Zkouška

1) semestrální část: ve cvičeních 8 krátkých písemek po 2 bodech, ke splnění je potřeba 8 bodů
   - oprava na začátku zkouškového
2) písemka ve zkoušk. období
   - početní část (12 b) výsledek $+ \dfrac{b(1) - 8}{2} \geq 7$
   - teoretická část (10 b) výsledek ≥ 5
3) ústní zkouška (některé věci vyžaduji bezpodmínečně
   - viz seznam na konci interaktivní osnovy v IS

Ve studijních materiálech v ISu

- tabule z přednášek
- skripta a testy k jednodušším tématům
- sbírka úloh
- domácí úlohy k jedn. cvičením.
- písemka z předchozích let s videem řešení
- odpovědníky
  - otázky k teorii
  - početní část

NENECHÁVAT VŠE NA ZKOUŠKOVÉ

Soustavy lineárních rovnic

Počítání s reálnými a kompl. čísly

$\mathbb{R}$		$\mathbb{C}$		$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$\forall a, b \in \mathbb{R}$	$a + b = b + a$	$\forall a, b \in \mathbb{C}$	$a + b = b + a$	komutativita
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	—— // ——		asociativita
$\exists 0 \in \mathbb{R}$	$a + 0 = a$	—— // ——		0 je neutrální prvek
$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists (-a) \in \mathbb{R}$	$a + (-a) = 0$			$(-a)$ je opačné číslo (inverzní prvek)

Totéž platí pro násobení

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a\,(b \cdot c)$$

$\exists 1 \in K \qquad a \cdot 1 = a$

$\forall a \neq 0 \;\; \exists a^{-1} \in K \qquad a \cdot a^{-1} = 1$

Distributivita $\qquad (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Další číselné obory

$\mathbb{N}$ přirozená čísla
$\mathbb{Z}$ celá čísla

některé vlastnosti výše uvedené nemají

$\mathbb{Q}$ racionální čísla

mají stejné vlastnosti

Soustava lin. rovnic (k rovnic o n neznámých)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}
$$

a_{ij} jsou nám známé koeficienty, $a_{ij} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

x_j pro $j = 1, 2, \dots, n$ jsou neznámé

a_{ij}

i-tá rovnice

j – neznámá u které se koeficient nachází

b_i koeficienty pravé strany

Koeficienty v tabulce dávají matici soustavy

$$A = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{n \text{ sloupců}}\right\} k \text{ řádků}$$

rozměry $k \times n$

k → počet řádků

n → počet sloupců

rozšířená matice soustavy

$A|b$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

Homogenní soustava lin. rovnic je soustava, kde všechna $b_i = 0$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ - - - - - - - - & \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Řešení soustavy je n-tice čísel $(x_1, x_2, \dots x_n) \in K^n$, která splňuje všechny rovnice.

Homogenní soustava má n. tici $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ vždy za řešení.

Ekvivalentní soustavy jsou soustavy, které mají stejnou množinu řešení.

Příklad neekvivalentních rovnic (! jedna není lineární)

$$x = 1 \qquad\qquad x^2 = 1$$

množina řešení $\{1\}$ množina řešení $\{1, -1\}$.

Ekvivalentní úpravy jsou úpravy soustav rovnic, při kterých přecházíme od jedné soustavy ke druhé, která je s první ekvivalentní (nemění množinu řešení)

Příklad neekvivalentní úpravy

$x = 1$ umocníme na druhou

$$x^2 = 1$$

Elementární ekvivalentní úpravy soustav lin. rovnic

- danou rovnici vynásobíme číslem $\neq 0$
- přehodíme pořadí rovnic
- k dané rovnici přičteme násobek jiné rovnice

$$x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 6$$
$$3x_1 \qquad - 2x_3 = 3$$

K 1. rovnici přičteme 2-násobek 2. rovnice

$$7x_1 + 2x_2 - 12x_3 = 12$$
$$3x_1 \qquad - 2x_3 = 3$$

Úpravám soustav rovnic odpovídají elementární řádkové operace s maticemi (ERO, ERO)

- řádek vynásobíme číslem $c \neq 0$
- vyměníme 2 řádky
- k danému řádku přičteme c-násobek jiného řádku

<u>Příklad</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -12 & 12 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

<u>Které soustavy lin. rovnic umíme jednoduše vyřešit?</u>

Vedoucí koeficient řádku matice je první nenulové číslo v tomto řádku

vedoucí koeficient

0 0 2 8 0 3 9

Matice ve schod. tvaru je matice splňující následující dvě pravidla

- nulové řádky jsou až na konci
- je-li a_{ij} vedoucí koeficient i-tého řádku, pak další řádek je nulový nebo jeho vedoucí koeficient je

$a_{i+1\,k}$, kde $k > j$

i-tý řádek $0000 \; a_{ij}$

(i+1)-ní řádek $0000 \; 0 \; 0000 \; a_{i+1\,k}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

je ve schod. tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

není ve schod. tvaru

<u>TVRZENÍ</u> Soustavu lin. rovnic s maticí ve schodovitém tvaru snadno vyřešíme.

Mohou nastat tyto možnosti:

(1) V matici soustavy je řádek

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \;\big|\; c \neq 0$$

Pak soustava nemá řešení, neboť rovnice pro daný řádek je

$$\underbrace{0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n}_{} = c$$

$$0 \neq c$$

(2) Výše uvedený řádek v matici není. To znamená, že nenulové řádky mají vedoucí koeficienty na levé straně, vždy u nějaké neznámé

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Neznámé, které nestojí u ved. koeficientů zvolíme libovolně.

$x_5 = p$, $x_2 = q$

Ostatní neznámé spočítáme zdola nahoru.

$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p \qquad x_3 = -2x_4 - x_5 = -2(1-2p) - p = -2 + 3p$

$x_2 = q$

$x_1 = 3 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3 + 2(3p-2) - (1-2p) - p$

$= -2 + 7p$

Řešení soustavy jsou všechny pětice čísel

$(-2+7p,\ q,\ -3+3p,\ 1-2p,\ p) \in \mathbb{R}^5$

VĚTA Každou matici lze pomocí elementárních řádkových operací převést na schodovitý tvar.

Důsledek Každou soustavu lin. rovnic jsme schopni převedením její matice na schodovitý tvar vyřešit.

<u>Důkaz věty</u> — algoritmus GAUSSOVA ELIMINACE

Mějme matici A tvaru $k \times n$ (k řádků, n sloupců)

- najdeme první sloupec matice A s číslem $\neq 0$

  Nechť je to j-tý sloupec a číslo $\neq 0$ je v i-tém řádku je to a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1j} & \\ 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{ij} & \\ & & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Pokud $a_{1j} \neq 0$, neděláme nic.

Pokud $a_{1j} = 0$, vyměníme 1. a i-tý řádek. Nyní tedy

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1j} \neq 0 & \\ 0 & 0 & \vdots & \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Pod $a_{1j} \neq 0$ chceme získat samé 0 pomocí ERO

Jestliže v k-tém řádku $a_{kj} \neq 0$, odečteme od k-tého řádku

$$\frac{a_{kj}}{a_{1j}}\text{-násobek 1. řádku}$$

Na místě (k, j) dostaneme

$$a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}} \cdot a_{1j} = a_{kj} - a_{kj} = 0$$

Dostáváme

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1j} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & B & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Z matice $\tilde{A}$ odstraníme 1. řádek a prvních j sloupců. Dostaneme matici B, která má rozměry $(k-1)\times(n-j)$. Jestliže $k-1=1$, jsme hotovi. Je-li $B=0$, tak taky. Jestliže $k-1>1$, tak s maticí B provádíme totéž, co s maticí A.

Příklad

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+4x_3} - x_4 &= -2\\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0\\
x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 0 & -1 & -2\\
3 & 2 & 4 & -2 & 0\\
1 & -1 & 4 & -1 & 2
\end{array}\right)
\overset{1\leftrightarrow 3}{\sim}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 4 & -1 & 2\\
3 & 2 & 4 & -2 & 0\\
2 & 3 & 0 & -1 & -2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
2.\check{r} - 3\times 1.\check{r}.\\
3.\check{r} - 2\times 1.\check{r}\\
\sim
\end{array}
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešíme

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2$$
$$5x_2 - 8x_3 + x_4 = -6$$

$$x_4 = p$$
$$x_3 = q$$
$$x_2 = \frac{1}{5}\left(-6 + 8x_3 - x_4\right) = -6/5 + 8q/5 - p/5$$
$$x_1 = 2 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 - \frac{6}{5} + \frac{8}{5}q - \frac{p}{5} - 4q + p = \frac{4}{5} - \frac{12}{5}q + \frac{4}{5}p$$