Permutace a determinanty

Opakování: Grupa je neprázdná množina G s jednou operací $\cdot : G \times G \to G$, která je

(a) asociativní

(b) má neutrální prvek

(c) ke každému prvku má inverzní.

Grupa permutací n-prvkové množiny S_n

Její prvky jsou bijektivní zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na sebe, operace je skládání zobrazení.

$\tau \in S_4$

i	1	2	3	4
$\tau(i)$	2	3	1	4

$id \in S_4$

1	2	3	4
1	2	3	4

neutrální prvek

$\sigma \in S_4$

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	4	2	3	1

$\sigma \circ \tau$

i	1	2	3	4
$(\sigma \circ \tau)(i)$	2	3	4	1

τ^{-1}

i	1	2	3	4
$\tau^{-1}(i)$	3	1	2	4

③

Definice: Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, \circ)$ jsou dvě grupy.
Zobrazení $f : G \longrightarrow H$, které má vlastnost

$$\forall x, y \in G : \quad f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y),$$

se nazývá homomorfismus grup.

Příklad: $G = (\mathbb{R}, +) \quad H = ((0, \infty), \cdot)$

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

$\exp(x) = e^x \qquad \exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$

Příklad: $\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

Inverzní funkce k exponenciále je rovněž homomorfismus grup.

Znaménko permutace

Každé permutaci z S_n přiřadíme tzv. znaménko permutace, což je číslo 1 nebo -1 podle následujícího pravidla

$$\operatorname{sgn} \sigma = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{-1, 1\}$$

<u>Příklad</u>

$$\sigma : \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}}$$

$$\operatorname{sign} \sigma = \frac{3-2}{2-1} \cdot \frac{1-2}{3-1} \cdot \frac{4-2}{4-1} \cdot \frac{1-3}{3-2} \cdot \frac{4-3}{4-2} \cdot \frac{4-1}{4-3}$$

$(-)$ $(-)$

$$\in \{-1, 1\}$$

$$= (-1)^2 = \underline{1}$$

Praktický výpočet znaménka permutace

V dolním řádku tabulky zjistíme počet dvojic, kde druhé číslo je menší než 1. číslo.

Takovou dvojici nazýváme transverzí.

Znaménko permutace

$$= (-1)^{\text{počet transverzí}}$$

V předchozím příkladu jsou 2 transverze. Proto $\operatorname{sign} \sigma = (-1)^2 = 1$.

Příklad: τ:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \hline n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{array}$$

Počet transverzí je

$$\begin{array}{cccc} (n-1) + & (n-2) + & \dots + & 1 + 0 \\ 1 & 2 & & n-1 \\ \hline n & n & & n \end{array}$$

Součet je

$$\frac{n(n-1)}{2} \qquad \operatorname{sign} \tau = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

⑦

Permutace se znaménkem 1 se nazývají sudé permutace, permutace se znaménkem -1 se nazývají liché permutace.

Věta Nechť τ a $\sigma \in S_n$.

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\tau)$$

Věta říká, že zobrazení $\operatorname{sign}: S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ je homomorfismus grup. $\{-1, 1\}$ je grupa s operací násobení.

Důkaz:

$$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) = \prod_{n\geq j>i\geq 1} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{j-i} = \prod_{j>i} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\cdot\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

$$= \prod_{j>i} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} \cdot \underbrace{\prod_{j>i}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}}_{\operatorname{sign}\tau}$$

Jestliže j, i probíhá všechny dvojice čísel v $\{1,2,\dots n\}$, kde $j>i$, pak $\tau(j)$ a $\tau(i)$ probíhá rovněž všechny dvojice, ale může být $\tau(j)<\tau(i)$. Zlomek

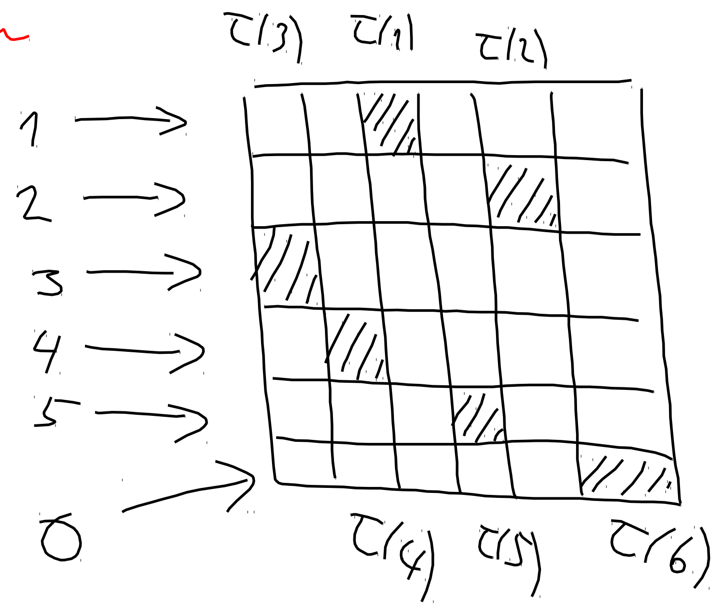
$$\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} = \frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{\tau(i)-\tau(j)}$$

Potom příslušný součin je roven $\operatorname{sign}\sigma$.

Definice determinantu matice $n \times n$ s prvky v $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdot a_{3\tau(3)} \cdots a_{n\tau(n)}$$



$n = 1$ $\qquad A = (a_{11})$ $\qquad$ jediná permutace $\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array}}$

$$\det A = a_{11}$$

$n = 2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad$ permutace $\underbrace{\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}}}_{\tau_1}$ $\quad \underbrace{\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array}}}_{\tau_2}$

$$\det A = \operatorname{sign} \tau_1 \; a_{11} a_{22} + \operatorname{sign} \tau_2 \; a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$\boxed{n = 3}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

6 permutaci

$+1$	-1	$+1$	-1
1 2 3	1 3 2	3 1 2	3 2 1
1	-1		
2 3 1	2 1 3		

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Det. 3×3 matice počítáme podle tzv. Sarrusova pravidla

kladné znaménko

„rovnoběžky" s hlavní diagonálou

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad + \quad + \quad +$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad - \quad - \quad -$$

záporné znaménko

„rovnoběžky" s vedlejší diagonálou

$\boxed{n=4}$ Zde už žádné „Sarrusovo" pravidlo NEPLATÍ.

$4! = 24$, ale „rovnoběžek" s diagonálami je 8.

v obecné, ale matice A je dolní trojúhelníková

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & \dots & & & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \dots & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dolní trojúhelníková matice

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Ukážeme si, že všechny ostatní součiny z definice obsahují jako činitel nějakou 0.

$$a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)} \cdots\cdots a_{n\tau(n)}$$

Kdyby $\tau(1) \in \{2, 3, \dots n\}$ tak, $a_{1\tau(1)} = 0$. Proto musí být $\tau(1) = \underline{1}$. Když je $\tau(1) = 1$, nemůže být $\tau(2) = 1$. Kdyby $\tau(2) > 2$, tak $a_{2\tau(2)} = 0$ a součin by byl taky 0. Proto $\tau(2) = 2$. Nemůže být $\tau(3) = 1$ nebo 2. Kdyby $\tau(3) > 3$, tak $a_{3\tau(3)} = 0$. Proto musí být $\tau(3) = 3$. ATD.

Stejné tvrzení platí pro horní △ matice. Jenom důkaz musíme pořádek „obrácené". Prvně ukážeme, že $\tau(n) = n$, $\tau(n-1) = n-1$, atd.

Jak se mění determinant při provádění řádkových a sloupcových operací

① Jestliže matice B vznikne z matice A výměnou i-tého a j-tého řádku, pak

$$\det B = -\det A$$

Dk: $i=1, j=2$ $\quad B=(b_{ij}) \quad A=(a_{ij})$

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots\cdots = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \, a_{2\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} \cdots\cdots$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \, a_{1\sigma(2)} a_{2\sigma(1)} a_{3\sigma(3)} \cdots\cdots$$

$(1\,2)$ je označení permutace $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ transpozice

$\sigma \circ (1\,2)$: $\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(4) & \dots & \sigma(n) \end{matrix}}$

$$\operatorname{sign} \sigma \circ (1\,2) = \operatorname{sign} \sigma \cdot \underbrace{\operatorname{sign} (1\,2)}_{-1} = -\operatorname{sign} \sigma$$

$$= \sum_{\sigma \circ (1\,2) \in S_n} -\operatorname{sign} \sigma \circ (1\,2) \; a_{1\,\sigma\circ(1\,2)(1)} \, a_{2\,\sigma\circ(1\,2)(2)} \cdots\cdots$$

$$= -\sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = -\det A.$$

② Jestliže má matice A dva stejné řádky, pak

$$\det A = 0.$$

Dokážeme si předchozího. Nechť A má stejný i-tý a j-tý řádek. Přehozením těchto řádků vznikne matice B, ale ta je stejná jako A. Proto podle předchozího

$$\det A = \det B = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

③ Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku číslem c.

Pak
$$\det B = c \det A$$

Dk: $\boxed{c=1}$

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} \cdots b_{n\tau(n)} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; c \cdot a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$$= c \left(\sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \right) =$$

$$= c \cdot \det A .$$

(4) Nechť A a B se liší pouze v i-tém řádku.
Nechť C je taková, že

j-tý řádek $\quad r_j(C) = r_j(A) = r_j(B) \qquad j \neq i$

i-tý řádek $\quad r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$

Pak
$$\det C = \det A + \det B.$$

Varování $\quad \det(A+B) \neq \det A + \det B.$

$i = 1$

Dr: $\det C = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; c_{1\tau(1)} \, c_{2\tau(2)} \cdots c_{n\tau(n)} =$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \left(a_{1\tau(1)} + b_{1\tau(1)} \right) \underset{b_{2\tau(2)}}{\overset{a_{2\tau(2)}}{\shortparallel}} \cdots \underset{b_{n\tau(n)}}{\overset{a_{n\tau(n)}}{\shortparallel}}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} + \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} \cdots$$

$$= \det A + \det B$$

(5) Nechť C vznikne z A tak, že k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku ($i \neq j$). Pak
$$\det C = \det A$$

Důkaz: $i=1$, $j=2$. Nechť B je matice, která má stejný 2., 3., 4., …, n-tý řádek jako A. Na místě prvního řádku nechť má 2. řádek matice A vynásobený číslem c.

Potom podle (4) je
$$\det C \overset{(4)}{=} \det A + \det B \overset{(3)}{=} \det A + c \det \begin{pmatrix} 1_2 A \\ 1_2 A \\ \vdots \end{pmatrix}$$
$$= \det A + 0 = \det A.$$