Determinanty – pokračování

Laplaceův rozvoj

$A = (a_{ij}) \quad n \times n$

A_{ij} matice $(n-1)\times(n-1)$, která vznikne z A vymazáním i-tého řádku a j-tého sloupce

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \underbrace{\det A_{ij}}_{|A_{ij}|}$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku

Nechť i je pevné. Pak

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{ij}|$$

<u>Důkaz:</u> Platí (podle pravidla 2 pro počítání s determinanty)

$$\det A = \det\begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ a_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + \det\begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det\begin{pmatrix} \ast & \cdots & \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \cdots & \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array}$$

přehozením sloupců $(j, j-1)$, $(j-1, j-2), \ldots (2\ 1)$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j-1} \det\begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix} =$$

přehozením řádků $(i, i-1)$, $(i-1, i-2) \ldots (2,1)$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j-1+i-1} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0 \cdots 0 \\ \hline \ast & A_{ij} \end{array}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underline{(-1)^{i+j}} a_{ij} \underline{\det A_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underline{\tilde{a}_{ij}}$$

Provedeme Laplaceův rozvoj podle 1. sloupce

Příklad Matice $(n+1)\times(n+1)$

$$\det \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & 0 \dots & 0 \\ & & & & & \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \; x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det A_{ij}$$

$$= a_n \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} x & -1 & & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & -1 \\ 0 & & & x \end{pmatrix}}_{n\times n} - a_{n-1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \dots & \\ & & & & x \end{pmatrix} + \dots + (-1)^{n+1+1} a_0 \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ x & -1 & \\ & x & \ddots \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= a_n x^n - a_{n-1}\left((-1)\cdot x^{n-1}\right) + a_{n-2} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & & \\ x & -1 & \dots & & \\ 0 & 0 & x & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & x & \dots \\ & & & & x \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} x & -1 & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & x \end{pmatrix} = a_{n-2}\, x^{n-2}$$

$$- \dots + \underbrace{(-1)^{n+2} a_0 (-1)^n}_{a_0} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Jinak: Rozvoj podle posledního řádku

$$D(a_n, a_{n-1}, \dots a_0) = (-1)^{n+1+1} a_0 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & & \\ x & -1 & 0 \\ & x & \ddots \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+1+n+1}\, x \det\begin{pmatrix} a_n & -1 & \\ a_{n-1} & x & -1 \\ \vdots & & \\ a_1 & & x \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_n & \\ \vdots & \\ a_0 & \end{pmatrix}$$

$$= a_0 + x\, D(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1) \qquad D(a_0) = a_0$$

Indukcí $D(a_n, a_{n-1}, \dots a_0) = a_n x^n + \dots + a_0$

Inverzní matice pomocí alg. doplňků

Věta: Matice A typu $n \times n$ má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$.

Dk: $\Longrightarrow$ Nechť A má inverzní A^{-1}. Pak

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Longrightarrow \det A \neq 0.$$

$\Longleftarrow$ Dokážeme, že když $\det A \neq 0$, tak

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T \qquad B = (b_{ij}) = (\tilde{a}_{ij})^T$$

Počítáme $(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{kj} = \begin{cases} \det A & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$

Pro $i = k$ je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij}$ Lapl. rozvoj $\det A$

Pro $i \neq k$ je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{kj}$ Lapl. rozvoj matice podle řádku k

$$\begin{array}{c} \\ i \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

Taková matice má i-tý a k-tý řádek stejný. Její $\det = 0$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \det A & \\ 0 & & \ddots & \det A \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{\det A \neq 0}{A \cdot \frac{B}{\det A}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 3$ $\quad \tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} 6 = 6$

$a_{12} = 4$ $\quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5$

$a_{21} = 5$ $\quad \tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4$

$a_{22} = 6$ $\quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$

$\det A = 18 - 20 = -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(\tilde{a}_{ij}\right)^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CRAMEROVO PRAVIDLO

Je-li A matice $n \times n$ a $\det A \neq 0$, pak soustava

$$Ax = b \quad , \quad b \in \mathbb{R}^n$$

má právě řešení

$$x_i = \frac{\det \left(s_1(A) \; s_2(A) \ldots s_{i-1}(A) \; \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \; s_{i+1}(A) \ldots s_n(A) \right)}{\det A}$$

<u>Důkaz:</u> Platí, že A má inverzní matici. Rovnici vynásobíme touto maticí zleva

$$Ax = b \quad \Big| \; A^{-1} \cdot$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ex = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Nyní použijeme formulku pro inversní matici.

$$x_i = (A^{-1} b)_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} \, b_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A} \cdot b_j =$$

$$= \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_j \, \tilde{a}_{ji}}_{\text{To to je Lapl. rozvoj}} = \frac{\det \begin{pmatrix} s_1 A & \dots & b & \dots & s_n A \end{pmatrix}}{\det A}$$

To to je Lapl. rozvoj

matice $\begin{pmatrix} s_1 A & s_2 A & \dots & \overset{i\text{-tý}}{b} & \dots & s_n A \end{pmatrix}$

podle i.-tého sloupce

Příklad Řešte soustavu s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad A x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1(\alpha - 1) - 1\cdot(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha^2)$$

$$= \alpha - 1 - 1 + \alpha + \alpha - \alpha^3 = -\alpha^3 + 3\alpha - 2$$

$$= -(\alpha - 1)^2 (2 + \alpha)$$

$\alpha = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na 2 parametrech.

$\alpha = -2$ $\quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ nemá řešení

$\alpha \neq 1, -2$ má jediné řešení

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{(\alpha - 1) - (1-\alpha) + 1 - \alpha^2}{-(\alpha - 1)^2(\alpha+2)} =$$

$$= \frac{(1-\alpha)(1+\alpha)}{(1-\alpha)(\alpha-1)(\alpha+2)} = \frac{1+\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

$x_2 = \dots$

$x_3 = \dots$

Laplaceův rozvoj lze zobecnit pomocí více řádků. V případě dvou řádků je determinant sumou se znaménky determinantů submatic řádu 2 a $n-2$.

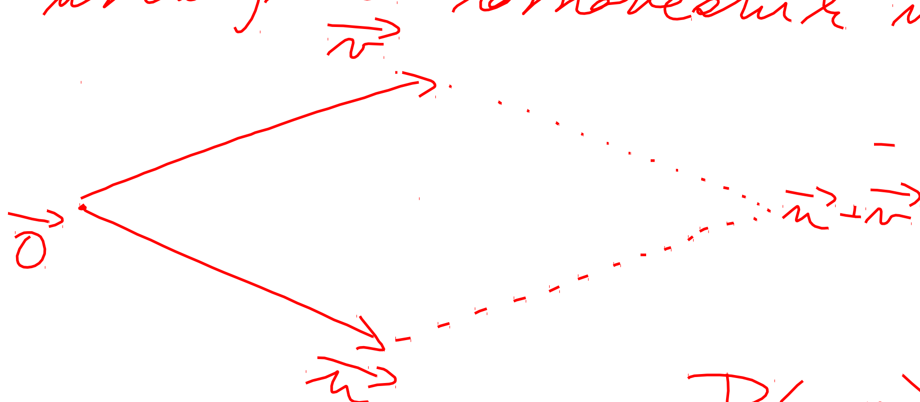
Geometrický význam determinantu

Skutečný význam determinantu
- výpočet vlastních čísel matice
- jeho geometrický význam je „orientovaný objem nebo obsah"

Determinant jako orientovaný objem rovnoběžnostěnu

Začneme maticemi 2×2

V $\mathbb{R}^2$ uvažujme rovnoběžník určený vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$

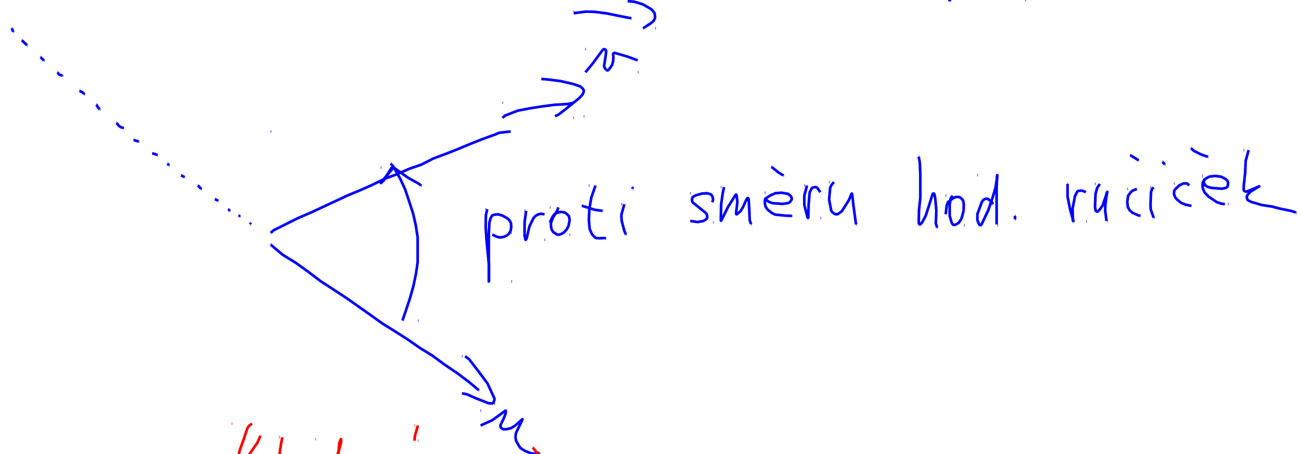


Pro tento rovnoběžník definujeme orientovaný obsah $P(u,v)$ jako

$$P(u,v) = \pm \text{ geometrický obsah rovnoběžníku}$$

Znaménko + volíme, jestliže vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou orientovány
Proti ~~[illegible]~~ směru hodinových ručiček.

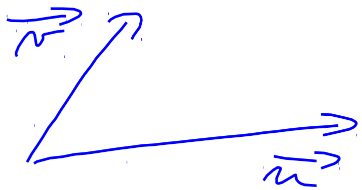
Znaménko − volíme v opačném případě

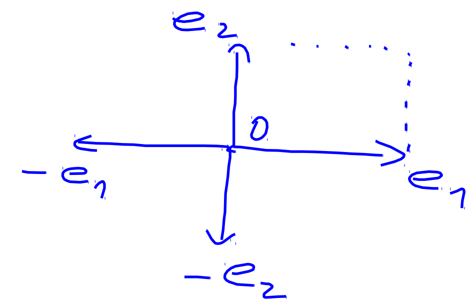


Kladná orientace dvojice $(\vec{u}, \vec{v})$

Záporná orientace dvojice $(\vec{u}, \vec{v})$

orientace $(\vec{u}, \vec{v})$ = − orientace $(\vec{v}, \vec{u})$





$P(e_1, e_2) = 1 \qquad P(e_2, e_1) = -1$

$P(e_1, -e_1) = 0 \qquad P(e_1, -e_2) = -1$

Naším cílem je dokázat, že $P\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

Dříve ukážeme vlastnosti orient. obsahu

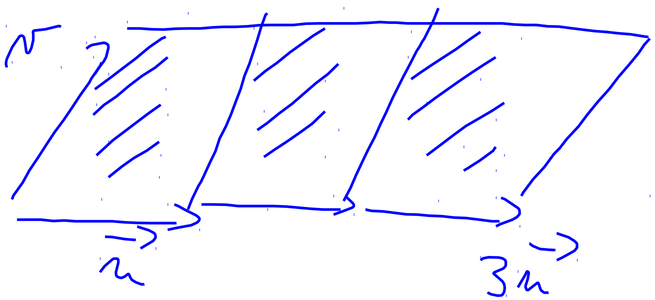
Vlastnosti: (1) $P(\vec{u}, \vec{v}) = -P(\vec{v}, \vec{u})$

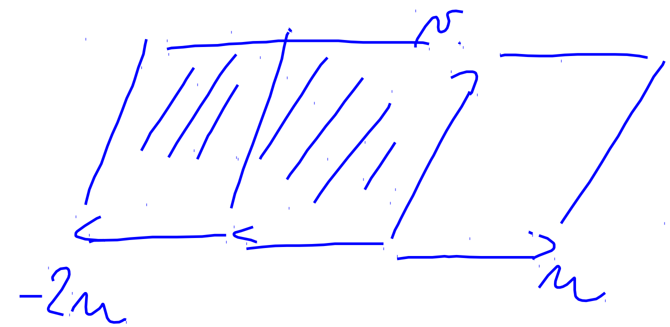
(2) $P(a\vec{u}, \vec{v}) = a\,P(\vec{u}, \vec{v})$, $P(\vec{u}, b\vec{v}) = b\,P(\vec{u}, \vec{v})$

(3) $P(\vec{u} + \vec{z}, \vec{v}) = P(\vec{u}, \vec{v}) + P(\vec{z}, \vec{v})$, uvidíme ve 2. složce

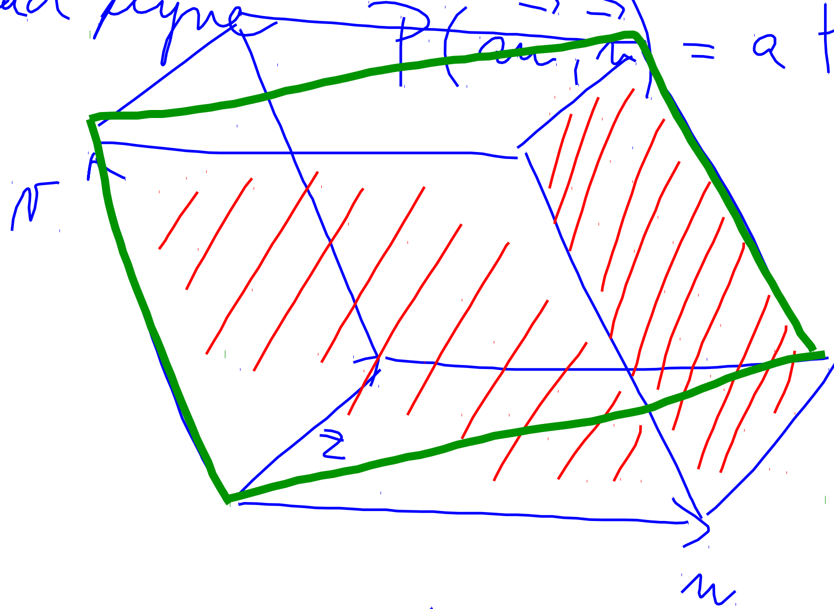
Důkaz 1) plyne z definice

2) $a > 0$ $\qquad\qquad$ $a < 0$





Odtud plyne $P(a\vec{u},\vec{v}) = a\,P(\vec{u},\vec{v})$.



Pravá strana je obsah červených rovnoběžníků

Levá strana je obsah zeleného rovnoběžníku

$$P(u,u) = -P(u,u) \Rightarrow 2P(u,u) = 0 \Rightarrow P(u,u) = 0$$

Z lichosti vlastnosti odvodíme:

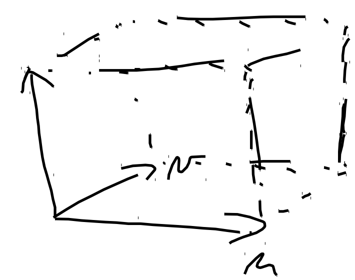
$$P\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = P\left(u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2},\ v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2}\right) = P(u_1\vec{e_1},\ v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2})$$

$$+ P(u_2\vec{e_2},\ v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2}) = P(u_1e_1, v_1e_1) + P(u_1e_1, v_2e_2) + P(u_2e_2, v_1e_1)$$

$$+ P(u_2\vec{e_2}, v_2e_2) = u_1v_1\underbrace{P(e_1,e_1)}_{0} + u_1v_2\underbrace{P(e_1,e_2)}_{1} + u_2v_1\underbrace{P(e_2,e_1)}_{-1}$$

$$+ u_2v_2\underbrace{P(e_2,e_2)}_{0} = u_1v_2 - u_2v_1 = \det\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{pmatrix}$$

V $\mathbb{R}^3$ musíme definovat orientaci trojice vektorů (u, v, z) podle pravidla pravé ruky.



Rovnoběžnostěn určený trojicí vektorů je

Orient. objem $P(u,v,z)$ = orientace · geom. objem

Vlastnosti

1) $P(e_1, e_2, e_3) = 1$

2) $P(au, v, z) = a\,P(u, v, z)$ a obdobně v dalších složkách

3) $P(u, v, z) = -P(v, u, z)$ a podobně při výměně každých 2 složek

4) $P(u+x, v, z) = P(u, v, z) + P(x, v, z)$

Odtud lze odvodit, že

$$P(u, v, z) = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & z_1 \\ u_2 & v_2 & z_2 \\ u_3 & v_3 & z_3 \end{pmatrix}$$