LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K}$, $\varphi : U \to V$ je lineární, jestliže

$$(1) \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$
$$(2) \quad \varphi(a u) = a\,\varphi(u)$$

nebo stručněji

$$(*) \quad \varphi(a u_1 + b u_2) = a\,\varphi(u_1) + b\,\varphi(u_2)$$

Obraz a vzor podprostoru

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární a $\bar{U} \subseteq U$ je podprostor, $\bar{V} \subseteq V$ je podprostor. Potom obraz $\varphi(\bar{U}) \subseteq V$ je podprostor a vzor $\varphi^{-1}(\bar{V}) \subseteq U$ je podprostor.

Dk: $\varphi^{-1}(\bar{V}) = \{u \in U,\ \varphi(u) \in \bar{V}\}$

$\varphi^{-1}(\bar{V})$ je neprázdné, neboť $\vec{o} \in \varphi^{-1}(\bar{V})$ $\quad \varphi(\vec{o}) = \vec{o} \in \bar{V}$.

Nechť $u_1, u_2 \in \varphi^{-1}(\bar{V})$. Pak $\varphi(u_1), \varphi(u_2) \in \bar{V}$. Tedy i
$\varphi(u_1) + \varphi(u_2) \in \bar{V} \iff \varphi(u_1 + u_2) \in \bar{V} \Rightarrow u_1 + u_2 \in \varphi^{-1}(\bar{V})$.
Stejně pro násobek.

Každý vekt. prostor U má nějaké dva vekt. podprostory, a to
$\{\vec{o}\}$ a U.

$\varphi : U \to V$ $\quad$ $\mathrm{im}\,\varphi = \varphi(U)$ .... obraz prostoru U v zobrazení φ

$\ker \varphi = \varphi^{-1}(0) = \{u \in U,\ \varphi(u) = \vec{o}\}$
(kernel) .... jádro zobrazení φ.

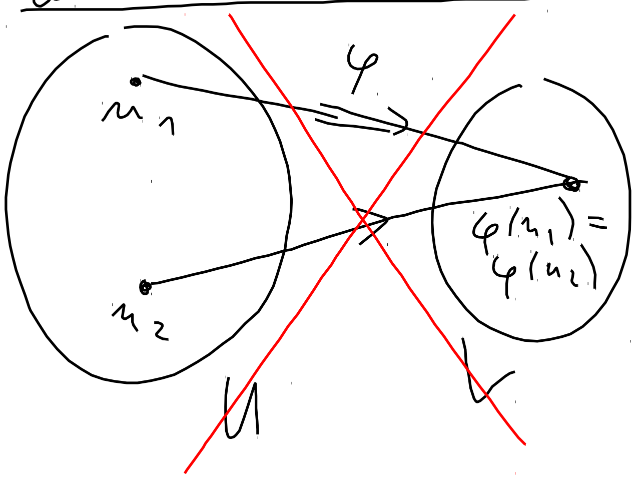
Podle dokázaného výše je $\mathrm{im}\,\varphi$ podprostor ve V a $\ker \varphi$ podprostor v U.

<u>Lemma:</u> Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je na (surjektivní), právě když $\mathrm{im}\,\varphi = V$.

Zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté (injektivní), právě když $\ker \varphi = \{0\}$.

Dk: První směr je v podstatě definice zobrazení na.

Druhý směr:



Definice prostého (injektivního) zobrazení je: $\varphi : U \to V$ je prosté, jestliže platí

$$\forall u_1, u_2 \in U : \varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2 .$$

Nechť φ je prosté. Nechť $u \in \ker \varphi$.

Potom

$$\underline{\varphi(u)} = \vec{0} = \underline{\varphi(\vec{0})}$$

$$\Rightarrow \quad u = \vec{0}$$

Nechť $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$. Nechť $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$

$$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \vec{0}$$

$$\varphi(u_1 - u_2) = \vec{0} \Rightarrow u_1 - u_2 \in \ker \varphi = \{\vec{0}\}$$

Pak $u_1 - u_2 = \vec{0} \Rightarrow u_1 = u_2$. φ je prosté.

Věta: (o dimenzích jádra a obrazu)

Nechť $\varphi: U \to V$ je lineární a U má konečnou dimenzi. Pak platí

$$\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi.$$

Důkaz: $\ker \varphi \subseteq U$

Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ je báze $\ker \varphi$. Rozšíříme ji na bázi celého U.

Nechť to je $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$.

$$\left.\begin{aligned} \dim \ker \varphi &= k \\ \dim U &= n \end{aligned}\right\}$$ Chceme najít bázi $\operatorname{im} \varphi$, která má $n-k$ vektorů.

Pak bude $\dim U = n = k + (n-k) = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$

Báze obrazu φ bude $\varphi(u_{k+1}), \varphi(u_{k+2}), \dots, \varphi(u_n)$

5

Dokážeme si ka:

$\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ generují im φ.

Nechť $v \in \operatorname{im}\varphi$, pak $v = \varphi(u)$ pro nějaké $u \in U$ a platí

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n$$

Tedy

$$v = \varphi(u) = \varphi\left(\sum_1^n a_i u_i\right) = \sum_1^n a_i \varphi(u_i) = a_1 \underbrace{\varphi(u_1)}_{0} + \dots + a_k \underbrace{\varphi(u_k)}_{0}$$

$$+ \sum_{i=k+1}^n a_i \varphi(u_i) = \sum_{i=k+1}^n a_i \varphi(u_i)$$

Vektory $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Nechť $\sum_{i=k+1}^n b_i \varphi(u_i) = \vec{o}$

$$\varphi\left(\sum_{i=k+1}^n b_i u_i\right) = \vec{o}.$$

Tedy $\sum_{i=k+1}^{n} b_i u_i \in \ker \varphi$

Proto $\sum_{i=k+1}^{n} b_i u_i = \sum_{j=1}^{k} a_j u_j$

$$-a_1 u_1 - a_2 u_2 - \dots - a_k u_k + b_{k+1} u_{k+1} + \dots + b_n u_n = \vec{0}$$

Vekt. $u_1, \dots, u_n$ jsou lin. nezávislé, proto

$$-a_1 = -a_2 = \dots = -a_k = \underbrace{b_{k+1} = \dots = b_n = 0}_{\text{Toto jsme chtěli dokázat.}}$$

Tím jsme dokázali, že $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lin. nezávislé.

Lemma Složení lineárních zobrazení je lineární.

Dk: $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$

Pak $\psi \circ \varphi : U \to W$

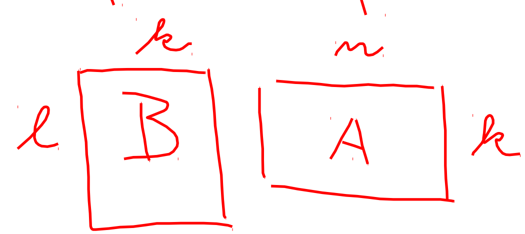
$$(\psi\circ\varphi)(a u_1 + b u_2) = \psi(\varphi(a u_1 + b u_2)) = \psi(a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2))$$

$$= a\psi(\varphi(u_1)) + b\psi(\varphi(u_2)) = a(\psi\circ\varphi)(u_1) + b(\psi\circ\varphi)(u_2).$$

Příklad: nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$

$\varphi(x) = Ax$, A je matice $k \times n$,

$\psi(y) = By$, B je matice $l \times k$



$$(\psi\circ\varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

Identické zobrazení $id : U \to U$, $id(u) = u$, je lineární.

Lineární izomorfismus je lineární zobrazení, které je bijekcí.

Bijekce $\varphi : U \to V$ je zobrazení prosté a na. (injektivní i surjektivní)

Lemma: Inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V \to U$ k lineárnímu izomorfismu $\varphi : U \to V$ je opět lin. zobrazení.

Dk: $v_1, v_2 \in V$

Chceme spočítat $\varphi^{-1}(v_1+v_2)$.

Víme, že $\exists!\, u_1 \in U \quad \varphi(u_1) = v_1$

$\exists!\, u_2 \in U \quad \varphi(u_2) = v_2$

Proto $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2) = v_1+v_2$.

To znamená, že $\varphi^{-1}(v_1+v_2) = u_1+u_2 = \varphi^{-1}(v_1)+\varphi^{-1}(v_2)$

Pro násobek analogicky.

Jak zjistíme, zda nějaké lin. zobrazení je izomorfismus.

$\varphi : U \to V$

φ je na $\quad \operatorname{im}\varphi = V$

φ je prosté $\quad \ker\varphi = \{0\}$

Pokud je $V = U$, tj. máme $\varphi : U \to U$, stačí ověřit pouze jednu podmínku.

$\dim U < \infty$

Jestliže je φ na, tak $\operatorname{im}\varphi = U$, $\dim \operatorname{im}\varphi = \dim U$

Potom
$$\dim \ker\varphi = \dim U - \dim \operatorname{im}\varphi = 0$$
$$\Rightarrow \ker\varphi = \{\vec{0}\} \Rightarrow \varphi \text{ je prosté}$$

Nechť $\varphi : U \to U$ je prosté. Pak $\ker \varphi = \{0\}$ a $\dim \ker \varphi = 0$.

$$\dim \operatorname{im} \varphi = \dim U - \dim \ker \varphi = \dim U$$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{im} \varphi = U$, tedy φ je na.

<u>Lemma</u>: Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $n \times n$. Potom je A invertibilní a platí, že $\varphi^{-1}(y) = A^{-1} y$.

<u>Dk</u>: Víme, že $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární. Proto $\varphi^{-1}(y) = By$.

Platí $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = x$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^n : B(Ax) = Ex \Longrightarrow B \cdot A = E \\ (\varphi \circ \varphi^{-1}) y = y \\ \forall y \in \mathbb{R}^n \ (AB) y = Ey \Longrightarrow A \cdot B = E \end{array}\right\} \Longrightarrow B = A^{-1}$$

MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

Každá matice A typu $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$ zadává lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ předpisem $\varphi(x) = Ax$.

Nyní my obráceně každému lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ při zadaných bázích α v U a β ve V přiřadíme matici.

Matice lin. zobrazení v bázích α v U a β ve V je něco jako „souřadnice" tohoto lin. zobrazení.

Připomenutí souřadnic: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ je vektor v $\mathbb{K}^n$.

Označme, je-li $u \in U$ vektor v prostoru U s bází $(u_1, u_2, \ldots u_n) = \alpha$, tak mu přiřadíme sloupec čísel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ takových, že

$$u = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$$

Ten jsou souřadnice vektoru u v bázi α.

Mějme $\varphi : U \to V$ lineární, $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ báze v U,

$\beta = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ báze ve V, vše nad $\mathbb{K}$.

$\varphi(u_1) \in V$ můžeme psát jako lin. kombinaci vektorů báze β

$$\varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots + a_{k1} v_k = (v_1\ v_2 \ldots v_k) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

souřadnice vektoru $\varphi(u_1)$ v bázi β

$(\varphi(u_1))_\beta$

$$\varphi(u_2) = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \ldots + a_{k2} v_k = (v_1\ v_2 \ldots v_k) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}$$

$(\varphi(u_2))_\beta$

. . . .

$$\varphi(u_n) = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \ldots + a_{kn} v_k = (v_1\ v_2 \ldots v_k) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$(\varphi(u_n))_\beta$

Lze zapsat jedinou rovnicí

$$\big(\varphi(u_1)\ \varphi(u_2) \ldots \varphi(u_n)\big) = (v_1\ v_2 \ldots v_k) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{\text{matice zobrazení } \varphi \text{ v bázích } \alpha, \beta}$$

Definice Matice zobrazení $\varphi : U \to V$ v bazích $\alpha = (u_1, u_2 \ldots u_n)$ v U a β ve V je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} \underset{def}{:=} \Big((\varphi(u_1))_\beta \quad (\varphi(u_2))_\beta \quad \ldots\ldots \quad (\varphi(u_n))_\beta \Big)$$

Příklad: $U = \mathbb{R}_3[x] \qquad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x] \qquad \beta = (1, x, x^2)$

$\varphi : U \to V \qquad \varphi(p) = p' + 2p''$, p' je 1. derivace polynomu, p'' je 2. derivace polynomu

Spočítáme $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ podle definice:

$$\varphi(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \qquad (\varphi(1))_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \qquad (\varphi(x))_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^2) = 2x + 4 = 4\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \qquad (\varphi(x^2))_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^3) = 3x^2 + 12x = 0\cdot 1 + 12\cdot x + 3\cdot x^2 \qquad (\varphi(x^3))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{B,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Věta: Pro matici lin. zobrazení platí

$$\forall u \in U \qquad (\varphi(u))_B = (\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Důkaz: Levá i pravá strana jsou lineární v u. Proto stačí dokázat tento vztah pouze na vektorech báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$.

$$(\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u_1)_\alpha = (\varphi)_{B,\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1.\text{ sloupec } (\varphi)_{B,\alpha} = (\varphi(u_1))_B$$

Pro u_i dostaneme

$$(\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u_i)_\alpha = (\varphi)_{B,\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; \leftarrow i\text{-té místo} \; = i\text{-tý sloupec matice } (\varphi)_{B,\alpha}$$

$$= (\varphi(u_i))_B$$

„Grafická" interpretace vztahu z předchozí věty

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] \arrow[rd, bend left=60] \arrow[rd, bend right=60] & V \arrow[d, "(\ )_B"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto (\varphi)_{B,\alpha} \cdot x"'] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

Komutativní diagram

Předchozí věta říká, že horní cesta z U do $\mathbb{K}^k$ dá totéž co dolní cesta.

Horní cesta:

$u \longmapsto \varphi(u) \longmapsto (\varphi(u))_B$

Dolní cesta

$u \longmapsto (u)_\alpha \longmapsto (\varphi)_{B,\alpha} \cdot (u)_\alpha$

Pokračování příkladu

$U = \mathbb{R}_3[x] \quad \alpha = (1, x, x^2, x^3) \qquad V = \mathbb{R}_2[x] \quad \beta = (1, x, x^2)$

$\varphi(p) = p' + 2p'' \qquad (\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ověříme značení věty na polynomu

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - \underline{1}$$

$\varphi(p) = 6x^2 - 2x + 5 + 2(12x - 2) = 1 + 22x + 6x^2 =$

$= 1 \cdot 1 + 22 \cdot x + 6 \cdot x^2$

$(\varphi(p))_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix}$

17

$$(p)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (p)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sachecine

$$(\varphi(p))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (p)_\alpha$$