INVERZNÍ MATICE

Element. řádk. operace

- vynásobení řádku číslem $\neq 0$
- výměna dvou řádků
- k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého, $j \neq i$

Ukážeme si, jak je reprezentovat pomocí násobení matic.

Označení e ... řádková operace

Výsledkem použití této operace na matici A bude matice $e(A)$

Věta: Nechť A je matice $n \times n$. Potom pro každou elementární řádkovou operaci e platí

$$e(A) = e(E) \cdot A,$$

kde E je jednotková matice $n \times n$.

Důkaz:

(1) e je vynásobení 2. řádku číslem c.

$$e(E)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1(A) \\ c\, r_2(A) \\ r_3(A) \\ \vdots \\ r_m(A) \end{pmatrix} = e(A)$$

(2) e je výměna 1. a 3. řádku

$$e(E)\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n}\\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_3(A)\\ r_2(A)\\ r_1(A)\\ r_4(A)\\ \vdots\\ r_n(A) \end{pmatrix}=e(A)$$

(3) e je operace, při které k 3. řádku přičteme c-násobek 1. řádku

$$e(E)\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ c & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n}\\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_1(A)\\ r_2(A)\\ c\,r_1(A)+r_3(A)\\ r_4(A)\\ \vdots\\ r_n(A) \end{pmatrix}=e(A)$$

Matice $e(E)$ nazýváme elementární matice.

<u>Věta:</u> Všechny elementární matice mají matici inverzní.

<u>Důkaz:</u> Inverzní matice k matici A typu $n \times n$ je matice B taková, že

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Minule jsme si ukázali, že k dané matici existuje nejvýše jedna inverzní.

(1) Nechť e je vynásobení 3. řádku číslem $c \neq 0$. Ukážeme, že matice $e(E)$ má inverzní matici.

(5)

Nechť e_c ... je operace vynásobení 3. řádku číslem c

Nechť $e_{c^{-1}}$ je operace vynásobení 3. řádku číslem c^{-1}.

$$e_c(E)\cdot e_{c^{-1}}(E) = e_c\left(e_{c^{-1}}(E)\right) = e_{c\cdot c^{-1}}(E) = e_1(E) = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c^{-1} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

$$e_{c^{-1}}(E)\cdot e_c(E) = e_{c^{-1}}\left(e_c(E)\right) = e_{c^{-1}\cdot c}(E) = e_1(E) = E$$

(2) Nechť e je výměna 1. a 3. řádku. Pak matice $e(E)$ je inverzní matice $e(E)$.

$$e(E)\cdot e(E) = e(e(E)) = E$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

(3) e je přičtení c-násobku 1. řádku k 3. řádku

e' je přičtení $(-c)$-násobku 1. řádku k 3. řádku

$$e(E)\cdot e'(E) = e(e'(E)) = E$$

$$e'(E)\cdot e(E) = e'(e(E)) = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ c & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -c & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

Lemma Nechť matice A a B mají matice inverzní.

Pak $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Dk:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

Obdobně

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = E$$

Důsledek Jsou-li $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementární matice, pak jejich součin má matici inverzní, která je

$$E_k^{-1} \cdot E_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1}$$

součin element. matic.

ALGORITMUS PRO VÝPOČET INVERZNÍ MATICE

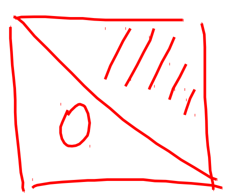
pomocí tzv. úplné Gaussovy eliminace

$$(A \mid E) \xrightarrow{ERO} (\tilde{A} \mid \tilde{B})$$

ERO provádíme tak, aby $\tilde{A}$ byla ve schodovitém tvaru

① $\tilde{A}$ obsahuje nulový řádek, pak A nemá inverzní matici

② $\tilde{A}$ neobsahuje nulový řádek, pak je A horní trojúhelníková

$\tilde{A} =$ 

na úhlopříčce jsou nenulová čísla

Potom

$$(\tilde{A} \mid \tilde{B}) \xrightarrow{ERO} (E \mid B)$$

zpětná Gaussova eliminace

B je inverzní matice k A

Příklad

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

A

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

A^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Důkaz algoritmu

První část

$$(A\,|\,E) \xrightarrow{ERO} (\tilde{A}\,|\,\tilde{B})$$

Má-li $\tilde{A}$ nulový řádek, pak A nemá inverzní matici.

Použijme ERO $e_1, e_2, \dots e_k$ $\quad A \rightsquigarrow \tilde{A}$

Podle poznámky je

$$\tilde{A} = e_k(E)\dots e_2(E)e_1(E)\cdot A = E_k E_{k-1}\dots E_2 E_1 A$$

$$\tilde{B} = E_k E_{k-1}\dots E_2 E_1 \cdot E = E_k E_{k-1}\dots E_1$$

Jestliže $\tilde{A}$ má nulový řádek, pak $\tilde{A}^{-1}$ neexistuje

$$\tilde{A}\cdot B = (0\,0\,0\,\dots\,0)\,B = (0\,0\,0\,\dots\,0)$$

Kdyby A měla inverzi, pak má inverzi i matice

$$E_k E_{k-1} \dots E_1 \cdot A = \tilde{A}, \quad \text{spor.}$$

inverze existují ke každé z matic

Tedy: jestliže $\tilde{A}$ má nulový řádek, pak A nemá inverzi.

(2) Druhá část. Nechť $\tilde{A}$ nemá nulový řádek, pak můžeme posádět další elem. řádk. operace $e_{k+1}, \dots, e_p$ tak, že

$$(\tilde{A} \mid \tilde{B}) \xrightarrow{e_{k+1}, \dots e_p} (E \mid B)$$

$$E = e_p(E) \dots e_k(E) \dots e_1(E) A = \underbrace{E_p E_{p-1} \dots E_1}_{\text{elementární matice}} \cdot A$$

$$B = e_p(E) \dots e_k(E) \dots e_1(E) E = E_p E_{p-1} \dots E_1$$

Tedy $E = B \cdot A$. Zbývá dokázat, že

$$A \cdot B = E$$

Víme, že
$$E = E_p \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A \qquad (*)$$

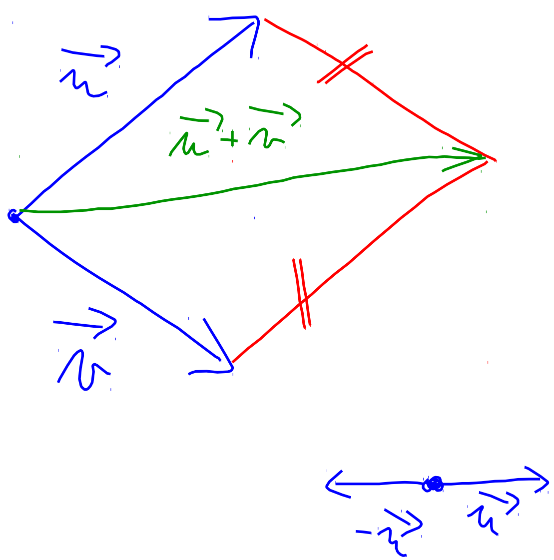
Víme, že všechny matice $E_p, \ldots, E_1$ mají inverse. Proto můžeme A spočítat tak, že rovnici $(*)$ násobíme zleva postupně maticemi $E_p^{-1}, E_{p-1}^{-1}, \ldots, E_1^{-1}$. Dostaneme
$$E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{p-1}^{-1} E_p^{-1} = A$$

A nyní spočítáme
$$A \cdot B = \left(E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_p^{-1}\right)\left(E_p E_{p-1} \ldots E_1\right) =$$
$$= E_1^{-1} \ldots \underbrace{E_{p-1}^{-1} \underbrace{\left(E_p^{-1} E_p\right)}_{E} E_{p-1}}_{E} \ldots E_1 = E$$

Závěr: Matice B získaná algoritmem je skutečně inverzní k matici A.

VEKTOROVÉ PROSTORY

Motivace: Vektor v rovině nebo prostoru byl na střední škole „orientovaná úsečka"



součet vektorů

je komutativní $\vec u+\vec v=\vec v+\vec u$

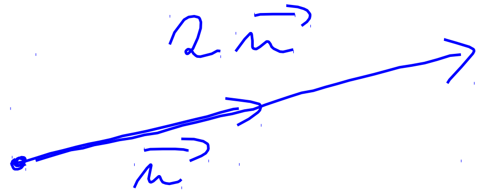
je asociativní $(\vec u+\vec v)+\vec w=\vec u+(\vec v+\vec w)$

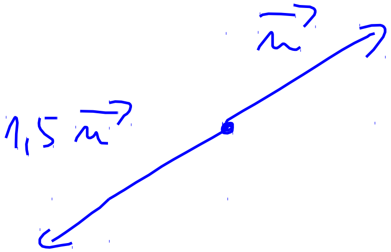
$\exists$ nulový vektor $\vec 0$ $\quad \vec u+\vec 0=\vec u$

$\forall \vec u\ \exists$ opačný vektor $-\vec u$

$$\vec u+(-\vec u)=\vec 0$$

Násobení vektoru skalárem





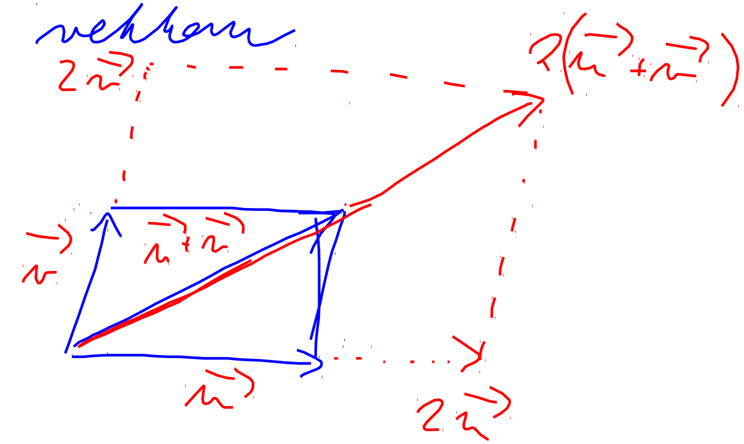
Vlastnosti násobení skaláru a vektoru

$$(a+b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$$

$$a\,(\vec{u}+\vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$$

$$b\,(a\,\vec{u}) = (ba)\cdot\vec{u}$$

$$1\cdot\vec{u} = \vec{u}$$



15

Model prostoru vektorů je $\mathbb{R}^3$ s počátkem $\vec{O} = (0,0,0)$

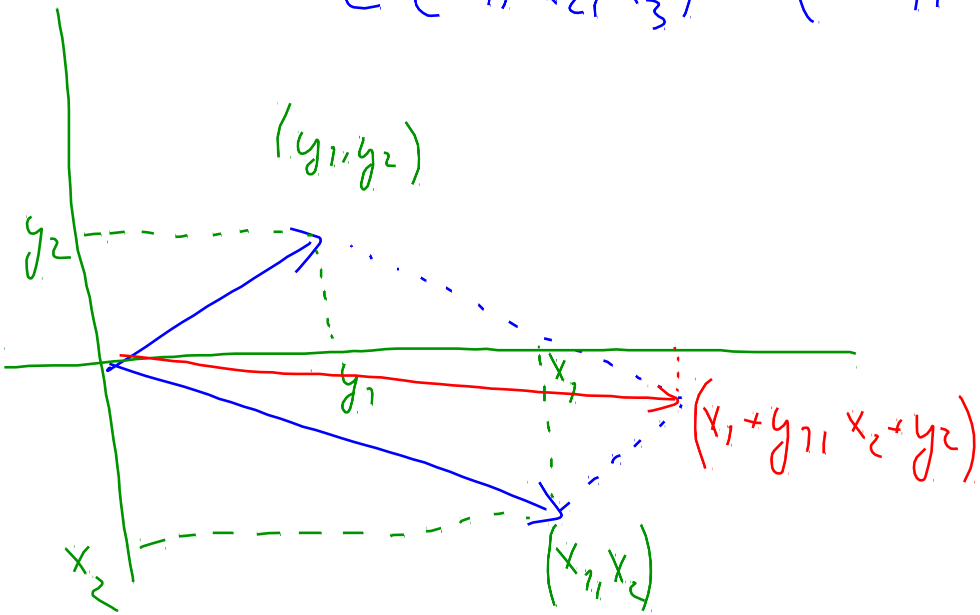
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Pak sčítání vektorů zapíšeme algebraicky jako

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

a násobení číslem

$$c\,(x_1, x_2, x_3) = (c x_1, c x_2, c x_3)$$



Abstraktní pojem vektorového prostoru, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

DEFINICE Neprázdná množina U společně s operacemi sčítání $+ : U \times U \longrightarrow U$ $\left((\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v} \right)$

a násobení skalárem $\cdot : \mathbb{K} \times U \longrightarrow U$ $\left((c, \vec{u}) \longmapsto c \cdot \vec{u} \right)$

se nazývá vektorový prostor na $\mathbb{K}$, jestliže tyto operace mají následující vlastnosti:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativita)
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in U \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativita)
3. $\exists \vec{0} \in U \ \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (nulový vektor)
4. $\forall \vec{u} \in U \ \exists (-\vec{u}) \in U \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (opačný vektor)

5. $\forall a,b \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{u} \in U \qquad (a+b)\cdot\vec{u} = a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{u}$

6. $\forall a \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u},\vec{v} \in U \qquad a\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = a\cdot\vec{u} + a\cdot\vec{v}$

7. $\forall a,b \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{u} \in U \qquad a\cdot(b\cdot\vec{u}) = (ab)\cdot\vec{u}$

8. $\forall \vec{u} \in U \qquad 1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

Příklady vektorových prostorů

1. $U = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ n-tice reálných čísel

(řádky nebo sloupečky)

sčítání $(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$

nulový prvek (vektor) $(0,0,\ldots,0)$

opačný vektor k $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ je $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$

násobení číslem z $\mathbb{R}$

$$c(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(cx_1,cx_2,\ldots cx_n)$$

Toto je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

2 Vezmeme $U = \mathbb{C}^n$ a zavedeme sčítání a násobení stejným způsobem jako v 1.
Dostaneme vekt. prostor nad $\mathbb{C}$.

3 $U = \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K})$ matice typu $k\times n$ nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

sčítání je sčítání matic
násobení skalárem je násobení matic skalárem
nulová matice je nulový vektor
a $(-A)$ je opačná k A.
Jde o vekt. prostor nad $\mathbb{K}$.