MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, učitelské studium

vzorová písemka při zkoušce

I. část

1. Načrtněte grafy následujících funkcí (do samostatných obrázků)

$$f: \quad y = (-x)^{\frac{2}{3}}, \qquad g: \quad y = 2\,\mathrm{arctg}\,|x|.$$

2. Určete definiční obor D funkce $f\colon y = \ln(1+\cos x)$ a rozhodněte, zda je
   a) periodická, b) sudá, c) na D shora ohraničená.
3. Udejte příklad posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jež splňují rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 2$. Pokud takový příklad neexistuje, vysvětlete.
4. Výrokem s kvantifikátory a nerovnostmi zapište, co znamená $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Pak udejte příklad vyhovující racionální funkce f.
5. K funkci $f\colon y = \pi + 2\arcsin x$ určete inverzní funkci g (předpis $y = g(x)$, definiční obor a obor hodnot).
6. Určete (pokud existují) limity těchto posloupností

$$a)\ \left\{3^{\frac{\sqrt{n^2+5n}}{\sqrt{n^2+3n}}}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad b)\ \left\{\frac{4^n + 2\cdot(-3)^n}{(3\cdot 2^n + 4)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

7. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f\colon y = \dfrac{9}{4-x^2}$ s bodem dotyku $[1, ?]$.
8. Přímo z definice vypočtěte derivaci funkce $f\colon y = x(x+1)$ v obecném bodě x_0.
9. Napište tvar rozkladu na parciální zlomky (s neznámými koeficienty, které **nemusíte počítat**) pro funkci

$$f\colon y = \frac{x^3+1}{x^4 - 2x^2 - 8}.$$

II. část

1. Derivujte a výsledek vždy upravte:

$$\text{a)} \quad f\colon y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}, \qquad \text{b)} \quad g\colon y = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2-2}.$$

2. Vypočtěte limity (a, b jsou daná čísla):

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to a}(a^2 - x^2)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right).$$

3. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$. K přibližnému určení významných hodnot využijte $\sqrt{5} \doteq 2{,}2$, $\sqrt{41} \doteq 6{,}4$.