LINEÁRNÍ IZOMORFISMY

Lin. zobrazení $\varphi : U \to V$

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\varphi(au) = a\varphi(u)$$

Nejdůležitější příklad $\varphi : K^n \to K^k$

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ A je matice $k \times n$.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \in U, \varphi(u) = 0\}$ podprostor v U

$\operatorname{Im}\varphi = \{v \in V, \exists u \in U, v = \varphi(u)\}$ podprostor ve V

$\varphi : U \to V$, $\dim U < \infty$, pak

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$$

<u>Lineární izomorfismus</u> $\varphi : U \to V$ je bijektivní lineární zobrazení

Bijektivní — prosté (injektivní) $\varphi(u) = \varphi(\bar{u}) \Rightarrow u = \bar{u}$ $\Big\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{0}\}$

— na (surjektivní) $\operatorname{Im}\varphi = V$

<u>Lemma</u> Jestliže $\varphi : U \to V$ je lin. izomorfismus a $\dim U < \infty$

pak $\dim U = \dim V$

<u>Dk</u>: $\dim U = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \underbrace{\dim \{\vec{0}\}}_{=0} + \dim V = \dim V$

Lemma Obrácení předchozího lemmatu.

Je-li $\dim U = \dim V < \infty$ a $\varphi : U \to V$ je lineární, pak platí:

(a) Je-li $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\vec{o}\}$, je φ lin. izomorfismus.

(b) Je-li $\mathrm{Im}\,\varphi = V$, pak φ je lin. izomorfismus.

Dk: (a) $\dim U = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \underbrace{\dim\{\vec{o}\}}_{0} + \dim \mathrm{Im}\,\varphi$

$\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim U = \dim V$ & $\mathrm{Im}\,\varphi$ je podprostor ve V, tedy $\mathrm{Im}\,\varphi = V$.

Lemma (1) Identické zobrazení $id : U \to U$ $\quad (id(u) = u)$ je lin. izomorfismus.

(2) Inverzní zobrazení k lin. izomorfismu je rovněž lineární.

Dk (2) $\quad \varphi : U \to V$ lin. izomorfismus.

$\varphi^{-1} : V \to U$

$v_1, v_2 \in V$ chceme dokázat $\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$.

$\varphi^{-1}(v_1) = u_1 \qquad \varphi(u_1) = v_1 \qquad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) =$

$= v_1 + v_2$

$\varphi^{-1}(v_2) = u_2 \qquad \varphi(u_2) = v_2$

$\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$

③

Vektorové prostory U a V nazýváme izomorfní, jestliže existuje lin. izomorfismus $\varphi : U \to V$.

Relace: U je izomorfní s V je relací ekvivalence $U \cong V$

(1) $U \cong U$ $\quad id : U \to U$

(2) $U \cong V \Rightarrow V \cong U$ $\quad$ máme-li izo $\varphi : U \to V$, pak $\varphi^{-1} : V \to U$ je rovněž lin. izomorfismus

(3) $U \cong V$ a $V \cong W \Rightarrow U \cong W$: $\quad \varphi : U \to V$ lin. izo

$\psi : V \to W$ lin. izo

Složení $\quad \psi \circ \varphi : U \to W$ je rovněž lin. izo

Lemma: Každé dva vekt. prostory stejné konečné dimenze jsou izomorfní.

Dk: Nechť $\dim U = \dim V < \infty$.

Vezmeme nějakou bázi $(u_1, u_2, \dots u_n)$ prostoru U

nějakou bázi $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ prostoru V

a definujeme

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad \varphi(u_i) = v_i$$

Toto zobrazení je lineární a $\operatorname{Im} \varphi = [v_1, v_2, \dots v_n] = V$,

tedy protože $\dim U = \dim V$, je φ lin. izomorfismus.

Příklad:

Nechť $\varphi : K^n \longrightarrow K^n$ je definováno pomocí maticového násobení

$$\varphi(x) = Ax \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

φ je lin. izomorfismus, právě když matice A má inversní matici

$\Longrightarrow$ Nechť φ je lin. izomorfismus. Pak existuje inversní zobrazení

$\varphi^{-1} : K^n \longrightarrow K^n$, které je lineární. Tedy musí mít tvar

$$\varphi^{-1}(y) = By \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad B \text{ matice } n \times n.$$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = id \Longrightarrow B\,(Ax) = x \Longrightarrow B \cdot A = E$$

8

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id \Rightarrow A(By) = y \Rightarrow A \cdot B = E$$

Tedy B je inverzní matice k A.

Důsledek: je-li $\varphi(x) = Ax$ lin. izomorfismus, pak

$$\varphi^{-1}(y) = A^{-1}y.$$

MATICE LIN. ZOBRAZENÍ

Víme, že zobrazení $\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$ definované

$$\varphi(x) = Ax,$$

kde A je matice $k \times n$ a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je lineární.

Obrácené ukážeme, že za pomocí bází prostorů U a V, lze každé lin. zobrazení $\varphi: U \to V$ reprezentovat maticí.

Uvažujme $\varphi: U \to V$, kde U a V sú priestory konečnej dimenzie nad $\mathbb{K}$. V priestoroch U a V vezmime bázy

$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ báza U

$\beta = (v_1, v_2, \dots v_k)$ báza V.

Súradnice vektora $\varphi(u_1)$ v báze β

$$\varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{k1} v_k = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} \left(\varphi(u_1) \right)_\beta$$

$$\varphi(u_i) = a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + \dots + a_{ki} v_k = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ki} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} \left(\varphi(u_i) \right)_\beta$$

Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi(u_1))_\beta & (\varphi(u_2))_\beta & \cdots & (\varphi(u_n))_\beta \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ v bázích α a β a značíme

$$(\varphi)_{\beta,\alpha}$$

Příklad:

$U = \mathbb{R}_3[x]$, $V = \mathbb{R}_2[x]$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$\varphi(p) = p'$ derivace polynomu

V $\mathbb{R}_3[x]$ vezmeme bázi

$\alpha = (1, x, x^2, x^3)$

V $\mathbb{R}_2[x]$ vezmeme bázi

$\beta = (1, x, x^2)$

Spočítáme matici zobrazení φ v bázích α a β podle definice.

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(1))_\beta \; (\varphi(x))_\beta \; (\varphi(x^2))_\beta \; (\varphi(x^3))_\beta \right)$$

$$\varphi(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \qquad (\varphi(1))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \qquad (\varphi(x))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \qquad (\varphi(x^2))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \qquad (\varphi(x^3))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{B,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>VĚTA</u> Pro matici zobrazení $\varphi : U \to V$ v bazích α a B platí:

$$\forall u \in U \qquad (\varphi(u))_B = (\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

13

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \varphi(u) \arrow[d, mapsto] \\
(u)_\alpha \arrow[rr, mapsto] & & (\varphi(u))_\beta
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{x \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha}\, x}_{\text{násobení maticí}}$$

$$(u)_\alpha \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Co ukáže věta?

Vlevo je $(\varphi(u))_\beta$, což je složení zobrazení φ a $(\ )_\beta$

Vpravo je výsledek složeného zobrazení určeného šipkami

<u>Důkaz věty:</u>

Zobrazení $U \longrightarrow \mathbb{K}^k$ zadaná předpisy

$$u \longmapsto (\varphi(u))_\beta$$

$$u \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_\alpha$$

jsou lineární.

(Jde o složení dvou lin. zobrazení.) Abychom dokázali rovnost dvou lin. zobrazení, stačí dokázat jejich rovnost na vektorech nějaké báze. Uděláme to na vektorech báze $\alpha = (u_1, u_2 \dots u_n)$.

Máme dokázat

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_\alpha$$

Vezmeme za u vektor u_1

$$L = (\varphi(u_1))_\beta \,, \quad P = (\varphi)_{\beta,\alpha}(u_1)_\alpha = (\varphi)_{\beta,\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

15

$=$ 1. sloupec matice $(\varphi)_{\beta,\alpha} = (\varphi(u_1))_\beta$

Tedy $L = P$.

Analogicky bychom provedli důkaz pro další sloupce.

Příklad Vrátíme se k příkladu

$U = \mathbb{R}_3[x]$, $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x]$, $\beta = (1, x, x^2)$

$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$\varphi(p) = p'$

Vezmeme polynom $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$

a ukážeme si na něm platnost předchozí věty.

$$L = (\varphi(p))_\beta = (6x^2 - 2x + 5)_\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$P = (\varphi)_{\beta,\alpha}\,(p)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = L$$

Věta o počítání s maticemi lin. zobrazení

1. $id_U : U \to U \qquad (id_U)_{\alpha,\alpha} = E$

2. $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$, α, β, γ uspořádané báze prostorů U, V, W. Pak

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

3. Je-li $\varphi : U \to V$ izomorfismus, pak

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$$

Důkaz:

1. $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ $\quad (id)_{\alpha,\alpha} = \big((id(u_1))_\alpha \; (id(u_2))_\alpha \; \ldots \; (id(u_n))_\alpha \big)$

$$= \big((u_1)_\alpha \; (u_2)_\alpha \; \ldots \; (u_n)_\alpha \big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = E$$

2.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\
K^n \arrow[r, "x \mapsto Ax"'] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto (B\,A)x"'] & K^k \arrow[r, "y \mapsto By"'] & K^p
\end{tikzcd}$$

$A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$

$B = (\psi)_{\gamma,\beta}$

Červený obdélník říká, že $B \cdot A$ je matice lin. zobrazení $\psi \circ \varphi$ v bázích α a je

A to jsme chtěli dokázat.

3 Důkaz provedeme pomocí (2) a (1)

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = id \qquad U_\alpha \xrightarrow{\varphi} U_\beta \xrightarrow{\varphi^{-1}} U_\alpha$$

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\alpha}$$

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} (\varphi)_{\beta,\alpha} = E$$

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$$

Příklad: „Díváme-li se na lin. zobrazení ve vhodných bazích, připadá nám jednodušší."

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \left((\varphi(e_1))_\varepsilon \; (\varphi(e_2))_\varepsilon \right) = \left(\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right)_\varepsilon \; \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)_\varepsilon \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vezmeme jinou bázi:

$$\alpha = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot u_1 \qquad \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot u_2$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} (\varphi(u_1))_\alpha & (\varphi(u_2))_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy díváme-li se na φ v bázi α, je toto zobrazení jednodušší. V souřadnicích y báze α je

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi(u))_\alpha = (\varphi)_{\alpha,\alpha}\,(u)_\alpha$$