Domácí úkoly ke cvičení č. 7

1. V obou následujících případech jsou ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ dány vektorové podprostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ zadané jako lineární obaly $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ a $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ daných vektorů. V obou případech vyberte z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bázi součtu $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ těchto vektorových podprostorů. V každém z obou případů rozhodněte, zda se jedná o přímý součet vektorových podprostorů.

a) $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 3, 4, 5)$, $\quad \mathbf{v}_1 = (2, 5, 3, 7, 9)$,
$\mathbf{u}_2 = (3, 2, 4, 5, 7)$, $\quad \mathbf{v}_2 = (3, 4, 5, 6, 7)$,
$\mathbf{u}_3 = (4, 3, 5, 6, 9)$, $\quad \mathbf{v}_3 = (5, 2, 9, 4, 3)$,

b) $\mathbf{u}_1 = (5, 5, 4, 3, 6)$, $\quad \mathbf{v}_1 = (4, 6, 5, 8, 7)$,
$\mathbf{u}_2 = (7, 6, 5, 2, 7)$, $\quad \mathbf{v}_2 = (5, 7, 6, 9, 8)$,
$\mathbf{u}_3 = (9, 7, 6, 1, 8)$, $\quad \mathbf{v}_3 = (3, 5, 4, 7, 6)$.

2. V obou následujících případech jsou ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ dány vektorové podprostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ zadané jako lineární obaly $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ a $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ daných vektorů. V obou případech vypočtěte průnik $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ těchto vektorových podprostorů. Najděte nějakou bázi tohoto průniku vektorových podprostorů.

a) $\mathbf{u}_1 = (3, 7, 1, 5, 9)$, $\quad \mathbf{v}_1 = (3, 5, 2, 4, 4)$,
$\mathbf{u}_2 = (3, 5, 2, 4, 6)$, $\quad \mathbf{v}_2 = (5, 7, 4, 6, 2)$,
$\mathbf{u}_1 = (4, 6, 3, 5, 7)$, $\quad \mathbf{v}_3 = (4, 6, 3, 5, 3)$,

b) $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 4, 1, -4)$, $\quad \mathbf{v}_1 = (1, -1, 6, 1, -6)$,
$\mathbf{u}_2 = (1, 3, -6, -3, 12)$, $\quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, -8, 1, 18)$,
$\mathbf{u}_3 = (1, 9, -6, -9, 6)$, $\quad \mathbf{v}_3 = (1, 20, -15, -20, 9)$.

3. V každé z následujících úloh je dán vektorový prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a vektorové podprostory $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$. Pokaždé rozhodněte, zda potom součet $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ těchto podprostorů je přímým součtem a zda platí, že $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{V}$.

a) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2n+1}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $n > 0$, a jeho vektorové podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{(r_1, r_2, \dots, r_{2n+1}) \,|\, r_1 = r_3 = \dots = r_{2n-1} = r_{2n+1}\}, \\ \mathbf{Q} &= \{(r_1, r_2, \dots, r_{2n+1}) \,|\, r_2 = r_4 = \dots = r_{2n} = 0\}. \end{aligned}$$

b) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{4n+1}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $n > 0$, a jeho vektorové podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \{(r_1, r_2, \dots, r_{4n+1}) \,|\, & r_1 = r_3 = \dots = r_{4n-1} = r_{4n+1}, \\ & r_2 = r_4 = \dots = r_{4n}\}, \\ \mathbf{Q} = \{(r_1, r_2, \dots, r_{4n+1}) \,|\, & r_1 = r_2,\ r_3 = r_4,\ \dots,\ r_{2n-1} = r_{2n}, \\ & r_{2n+1} = 0,\ r_{2n+2} = r_{2n+3},\ \dots,\ r_{4n} = r_{4n+1}\}. \end{aligned}$$

c) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a jeho vektorové podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, (\forall x \in \mathbb{R})(f(-x) = f(x))\}, \\ \mathbf{Q} &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, (\forall x \in \mathbb{R})(f(|x|) = 0)\}. \end{aligned}$$