [u_1, u_2, \dots, u_\ell] = U$

Tedy vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ tvoří bázi prostoru U ■

Důkaz věty indukcí podle ℓ

Nechť $\ell = 1$. Mohou nastat dvě možnosti:

-4-

(i) $v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1$ jsou l.n. nezávislé,
pak u_1 vybereme a evidentně platí

$$[v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1] = [v_1, v_2, \ldots v_k, u_1]$$

(ii) $v_1, v_2, \ldots v_k, u_1$ jsou lin. závislé
Ukážeme, že v tomto případě je $u_1 = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i$
Z lin. závislosti vektorů $v_1, \ldots v_k, u_1$ plyne existence
$\mathbb{K}^{k+1} \ni (a_1, a_2, \ldots a_k, b) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k + b u_1 = \vec{0}$$

Kdyby $b = 0$, pak $\exists (a_1, a_2, \ldots a_k) \neq (0, 0, \ldots 0)$, že

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k = \vec{0}$$

Tj. by znamenalo, že $v_1, v_2 \dots v_k$ jsou lin. závislé. Proto $b \neq 0$
a u_1 můžeme spočítat pomocí $v_1, v_2 \dots v_k$:

$$u_1 = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \dots - \frac{a_k}{b} v_k = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i$$

V této situaci vektor u_1 NEVYBEREME.
Evidentně vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lin. nezávislé
Dále dokážeme, že

$$[v_1, v_2, \dots v_k] = [v_1, v_2, \dots v_k, u_1]$$

Inkluze
$\subseteq$ plyne z toho, že $\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = \sum c_i v_i + 0 \cdot u_1 \in [v_1, \dots, v_k, u_1]$

-6-

Inkluze $\supseteq$

Nechť máme $\sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i + a u_1 \in [v_1, \dots, v_k, u_1]$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + a\left(\sum_{i=1}^{k} b_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (a_i + a b_i)\, v_i \in [v_1, v_2, \dots, v_k]$$

INDUKČNÍ KROK Předpokládejme, že jsme větu dokázali pro nějaké $\ell \geq 1$. Nyní ji dokážeme i pro $\ell + 1$.

Máme $v_1, \dots, v_k$ lin. nezávislé, $u_1, u_2, \dots, u_\ell, u_{\ell+1}$ libovolné.

Podle ind. předpokladu umíme z vektorů $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ tak, že

(1) $v_1,\dots,v_k, u_{i_1},\dots,u_{i_p}$ jsou lin. nezávislé

(2) $[v_1 \dots v_k, u_{i_1},\dots,u_{i_p}] = [v_1,\dots,v_k, u_1,\dots,u_\ell]$

O tom zda $u_{\ell+1}$ přidat k vybraným rozhodneme stejným postupem jako v případě $\ell = 1$.

(i) $v_1,\dots,v_k, u_{i_1},\dots,u_{i_p}, u_{\ell+1}$ jsou lin. nezávislé. Pak $u_{\ell+1}$ vybereme a bude platit

$v_1,\dots,v_k, u_{i_1},\dots,u_{i_p}, u_{\ell+1}$ jsou lin. nezávislé

$$[\underbrace{v_1 \dots v_k, u_{i_1},\dots,u_{i_p}}, u_{\ell+1}] = [\underbrace{v_1, v_2,\dots,v_k, u_1, u_2,\dots,u_\ell}, u_{\ell+1}]$$

Rovnost plyne z indukčního předpokladu.

(ii) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}, u_{l+1}$ jsou lin. závislé

Stejně jako pro $l=1$ se ukáže, že

$$u_{l+1} = \sum_{j=1}^{k} b_j v_j + \sum_{s=1}^{p} c_{i_s} u_{i_s}$$

V tomto případě u_{l+1} nevybereme. Pro vybrané vektory platí:

$v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}$ jsou lin. nezávislé (podle ind. předpokladu)

$$[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}] \underset{\text{důkaz jako pro } l=1}{=} [\overbrace{v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}}, u_{l+1}]$$

$$= [\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l}, u_{l+1}]$$

– 9 –

Početní algoritmus pro předchozí větu

Mějme vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in \mathbb{K}^n$ (uvažujme je jako sloupce). Chceme vybrat $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ tak, že

(1) jsou lin. nezávislé

(2) $[u_{i_1}, \dots, u_{i_p}] = [u_1, u_2, \dots, u_\ell]$.

Napišme $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ jako sloupce matice.
Tuto matici řádkovými úpravami upravíme do schodovitého tvaru.
Ve schodovitém tvaru najdeme sloupce, v nichž jsou vedoucí koeficienty řádků. Tyto sloupce určují, které z vektorů u_i vybereme.

10-

Nechť čísla sloupců s ved. koeficienty jsou

$i_1, i_2, \dots, i_p$.

Pak vybereme vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$. Tyto vektory mají obě požadované vlastnosti.

Zdůvodnění na příkladu:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{operace}]{\text{El. řádk.}} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & 4 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \atop \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vybrané vektory budou u_1, u_2, u_4.

Dokážeme (1) vektory u_1, u_2, u_4 jsou lin. nezávislé

(2) u_3 je lin. kombinací u_1 a u_2, proto $[u_1, u_2, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4]$

-11-

Lin. nezávislost   Řešíme rovnici $a_1u_1+a_2u_2+a_4u_4=\vec{o}$

Matice této soustavy má ve sloupcích vektory u_1, u_2, u_4

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{jako v předchozím}]{\text{Stejné el. řádk. operace}} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_4=0 \\ a_2=0 \\ a_1=0 \end{array}$$

Tedy u_1, u_2, u_4 jsou lin. nezávislé.

u_3 je lin. kombinací u_1, u_2 Chceme ukázat, že rovnice

$$a_1u_1+a_2u_2=u_3$$

má řešení. Matice soustavy (rozšířená) má sloupce u_1, u_2 a u_3 $\left(u_1 \; u_2 \,\middle|\, u_3\right)$

$$\left(u_1 \quad u_2 \,\middle|\, u_3 \right) \xrightarrow[\text{operace jako v předchozím}]{\text{Stejné elem. řádk.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2 tvaru matice (není v ní řádek $\left(0 \; 0 \; .. \; 0 \,\middle|\, c \neq 0 \right)$) plyne, že soustava má řešení.

U zkoušky budu požadovat, abyste tento algoritmus uměli zdůvodnit!

Steinitzova věta

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Nechť

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in [u_1, u_2, \dots, u_n].$$

Jestliže $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé, pak $k \leq n$.

Důkaz nepřímý:

Místo $v_1, v_2, \dots, v_k$ LN $\Rightarrow k \leq n$

budeme dokazovat

$$k > n \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k \text{ jsou lin. závislé}$$

- 14 -

Protože $v_i \in [u_1, u_2, \dots, u_n]$ platí

$$v_i = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \dots + a_{ni}u_n = \underbrace{(u_1\ u_2 \dots u_n)}_{\text{řádek vektorů}} \left.\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}\right\} \text{sloupec skalárů}$$

$$(v_1\ v_2 \dots v_k) = (u_1\ u_2 \dots u_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = (u_1\ u_2 \dots u_n)\, A$$

Rozměry matice A jsou $n \times k$ (n řádků a k sloupců)

Podle předpokladu je $k > n$. Matice má více sloupců než řádků.

Uvažujme homogenní soustavu v neznámých $x_1, x_2, \dots, x_k$:

-15-

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix} = 0$$

A upravíme do schod. tvaru. A bude ve schod. tvaru mít nejvýše n vedoucích koeficientů. Tedy aspoň $k-n>0$ neznámých můžeme volit libovolně. Tedy homogenní soustava má nějaké nenulové řešení $(c_1, c_2, \dots c_k) \neq (0, 0, \dots 0)$

Počítáme

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = (v_1\ v_2 \dots v_k)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_k\end{pmatrix} = \underbrace{(u_1\ u_2 \dots u_n)\,A}\ \overbrace{\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_k\end{pmatrix}}^{0} = (u_1\ u_2 \dots u_n)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

Tedy $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. závislé, což jsme chtěli dokázat.

Důsledek. Každé dvě báze vekt. prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků.

Důkaz: Mějme báze $v_1, v_2, \dots, v_k$ a $u_1, u_2, \dots, u_n$

Platí

$$\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_k}_{\text{lin. nezávislé}} \in U = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

Podle Steinitzovy věty je $k \leq n$.

Současně platí

$$\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_n}_{\text{lin. nezávislé}} \in U = [v_1, v_2, \dots, v_k]$$

- 17 -

Podle Steinitzovy věty je $n \le k$.

Dohromady $n = k$.

Definice Nechť U je konečnědimenzionální vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Dimenze tohoto prostoru je počet prvků libovolné jeho báze.

Značení:

$$\dim_{\mathbb{K}} U$$

(konečnědim. prostor $\longrightarrow$ báze $\longrightarrow$ dimenze)

Příklady

1) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ báze $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots e_n$

-18-

(2) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$

báze? $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ negenerují $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$

vektory $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$ tvoří bázi $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix}a+ib\\c+id\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+ib\\c+id\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}a+ib=0\\c+id=0\end{matrix} \Rightarrow a=b=c=d=0$$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$.

③ $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$

bază $1, X, \dots, X^n$

④ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[X] = 2n+2$

bază $1, i, X, iX, \dots, X^n, iX^n$

⑤ $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}) = n \cdot m$ bază $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & j & & \\ & \downarrow & & \end{array} \\ & \\ i \to & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$