Determinanty

A je matice $n \times n$ $\quad A = (a_{ij})$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Pravidla pro počítání

1. Determinant horní nebo dolní trojúhelníkové matice je

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

2. Vznikne-li B z matice A vynásobením i-tého řádku číslem c, je $\det B = c \det A$

3. Vznikne-li B z matice A přehozením i-tého a j-tého řádku, je $\det B = -\det A$

4. Vznikne-li B z matice A přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, je
$$\det B = \det A$$

5. Pravidla 2 - 4 platí i pro sloupcové operace.

Příklad Vandermondův determinant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Od 2., 3., ... n-tého řádku} \\ \text{odečteme 1. řádek}}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots \\ \cdots & & & \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots \end{pmatrix}$$

3

$$x_2^{i} - x_1^{i} = (x_2 - x_1)\left(x_2^{i-1} + x_2^{i-2}x_1 + \dots\dots + x_1^{i-1}\right)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\ \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 & \dots\dots & x_2^{n-2} + \dots \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_1 x_3 + x_1^2 & \dots\dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \dots\dots & \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\ \det\begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 & \dots\dots & x_2^{n-2} + \dots \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_1 x_3 + x_1^2 & \dots\dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_1 x_n + x_1^2 & \dots\dots & \end{pmatrix}$$

Nyní od $(n-1)$-ního sloupce odečteme x_1-násobek $(n-2)$-hého, od $(n-2)$-hého sloupce odečteme x_1-násobek $(n-3)$-ního, atd., až od 3. sloupce odečteme x_1-násobek 2., od 2. sloupce odečteme x_1-násobek 1. sloupce. Dostaneme

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$V(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \, V(x_2, x_3, \dots x_n)$$

$$\parallel$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots \end{pmatrix}$$

Rekurentní vztah

Odtud dostaneme

$$V(x_1, x_2 \dots x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2)$$

$$\dots\dots (x_n - x_{n-1}) \underbrace{V(x_n)}_{\det(1)} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

Věta: B je matice $k \times k$, C je matice $(n-k) \times (n-k)$ a D je matice $k \times (n-k)$. Potom

$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k} & \underbrace{}_{n-k} \end{array} \end{array} = \det B \cdot \det C$$

Tuto větu jsme použili v předchozím výpočtu pro B matici 1×1.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots \\ 0 & 1 & x_2+x_1 & \cdots \\ 0 & 1 & x_3+x_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \det(1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & x_2+x_1 & \cdots \\ 1 & x_3+x_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

<u>Důkaz věty</u>: $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$

$\sigma(k+1,\ldots,n)\cap\{1,2,\ldots k\}\neq\emptyset \Rightarrow$ příslušný součin je 0

Nutně musí být $\sigma(k+1,\ldots,n)\cap\{1,2,\ldots k\}=\emptyset$.

Proto $\sigma(1,2,\ldots k) = \{1,2,\ldots k\}$

$\sigma(k+1,\ldots n) = \{k+1,\ldots n\}$

σ se tedy „rozpadá" na dvě permutace

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(k) & k+1 & & n \end{pmatrix} \qquad \sigma = \pi \circ \tau$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & & k & \sigma(k+1) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \tau$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S^n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\pi \circ \tau} \operatorname{sign} \pi \circ \tau \; b_{1\tau(1)} \dots b_{k\tau(k)}$$

σ je uvažovaného tvaru

$$\cdot\, c_{k+1\,\pi(k+1)} \dots c_{n\,\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_{n-k}} \operatorname{sign} \pi \; c_{k+1\,\pi(k+1)} \dots c_{n\,\pi(n)} \,\cdot$$

$$\cdot \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} \dots b_{k\tau(k)} = \det C \cdot \det B$$

Analogicky platí

$$\det \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline D & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{k} & \underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array} & \end{array} = \det B \cdot \det C$$

CAUCHYOVA VĚTA O DETERMINANTU

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důsledek: Vezmeme grupu $GL(n)$ matic $n \times n$, které mají inverzní matici. Pak zobrazení

$$\det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$$

grupa nenulových čísel s násobením

je homomorfismus grup.

<u>Důkaz důsledku</u>: Víme, že platí

$$\det E = 1.$$ Proto

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

a tedy $\det A \neq 0$.
Determinant invertibilní matice je různý od 0,
proto zobrazení

$$\det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

vede do $\mathbb{K} - \{0\}$. Cauchyova věta pak říká, že jde o homomorfismus grup.

<u>Důkaz Cauchyovy věty</u> : Matici $2n \times 2n$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$$

převedeme pomocí element. sloupc. operací, které nemění determinant na matici

$$\begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A \cdot \det B = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{přehozením} \\ n \text{ dvojic} \\ \text{řádků}}}{=} (-1)^n \det \begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & A\cdot B \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \det(-E) \det(A\cdot B) = (-1)^n \cdot (-1)^n \det(A\cdot B) = \det(A\cdot B)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & A\cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \underset{}{\overset{\substack{3.\ \text{sloupec} \\ +\, b_{11}\cdot 1.\ \text{sloupec}}}{\sim}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

3. sloupec
$+ b_{21} \cdot 2.$ sloupec

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \overbrace{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}}^{(A\cdot B)_{11}} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \underbrace{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}}_{(A\cdot B)_{21}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

analogicky změníme
4. sloupec

Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku

$A = (a_{ij})$ matice $n \times n$

A_{ij} je matice $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z A tak, že vyškrtneme i-tý řádek a j-tý sloupec

$|A_{ij}|$ = determinant matice A_{ij}

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$ algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A

Věta: Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku

Nechť A je matice $n \times n$ a nechť i je pevné, $1 \leq i \leq n$. Pak

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Příklad aplikace Laplaceova rozvoje

Mějme matici $(n+1)\times(n+1)$. Pomocí rozvoje podle 1. řádku je

$$\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & -1 & x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_n \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & \\ -1 & x & 0 & \cdots & \\ & -1 & x & & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1 & x \end{pmatrix}}_{x^n} + (-1)^{1+2} a_{n-1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & x & & 0 \\ & -1 & x & \\ & & & \ddots \\ & & & & x \end{pmatrix}}_{(-1)\, x^{n-1}}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{n-2} \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & x & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & & x & & \\ & & -1 & x & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x \end{pmatrix}}_{x^{n-2}} + \cdots + (-1)^{1+n+1} a_0 \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & x \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{(-1)^n}$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$$

Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce

Nechť A je matice $n \times n$ a j je pevné číslo, $1 \leq j \leq n$.

Potom

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,|A_{ij}|$$

Důkaz nádherné verze

$$\det A = \det\begin{pmatrix} & & & & \\ a_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & & & & \\ 0 & a_{i2} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} + \dots$$

$$+ \det\begin{pmatrix} & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{in} \\ & & & & \end{pmatrix} = a_{i1}\det\begin{pmatrix} & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{i2} \det \begin{pmatrix} & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} + \cdots + a_{in} \det \begin{pmatrix} & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1}(-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \cdots 0 \\ & A_{i1} \end{pmatrix} + a_{i2}(-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{in}(-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{ij} (-1)^{j-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ & A_{ij} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{ij} \det(1) \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Výpočet inverzní matice pomocí algebraických doplňků

Matice $A = (a_{ij})$ typu $n \times n$ má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$. V tomto případě je

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$$

Tedy $(A^{-1})_{ij} = \dfrac{\tilde{a}_{ji}}{\det A}$

Důkaz: Má-li matice A inverzní, pak

$$1 = \det E = \det (A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

a $\det A \neq 0$. Označme, je-li $\det A \neq 0$, ukážeme, že matice $\left(\dfrac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$ je inverzní k A.

Počítejme

$$A \cdot \underbrace{\left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A}\right)^{T}}_{B = (b_{ij})} \qquad \Bigg| \qquad (A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}\, \tilde{a}_{kj}}{\det A} = \frac{1}{\det A}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{kj}\right) = \begin{cases} \overbrace{\dfrac{1}{\det A} \cdot \det A}^{\text{podle Laplaceova rozvoje}} & \text{pro } k = i \\[2ex] \underbrace{\dfrac{1}{\det A} \cdot 0}_{\text{podle Laplaceova rozvoje jiné matice}} & \end{cases}$$

Nechť C je stejná jako A jenom místo k-tého řádku je i-tý řádek

$$C = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

Zřejmě $\det C = 0$

Provedeme Laplaceův rozvoj podle k-tého řádku

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \tilde{a}_{kj} = 0 \quad \text{pro } k \neq i$$