Lineární algebra a geometrie III

Doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.
Bc. Lukáš Vokřínek, PhD.

9. října 2017

Obsah

Úvod

Obsah skript je zřejmý z následujícího podrobného sylabu. Většina kapitol kromě teoretického výkladu obsahuje vyřešené příklady a na konci kontrolní otázky a úlohy k samostatnému procvičení. Rádi bychom poděkovali Richardu Lastoveckému, který značnou část textu přepsal v LaTeXu a opatřil úlohami k samostatnému řešení.

Místa označená jednou hvězdičkou „$*$“ považujeme za těžká a jejich studium doporučujeme pouze studentům usilujícím o lepší známku. Místa označená dvěma hvězdičkami „$**$“ jsou ještě náročnější. Části označené „cv“ se dělaly na cvičení a „nd“ se nedělaly vůbec.

Martin Čadek & Lukáš Vokřínek

Sylabus přednášky

1. Afinní a projektivní prostory: afinní prostor, komplexifikace vektorového a afinního prostoru, projektivní prostor, projektivní rozšíření afinního prostoru.

2. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru: nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru, vztah projektivních nadkvadrik a bilineárních forem a jejich klasifikace, klasifikace afinních nadkvadrik.

3. Metrická klasifikace nadkvadrik: polárně sdružené body vzhledem k nadkvadrice, střed nadkvadriky, hlavní směry, hlavní nadroviny, vrcholy nadkvadriky, metrická klasifikace nadkvadrik.

4. Mooreova–Penroseova pseudoinverze: Mooreova–Penroseova pseudoinverze, singulární hodnoty, singulární rozklad, aproximace řešení soustavy lineárních rovnic, lineární regrese.

5. Multilineární algebra: faktorový prostor, multilineární zobrazení, duální prostor, duální báze, duální zobrazení, dualita a podprostory, báze prostoru multilineárních forem.

6. Tenzorový součin: tenzorový součin a jeho univerzální vlastnost, asociativita, komutativita a další vlastnosti tenzorového součinu, vztah tenzorového součinu a prostoru lineárních zobrazení, tenzorová algebra vektorového prostoru, souřadnice tenzorů při změně báze.

7. Symetrické a antisymetrické tenzory: symetrické tenzory, symetrická algebra vektorového prostoru a její báze, antisymetrické tenzory, vnější algebra vektorového prostoru a její báze, vztah vnější mocniny a determinantu.

8. Determinanty, objemy a orientace: antisymetrické formy a objemy, orientace, objem v Eukleidovském prostoru, geometrie v rovině a prostoru, kvaterniony a jejich vztah ke geometrii v prostoru.

9. Smithův normální tvar celočíselných matic: celočíselné matice a jejich Smithův normální tvar, prezentace konečně generovaných komutativních grup, klasifikace konečně generovaných komutativních grup.

10. Smithův normální tvar polynomiálních matic: polynomiální matice a jejich Smithův normální tvar, $\mathbb{K}[\lambda]$-moduly a jejich vztah k operátorům na vektorových prostorech, kanonická prezentace operátorů na $\mathbb{K}^n$, racionální kanonický tvar, Cayleyho–Hamiltonova věta, Jordanův kanonický tvar.

1. Afinní a projektivní prostory

Začněme s krátkou motivací. Naším cílem bude studium kuželoseček a jejich více-rozměrných analogií, kvadrik a nadkvadrik. Na kuželosečky se dá pohlížet dvěma způsoby – geometricky jako na množiny bodů, které splňují nějakou kvadratickou rovnici a algebraicky jako na tuto rovnici samotnou. Klasifikace kuželoseček pak spočívá v nalezení jistých kanonických tvarů – geometricky to znamená, že po posunutí a otočení každá kuželosečka vypadá jako elipsa, hyperbola, parabola, atd. a algebraicky pak to, že po jisté vhodné lineární substituci rovnice kuželosečky vypadá nějakým specifickým způsobem. Aby byly tyto dva pohledy ekvivalentní, je potřeba uvažovat „komplexně“, neboť například $x^2 + y^2 = -1$ a $x^2 = -1$ není možné převést na sebe, nicméně mají tyto rovnice totožnou množinu řešení, totiž prázdnou. Pokud bychom uvažovali i komplexní řešení, budou se jejich množiny chovat geometricky jinak.

Kromě komplexních bodů bude ještě výhodné přidat k naší rovině „body v nekonečnu“. Například by mělo být zřejmé, že střed elipsy hraje zásadní roli (elipsa je podle něj symetrická). Představme si nyní, že jeden konec elipsy držíme na místě a druhý konec táhneme směrem od prvního – střed se bude vzdalovat poloviční rychlostí. V limitním případě, kdy pohyblivý konec elipsy zmizí v nekonečnu, stane se z elipsy parabola a ta již střed mít nebude, protože jsme jej také přesunuli do nekonečna. Nicméně, tento bod v nekonečnu je stále v jistém smyslu středem paraboly a je vhodné jej mít k dispozici. O něco jednodušší příklad je dvojice různoběžných přímek, jejichž průsečík přesunujeme do nekonečna. Pokud budeme vhodnou dvojici bodů držet na místě, stane se v limitním případě z dvojice různoběžných přímek dvojice rovnoběžných přímek. Pokud budeme uvažovat i body v nekonečnu, přímky se budou stále protínat (tak, jak se nám zdá, že se koleje v dálce protínají).

V dalším tedy obohatíme rovinu (obecněji afinní prostor) o komplexní body a později o body v nekonečnu. Mluvíme o komplexním a projektivním rozšíření.

1.1. Komplexifikace reálného vektorového prostoru

Nechť V je reálný vektorový prostor. Jeho *komplexním rozšířením* (*komplexifikací*) je komplexní vektorový prostor $V^{\mathbb{C}}$ s nosnou množinou $V \times V$, na které je definováno sčítání a násobení komplexním číslem takto:

$$\begin{aligned} (v, w) + (v', w') &= (v + v', w + w') \\ (a + ib)(v, w) &= (av - bw, bv + aw) \end{aligned}$$

Není těžké dokázat, že jde skutečně o vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ s nulovým prvkem $(0, 0)$. (Dobrou motivací je způsob, jakým se konstruují komplexní čísla jako dvojice reálných čísel.)

Vektory $v \in V$ ztotožníme s prvky $(v, 0) \in V^{\mathbb{C}}$ a budeme tak V považovat za podmnožinu prostoru $V^{\mathbb{C}}$. Platí

$$(v, w) = (v, 0) + i(w, 0) = v + iw$$

Poznámka. Poněkud abstraktní, ale velice užitečné pozorování je následující univerzální vlastnost: každé $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $\varphi \colon V \to W$ do komplexního vektorového prostoru W se jednoznačně rozšiřuje na $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $\widetilde{\varphi} \colon V^{\mathbb{C}} \to W$, nutně dané předpisem

$$\widetilde{\varphi}(v + iw) = \widetilde{\varphi}(v) + i\widetilde{\varphi}(w) = \varphi(v) + i\varphi(w).$$

To, že je vskutku $\mathbb{C}$-lineární se ověří snadno (stačí zachovávání násobení i).

Věta 1.1. *Každá báze $(e_1, \dots, e_n)$ prostoru V je bází prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

cv *Důkaz.* Nechť $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$ je libovolný vektor. Chceme ukázat, že existují jediná komplexní čísla $z_k = a_k + ib_k$ taková, že

$$u + iv = z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n = (a_1 + ib_1)e_1 + \cdots + (a_n + ib_n)e_n.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme ekvivalentní soustavu

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \qquad v = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n.$$

Tato soustava má jediné řešení: a_k je k-tá souřadnice u a b_k je k-tá souřadnice v. □

Příklad. Komplexní rozšíření vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ je izomorfní s $\mathbb{C}^n$. Nejlépe se to vidí pomocí předchozí poznámky a věty: inkluze $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ se rozšiřuje na $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^n$, které posílá bázový vektor e_i na bázový vektor e_i a je tedy isomorfismem.

cv **Příklad.** Dokažte, že komplexní rozšíření prostoru polynomů s reálnými koeficienty $\mathbb{R}[x]$ je izomorfní s prostorem polynomů s komplexními koeficienty $\mathbb{C}[x]$.

Definice 1.2. Nechť $\varphi\colon V \to W$ je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory. *Komplexní rozšíření* $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$ je zobrazení definované předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(v + iw) = \varphi(v) + i\varphi(w).$$

Toto zobrazení je opět lineární.

Věta 1.3. *Je-li A matice lineárního zobrazení $\varphi\colon V \to W$ v bázích α a β, pak $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$ má v bázích α a β opět matici zobrazení A.*

cv *Důkaz.* Nechť $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta = (\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_m)$. Matice $A = (a_{ij})$ je definována takto:

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{e}_i a_{ij}$$

Pro $\varphi^{\mathbb{C}}$ platí

$$\varphi^{\mathbb{C}}(e_j) = \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{e}_i a_{ij}.$$

Tedy $(\varphi^{\mathbb{C}})_{\beta\alpha} = A$. □

1.2. Afinní prostor a jeho komplexifikace

Definice 1.4. Nechť V je vektorový prostor. *Afinní prostor* $\mathcal{S}$ se zaměřením V je množina $\mathcal{S}$ společně s vektorovým prostorem V a s operací $+\colon \mathcal{S} \times V \to \mathcal{S}$, která splňuje následující podmínky:

(1) pro každé $A \in \mathcal{S}$ platí $A + 0 = A$,

(2) pro každé $A \in \mathcal{S}$ a $v, w \in V$ platí $(A + v) + w = A + (v + w)$,

(3) pro každé A, $B \in \mathcal{S}$ existuje právě jedno $v \in V$ tak, že $A + v = B$. Píšeme $v = \overrightarrow{AB}$.

Pro *zaměření* V používáme značení $V = \operatorname{Dir} \mathcal{S}$.

(První dvě podmínky zkráceně říkají, že V má pravou akci na $\mathcal{S}$. Poslední podmínka říká, že tato akce je jednoduše tranzitivní.)

Z poslední podmínky plyne, že pro každou volbu „počátku“ $O \in \mathcal{S}$ je zobrazení $\operatorname{Dir}\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $v \mapsto O + v$, bijekce a můžeme tedy ztotožnit $\mathcal{S}$ s vektorovým prostorem $\operatorname{Dir}\mathcal{S}$. Důležité je ale mít na paměti, že tato identifikace závisí na volbě počátku. Každá jiná identifikace se však liší pouze o translaci, $v \mapsto \overrightarrow{PO} + v$.

Naopak, každý vektorový prostor V lze chápat jako afinní prostor se zaměřením V tím, že počátek „zapomeneme“, tj. požadované zobrazení $V \times V \to V$ bude sčítání ve V.

Definice 1.5. *Báze afinního prostoru* $\mathcal{S}$ je $(n+1)$-tice $(O, e_1, \ldots, e_n)$, kde $O \in \mathcal{S}$ je bod (počátek) a $(e_1, \ldots, e_n)$ je báze vektorového prostoru V. *Souřadnice* bodu $A \in \mathcal{S}$ v této bázi je $(n+1)$-tice skalárů $(1, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ taková, že

$$A = O + x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (O, e_1, \ldots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Souřadnice vektoru $v \in \operatorname{Dir}\mathcal{S}$ v této bázi je $(n+1)$-tice skalárů $(0, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ taková, že

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (O, e_1, \ldots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Alternativně zapisujeme souřadnice bodů $[x_1, \ldots, x_n] = (1, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ a souřadnice vektorů $(x_1, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

Příklad. Kaŕdý afinní podprostor vektorového prostoru je afinní prostor.

Příklad. *Standardním afinním prostorem* dimenze n budeme rozumět prostor

$$\mathcal{A}_n = \{(1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 = 1\}.$$

Vzhledem k předchozí diskuzi lze $\mathcal{A}_n$ považovat za „prostor souřadnic“. Konkrétně, báze afinního prostoru $\mathcal{S}$ zadává izomorfismus $\mathcal{A}_n \to \mathcal{S}$ daný násobením zleva řádkem $(O, e_1, \ldots, e_n)$. Inverzní zobrazení $\mathcal{S} \to \mathcal{A}_n$ pak přiřazuje každému bodu jeho souřadnice.

V afinním prostoru můžeme definovat afinní kombinace: jsou-li $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ body a $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ čísla taková, že $x_0 + \cdots + x_n = 1$, položíme

$$x_0 A_0 + \cdots + x_n A_n = P + x_0 \overrightarrow{PA_0} + \cdots + x_n \overrightarrow{PA_n} \in \mathcal{S},$$

cv kde $P \in \mathcal{S}$ je libovolně zvolený bod. Snadno se ukáže, že výsledek na této volbě nezávisí.

Příklad. Prostorem barycentrických souřadnic dimenze n budeme rozumět prostor

$$\mathcal{B}_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}.$$

Stejně jako izomorfismy $\mathcal{A}_n \cong \mathcal{S}$ odpovídají bázím $\mathcal{S}$, izomorfismy $\mathcal{B}_n \cong \mathcal{S}$ odpovídají *bodovým bázím*, tj. $(n+1)$-ticím bodů $E_0, \dots, E_n$ takovým, že každý bod A lze jednoznačně vyjádřit jako $A = x_0E_0 + \cdots + x_nE_n$, $x_0 + \cdots + x_n = 1$. Koeficienty x_i nazýváme *barycentrické souřadnice* bodu A.

Nechť $\mathcal{S}$ je afinní prostor, jehož zaměření V je reálný vektorový prostor. *Komplexním rozšířením* (*komplexifikací*) afinního prostoru $\mathcal{S}$ je množina $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} = \mathcal{S} \times V$ s operací

$$+\colon \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$$

definovanou předpisem

$$(A,\, u) + (v, w) = (A + v,\, u + w).$$

Jednoduše se dá ověřit, že takto definovaná operace má všechny vlastnosti z definice afinního prostoru, např. vlastnost (3) je splněna, protože rovnice

$$(A, u) + (v, w) = (B, t)$$

má jediné řešení $(v, w) = (\overrightarrow{AB}, t - u)$.

Bod $A \in \mathcal{S}$ ztotožníme s bodem $(A, 0) \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ a budeme tak opět chápat $\mathcal{S}$ jako podmnožinu $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$. Pro každý bod $(A, u) \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ pak platí

$$(A, u) = (A, 0) + (0, u) = A + iu.$$

cv **Příklad.** Je-li $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ afinní podprostor s parametrickým popisem

$$\{P + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\},$$

pak $\mathcal{T}^{\mathbb{C}}$ je afinní podprostor v $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ s parametrickým popisem

$$\{P + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}\}.$$

cv **Příklad.** Je-li $\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ afinní podprostor všech reálných řešení soustavy rovnic $Ax = b$, pak $\mathcal{T}^{\mathbb{C}} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = b\}$ je prostorem všech komplexních řešení téže soustavy.

Definice 1.6. Zobrazení $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ mezi afinními prostory se nazývá *afinní*, jestliže existuje lineární zobrazení $\underline{\varphi}\colon \operatorname{Dir}\mathcal{S} \to \operatorname{Dir}\mathcal{T}$ takové, že

$$\varphi(A + v) = \varphi(A) + \underline{\varphi}(v)$$

pro všechny body $A \in \mathcal{S}$ a všechny vektory $v \in \operatorname{Dir}\mathcal{S}$. Zobrazení $\underline{\varphi}$ se nazývá *indukované lineární zobrazení.*

Poznámka. Indukované lineární zobrazení je jednoznačně určeno afinním zobrazením φ, protože platí $\underline{\varphi}(v) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(P+v)}$, pro libovolný bod $P \in \mathcal{S}$.

Definice 1.7. Nechť $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ je afinní zobrazení mezi reálnými afinními prostory. Jeho *komplexní rozšíření* $\varphi^{\mathbb{C}}\colon \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{T}^{\mathbb{C}}$ je definováno předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(A + iu) = \varphi(A) + i\underline{\varphi}(u),$$

kde $\underline{\varphi}$ je indukované lineární zobrazení.

cv Zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ je opět afinní s indukovaným lineárním zobrazením $\underline{\varphi^{\mathbb{C}}} = \underline{\varphi}^{\mathbb{C}}$.

1.3. Projektivní prostor

Nechť V je $(n+1)$-rozměrný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ (obvykle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$).

Definice 1.8. Množinu $\mathcal{P}(V)$ všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru V nazveme n-rozměrným *projektivním prostorem* nad $\mathbb{K}$. Vektorový prostor V se nazývá *aritmetickým základem* projektivního prostoru $\mathcal{P}(V)$. Prvky projektivního prostoru se nazývají *body*.

Každý nenulový vektor $v \in V \setminus \{0\}$ určuje jednorozměrný podprostor

$$[v] = \{kv \in V \mid k \in \mathbb{K}\} \in \mathcal{P}(V);$$

vektor v se nazývá *aritmetickým zástupcem* bodu $[v]$. Zjevně každý jiný aritmetický zástupce je nenulovým násobkem v a můžeme tedy alternativně $\mathcal{P}(V)$ chápat jako rozklad $(V \setminus \{0\})/\!\sim$ podle relace ekvivalence $v \sim kv$, $k \in \mathbb{K}^\times$.

Příklad. *Standardním projektivním prostorem* dimenze n budeme rozumět $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. K popisu bodů budeme používat označení

$$(x_0 : \cdots : x_n) = [(x_0, \ldots, x_n)].$$

Jedna z možných názorných představ o projektivním prostoru s aritmetickým základem $\mathbb{R}^{n+1}$ je založena na pozorování, že každá přímka v $\mathbb{R}^{n+1}$ protne sféru

$$S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

právě ve dvou bodech. Tedy $\mathcal{P}_n$ je S^n, kde „ztotožníme“ protilehlé body. O něco lépe představitelná je identifikace bodů na okraji hemisféry. Takto lze podmnožiny projektivního prostoru v omezené míře i namalovat, viz přednášky.

Poznámka. Na přednášce jsem měl delší odbočku ohledně ploch, orientace, atd. Konkrétně jsem mluvil o Riemannovských plochách, Möbiově pásku, Kleinově láhvi a projektivním prostoru.

Libovolná báze $\alpha = (e_0, \ldots, e_n)$ vektorového prostoru V zadává identifikaci $V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{n+1}$ a následně $\mathcal{P}(V) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}_n$, $[v] \mapsto [(v)_\alpha]$. O obrazu bodu $[v]$ budeme hovořit jako o jeho *homogenních souřadnicích*. Konkrétně, je-li $(v)_\alpha = (x_0, \ldots, x_n)$, jsou homogenní souřadnice $[v]$ rovny $(x_0 : \cdots : x_n)$ a tyto nezávisí na volbě aritmetického základu v.

1.4. Projektivní podprostory

Jednorozměrné podprostory v $(k+1)$-rozměrném podprostoru $W \subseteq V$ tvoří k-rozměrný *projektivní podprostor* $\mathcal{P}(W)$ v projektivním prostoru $\mathcal{P}(V)$. Jednorozměrný projektivní podprostor se nazývá *projektivní přímka*.

Příklad. Každé dvě přímky p, q v $\mathcal{P}_2$ mají společný bod. V aritmetickém základu $\mathbb{K}^3$ přímkám p a q odpovídají podprostory U a V dimenze 2. Protože

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U + V)$$

a $\dim(U + V) \leq 3$, je $\dim U \cap V \geq 1$. Tedy $p \cap q$ obsahuje alespoň jeden bod projektivního prostoru $\mathcal{P}_2$.

Nechť $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{P}_n$ je k-rozměrný projektivní podprostor, zadaný $(k+1)$-rozměrným podprostorem $W \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ popsaným homogenní soustavou rovnic $Ax = 0$. Stejná soustava rovnic pak popisuje homogenní souřadnice bodů projektivního prostoru $\mathcal{P}(W)$, tj.

$$\mathcal{P}(W) = \{[x] \mid Ax = 0\}.$$

1.5. Kolineace

Nechť $\mathcal{P}(V)$ a $\mathcal{P}(W)$ jsou dva projektivní prostory dimenze n. Zobrazení $\Phi\colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ se nazývá *kolineace*, jestliže existuje lineární izomorfismus $\varphi\colon V \xrightarrow{\cong} W$ takový, že

$$\Phi([v]) = [\varphi(v)]$$

pro všechna $v \in V$. Píšeme $\Phi = [\varphi]$. Kolineace $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ tvoří grupu, kterou budeme značit $PGL(\mathcal{P}_n)$.

cv *Poznámka.* Analogicky k situaci ve vektorových a afinních prostorech existuje pojem báze projektivního prostoru – konkrétně *geometrická báze* je $(n+2)$-tice bodů tvaru $[e_0], \dots, [e_n], [e_0 + \dots + e_n]$ pro nějakou bázi aritmetického základu. Platí, že kolineace je jednoznačně určena tím, kam posílá bázi a tu může poslat na libovolnou jinou bázi. Viz cvičení.

1.6. Afinní prostor jako podmnožina projektivního prostoru

Nyní se k afinnímu prostoru pokusíme přidat body v nekonečnu. Názornou představu o tomto procesu si můžeme učinit tím, že afinní prostor budeme vnímat jako rovinu nad níž se nachází pozorovatel (jako když se díváme na podlahu). Pak když pozorujeme svět kolem sebe tak vidíme jednak body této roviny a jednak body na horizontu[1]. Body na horizontu mají speciální význam, odpovídají směrům v rovině – například každé dvě rovnoběžné přímky v rovině se protínají na horizontu přesně v bodě odpovídajícím jejich společnému směru, atd. Pokusíme se nyní tuto situaci popsat obecně.

Nechť $\mathcal{P}(V)$ je n-rozměrný projektivní prostor s aritmetickým základem V. Nechť $\mathcal{N} \subseteq V$ je afinní nadrovina neprocházející počátkem. Pro každý bod $X \in \mathcal{P}(V)$ nastane právě jedna z následujících dvou možností:

- $X \cap \mathcal{N} = \emptyset$, potom $X \in \mathcal{P}(\operatorname{Dir} \mathcal{N})$ nebo
- $X \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, potom je tímto průnikem jediný bod. Naopak, každým bodem $A \in \mathcal{N}$ prochází jediný jednorozměrný podprostor $X \in \mathcal{P}(V)$.

Dostáváme tak identifikaci $\mathcal{N} \cong \mathcal{P}(V) \smallsetminus \mathcal{P}(\operatorname{Dir} \mathcal{N})$. Definujme *nevlastní prostor* afinního prostoru $\mathcal{S}$ jako $\nu(\mathcal{S}) = \mathcal{P}(\operatorname{Dir} \mathcal{S})$. Můžeme potom psát

$$\mathcal{P}(V) = \mathcal{N} \sqcup \nu(\mathcal{N}).$$

O bodech z $\mathcal{N}$ (lépe řečeno jednorozměrných podprostorech V protínajících $\mathcal{N}$) budeme hovořit jako o *vlastních bodech* a o bodech $\nu(\mathcal{N})$ jako o *nevlastních bodech* nebo také *směrech*. Toto rozdělení samozřejmě závisí na volbě nadroviny $\mathcal{N}$ (ve skutečnosti pouze na $\operatorname{Dir} \mathcal{N}$).

V této situaci mluvíme o projektivním prostoru $\mathcal{P}(V)$ jako o *projektivním rozšíření* afinního prostoru $\mathcal{N}$ a značíme jej $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{P}(V)$.

[1] Body nad horizontem budeme ignorovat. Důvodem je, že naše vnímání je založené na polopřímkách, zatímco projektivní prostor na přímkách a v projektivním vnímání jsou tedy body nad horizontem zároveň body roviny vyskytující se týmž směrem za pozorovatelem.

Příklad. Zabývejme se příkladem $\mathcal{N} = \mathcal{A}_n \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$, tj. standardním afinním prostorem dimenze n. Potom bod $(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$ ztotožňujeme s vlastním bodem $(1 : x_1 : \dots : x_n)$ a zbylé body $\mathcal{P}_n$ jsou tvaru $(0 : x_1 : \dots : x_n)$ a leží v $\nu(\mathcal{A}_n)$. Zejména $\mathcal{P}_n = \overline{\mathcal{A}_n}$.

** *Poznámka.* Přesuňme se nyní do situace, kdy máme zadaný abstraktní afinní prostor $\mathcal{S}$ a chceme definovat jeho projektivní rozšíření. Podle předchozího výkladu je vhodné $\mathcal{S}$ vložit do nějakého vektorového prostoru V jako afinní nadrovinu neprocházející počátkem. K tomu, abychom tento vektorový prostor definovali, předpokládejme prvně, že takové vložení máme a popišme V pouze pomocí $\mathcal{S}$.

Nechť $P \in \mathcal{S}$ je libovolný bod (o kterém můžeme uvažovat jako o počátku). Zjevně platí $V = [P] \oplus \operatorname{Dir} \mathcal{S}$ (jsou to podprostory komplementární dimenze s nulovým průnikem, protože $\mathcal{S}$ neprochází počátkem), a proto můžeme obecný vektor $u \in V$ psát jednoznačně jako $u = tP + v$, kde $t \in \mathbb{K}$ a $v \in \operatorname{Dir} \mathcal{S}$. Zřejmě tedy máme bijekci $\mathbb{K} \times \operatorname{Dir} \mathcal{S} \cong V$, $(t, v) \mapsto tP + v$.

Mohli bychom tedy definovat $V = \mathbb{K} \times \operatorname{Dir} \mathcal{S}$, bijekce z předchozího odstavce ale bohužel závisí na volbě počátku P. Pokusme se nyní této závislosti zbavit a uvažujme tedy jinou volbou počátku Q a počítejme

$$sQ + w = s(P + \overrightarrow{PQ}) + w = sP + (s\overrightarrow{PQ} + w).$$

Zřejmě tedy platí $tP + v = sQ + w$, právě když $s = t$ a $v = s\overrightarrow{PQ} + w$.

Je-li nyní $\mathcal{S}$ libovolný afinní prostor, uvážíme na $\mathbb{K} \times \mathcal{S} \times \operatorname{Dir} \mathcal{S}$ relaci ekvivalence, jejíž třídy $[(t, P, v)]$ budeme značit $tP + v$ a budeme tedy požadovat $tP + v = sQ + w$, právě když platí $s = t$ a $v - w = s\overrightarrow{PQ}$. Potom lze na vzniklém rozkladu $V(\mathcal{S}) = (\mathbb{K} \times \mathcal{S} \times \operatorname{Dir} \mathcal{S})/\!\sim$ zavést strukturu vektorového prostoru (platí $tP + v = tO + (t\overrightarrow{OP} + v)$ a položíme $(tO + v) + (sO + w) = (t + s)O + (v + w)$). Bod $A \in \mathcal{S}$ ztotožníme s vektorem $1A + 0 \in V(\mathcal{S})$ a tímto způsobem budeme chápat $\mathcal{S}$ jako nadrovinu ve $V(\mathcal{S})$. Dostáváme tak projektivní rozšíření $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{P}(V(\mathcal{S}))$.

cv **Cvičení.** Popište projektivní přímku procházející dvěma vlastními body; vlastním a nevlastním bodem (řešte stejným způsobem).

1.7. Projektivní rozšíření afinních podprostorů

Nechť $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ je afinní podprostor. Naším cílem bude zkonstruovat projektivní podprostor $\overline{\mathcal{T}} \subseteq \overline{\mathcal{S}}$ tak, že $\overline{\mathcal{T}}$ bude projektivním rozšířením $\mathcal{T}$. Předpokládejme tedy, že $\mathcal{S} \subseteq V$ jako afinní nadrovina a pokusme se najít vektorový podprostor $W \subseteq V$, v němž bude $\mathcal{T}$ ležet jako afinní nadrovina. Protože $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ neprochází počátkem, stačí za W zvolit lineární obal $\mathcal{T}$, který je zjevně $W = \{0\} * \mathcal{T}$ (spojení počátku a $\mathcal{T}$ – to je afinní podprostor obsahující počátek, tj. vektorový podprostor). Pro dimenzi platí $\dim W = \dim\{0\} + 1 + \dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T} + 1$, takže v něm vsktuku leží $\mathcal{T}$ jako afinní nadrovina neprocházející počátkem. Můžeme tedy psát $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{P}(W)$ a jedná se o projektivní podprostor $\mathcal{S}$ – hovoříme o *projektivním rozšíření afinního podprostoru.* Z konstrukce vidíme, že se jedná o *nejmenší* projektivní podprostor $\overline{\mathcal{S}}$ obsahující $\mathcal{T}$. Z předchozí sekce víme, že $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \sqcup \nu(\mathcal{T})$ a tedy $\overline{\mathcal{T}}$ obsahuje krom bodů z $\mathcal{T}$ také směry v zaměření $\operatorname{Dir} \mathcal{T}$. To podává uspokojivé vysvětlení, proč (a kde!) se protínají rovnoběžné přímky.

Zabývejme se nyní početním aspektem. Nechť je $\mathcal{T}$ zadán soustavou (nehomogenních) lineárních rovnic $b + Ax = 0$. Tu můžeme vhodně zapsat jako $\begin{pmatrix} b \mid A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0$. Protože jsou tedy body $\mathcal{T}$ dány soustavou

$$(b \mid A)\begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = 0, \quad x_0 = 1,$$

je zjevně $\mathcal{T}$ afinní nadrovinou ve vektorovém podprostoru zadaném první (homogenní) soustavou rovnic $(b \mid A)\begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = 0$ (speciálně je třeba vyřešit případ, že by původní soustava neměla řešení[2]).

Podívejme se na tento podprostor poněkud elementárněji: platí $X = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathcal{T}$, právě když $x_0 \neq 0$ a $X = (1 : x_1/x_0 : \cdots : x_n/x_0) = (1, x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) \in \mathcal{T}$, tj. právě když $x_0 \neq 0$ a

$$b + A(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)^T = 0.$$

Přenásobením $x_0 \neq 0$ dostáváme ekvivalentní podmínku

$$bx_0 + A(x_1, \ldots, x_n)^T = (b \mid A)\,(x_0, x_1, \ldots, x_n)^T = 0.$$

Dostaneme tedy popis projektivního rozšíření $\overline{\mathcal{T}}$ tak, že do soustavy zadávající $\mathcal{T}$ dosadíme $(1, x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$, přenásobením x_0 z ní uděláme opět lineární soustavu a zapomeneme na podmínku $x_0 \neq 0$ (tím přesně přidáme nevlastní body – navíc je jasné, že tyto přidané body budou právě ty s $x_0 = 0$, tj. řešení homogenizované soustavy).

* 1.8. Vztah afinních zobrazení, lineárních zobrazení a kolineací

Zabývejme se vztahem afinních zobrazení $\mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_n$ a lineárních zobrazení $\mathbb{K}^{m+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$. Zjevně, každé lineární zobrazení $T\colon \mathbb{K}^{m+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ s vlastností $T(\mathcal{A}_m) \subseteq \mathcal{A}_n$ dává po zúžení afinní zobrazení $\varphi\colon \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_n$. Budeme-li T psát blokově tvaru $(1+n) \times (1+m)$, pak

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & c \\ b & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + cx \\ b + Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b + Ax \end{pmatrix}$$

a je vidět, že musí platit $k = 1$, $c = 0$.

Naopak, nechť φ je afinní zobrazení. Potom

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\varphi}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b + Ax \end{pmatrix},$$

pokud vezmeme za b souřadnice $\varphi(e_0)$ a za A matici $\underline{\varphi}$ ve standardních bázích. Proto je φ zúžením lineárního zobrazení s maticí $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{smallmatrix}\right)$.

cv Na cvičení ukážeme, že, je-li kolineace Φ reprezentována dvěma lineárními izomorfismy φ, ψ, pak platí $\psi = k\varphi$. Díky předchozí analýze je pak jednoduché vidět, že každá kolineace je reprezentována maximálně jedním afinním zobrazením a tento případ nastane, právě když Φ zachovává rozklad na vlastní a nevlastní podprostory. Ve výsledku tedy lze říct, že afinní zobrazení jsou kolineace zachovávající rozklad $\overline{\mathcal{A}}_n = \mathcal{A}_n \sqcup \nu(\mathcal{A}_n)$.

[2] V takovém případě je $\mathcal{T} = \emptyset$ a tedy podle naší definice je $\overline{\mathcal{T}} = \emptyset$. Z druhého pohledu je pak $\mathcal{T} = \emptyset$ s *netriviálním* zaměřením daném řešeními příslušně homogenní soustavy a $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \sqcup \nu(\mathcal{T}) = \mathcal{P}(\operatorname{Dir} \mathcal{T})$.

Kontrolní otázky

1. Nechť V je reálný vektorový prostor. Definujte jeho komplexifikaci $V^{\mathbb{C}}$. Ukažte na příkladu $V = \mathbb{R}_2[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2. Co je $V^{\mathbb{C}}$ v tomto případě?
2. Vyslovte definici afinního prostoru a afinního zobrazení. Demonstrujte na několika příkladech.
3. Co jsou body projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$? Co jsou přímky v $\mathcal{P}_n$? Mají každé dvě projektivní přímky v $\mathcal{P}_3$ neprázdný průnik?
4. Vysvětlete projektivní rozšíření afinní roviny $\mathcal{A}_2$ na projektivní prostor $\mathcal{P}_2$. Představujte si $\mathcal{A}_2$ jako rovinu v $\mathbb{R}^3$ zadanou v souřadnicích rovnicí $x_0 = 1$. Co jsou v tomto případě nevlastní body?

Příklady k procvičení

1. Ke komplexnímu vektorovému prostoru V lze definovat konjugovaný prostor $\overline{V}$ takto: množinově $\overline{V} = V$, sčítání vektorů je stejné jako ve V a násobení skalárem $\odot$ definujeme předpisem
$$(a + ib) \odot u = (a - ib) \cdot u.$$
Dokažte, že $\overline{V}$ je komplexní vektorový prostor.
2. Ke komplexnímu vektorovému prostoru V lze definovat jeho *realifikaci* $V^{\mathbb{R}}$ takto: množinově $V^{\mathbb{R}} = V$, sčítání vektorů je stejné jako ve V a násobení reálným číslem je stejné. Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je báze V. Najděte nějakou bázi $V^{\mathbb{R}}$.
[Řešení: Např. $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$.]
3. Dokažte, že pro reálný vektorový prostor V platí
$$(V^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} \simeq V \oplus V.$$
4. Dokažte, že pro komplexní vektorový prostor V platí
$$(V^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}.$$
5. Nechť $\varphi\colon V \to W$ je lineární zobrazení mezi komplexními vektorovými prostory. Zobrazením φ je indukováno zobrazení
$$\varphi^{\mathbb{R}}\colon V^{\mathbb{R}} \to W^{\mathbb{R}}.$$
Dokažte, že $\varphi^{\mathbb{R}}$ je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory.
6. Jsou-li v prostorech V a W z předchozího příkladu zvoleny báze $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ a $\beta = (\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_m)$, můžeme najít matice A a B takové, že matice zobrazení $(\varphi)_{\beta\alpha} = A + iB$. Zvolme v prostoru $V^{\mathbb{R}}$ bázi $\alpha^{\mathbb{R}} = (e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ a v prostoru $W^{\mathbb{R}}$ bázi $\beta^{\mathbb{R}} = (\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_m, i\widetilde{e}_1, \dots, i\widetilde{e}_m)$. Dokažte, že matice zobrazení $\varphi^{\mathbb{R}}$ v těchto bázích je
$$(\varphi^{\mathbb{R}})_{\beta^{\mathbb{R}}\alpha^{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$
Uvědomte si, jaké jsou rozměry jednotlivých matic!

7. V prostoru $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ udejte příklady přímky p takové, že přímky p a $\overline{p}$ jsou rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné.
8. Nechť $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_n$ je afinní podprostor. Popište nejmenší projektivní podprostor $\overline{\mathcal{A}}_n$ obsahující $\mathcal{S}$, tzv. projektivní rozšíření $\mathcal{S}$. Značíme jej $\overline{\mathcal{S}}$. Popište také nevlastní body $\overline{\mathcal{S}}$. Interpretujte průnik $\overline{\mathcal{S}} \cap \overline{\mathcal{T}}$. (Podstatné je, že $\mathcal{S}$ je afinní nadrovinou ve svém lineárním obalu.)
9. Najděte bod, kde se protínají větve paraboly $y = x^2$.

2. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru

2.1. Definice nadkvadriky v reálném afinním prostoru

Uvažujme reálný afinní prostor $\mathcal{S}$ s bází $(O, e_1, \dots, e_n)$, pro jednoduchost můžeme předpokládat $\mathcal{S} = \mathcal{A}_n$ se standardní bází. *Nadkvadrikou* v $\mathcal{A}_n$ rozumíme množinu $Q \subseteq \mathcal{A}_n$ všech bodů, jejichž souřadnice v dané bázi splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} x_i + a_{00} = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a aspoň jedno $a_{ij} \neq 0$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nadkvadriky v $\mathcal{A}_2$ se nazývají *kuželosečky*, nadkvadriky v $\mathcal{A}_3$ *kvadriky*.

Mnohé rovnice výše uvedeného typu (např. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$) nemají v reálném oboru řešení. Proto je výhodné místo s nadkvadrikami v $\mathcal{A}_n$ pracovat s nadkvadrikami v komplexním rozšíření $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$.

Poznámka. Za chvíli uvidíme, že tato definice nezávisí na souřadnicích a ve skutečnosti lze provést ve vektorovém obalu afinního prostoru pomocí symetrické bilineární formy.

2.2. Definice nakvadriky v komplexním rozšíření afinního prostoru

Uvažujme komplexní rozšíření $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ reálného afinního prostoru. Nechť $(O, e_1, \dots, e_n)$ je nějaká báze $\mathcal{A}_n$. *Nadkvadrikou* v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ rozumíme množinu $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ všech bodů, jejichž souřadnice v dané bázi splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} x_i + a_{00} = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a aspoň jedno $a_{ij} \neq 0$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Pro nadkvadriky v afinním prostoru chceme definovat takové pojmy jako střed, tečná nadrovina, asymptotická nadrovina, a to nejlépe v řeči koeficientů a_{ij}, aby nalezení těchto objektů bylo početně co nejjednodušší. To se nám podaří celkem snadno, když od afinního prostoru přejdeme k jeho projektivnímu rozšíření a od kvadriky $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ k jejímu rozšíření $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$.

Popišme nyní nadkvadriku Q v homogenních souřadnicích $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$. Nechť tedy $X = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$. Potom tento bod leží na Q, právě když X je vlastní, tj. $x_0 \neq 0$ a pak $X = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0})$, a navíc platí

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_i}{x_0} \frac{x_j}{x_0} + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \frac{x_i}{x_0} + a_{00} = 0.$$

Po vynásobení $x_0 \neq 0$ dostáváme ekvivalentní rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} x_i x_0 + a_{00} x_0^2 = 0.$$

Množinu všech bodů $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$, jejichž homogenní souřadnice splňují výše uvedenou rovnici, nazveme *projektivním rozšířením* nadkvadriky Q a budeme ji označovat $\overline{Q}$. Množina $\overline{Q}$ může obsahovat i nevlastní body z $\nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$ o souřadnicích $(0 : x_1 : \dots : x_n)$.

Položíme-li $a_{0i} = a_{i0}$ a $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{n}$, je A nenulová symetrická matice typu $(n+1)\times(n+1)$. Výše uvedenou rovnici můžeme psát ve tvaru

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^{\mathrm{T}}Ax = 0.$$

Symetrická matice A definuje reálnou bilineární formu f na aritmetickém základu projektivního prostoru $\overline{\mathcal{A}_n}$ předpisem

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i y_j = x^{\mathrm{T}}Ay.$$

Blok matice A příslušný kladným indexům $i > 0$, $j > 0$ budeme označovat $\widetilde{A}$, odpovídá kvadratické části původní rovnice.

2.3. Definice nadkvadriky v projektivním prostoru

Nechť $\mathcal{P}(V)$ je reálný projektivní prostor dimenze n. Nechť f je nenulová reálná symetrická bilineární forma na V. Nadkvadrika Q v projektivním prostoru $\mathcal{P}(V^{\mathbb{C}})$ je množina bodů $[v] \in \mathcal{P}(V^{\mathbb{C}})$, pro které

$$f(v,v) = 0.$$

V souřadnicovém vyjádření v nějaké bázi V jde o řešení rovnice

$$x^{\mathrm{T}}Ax = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ a $a_{ij} \neq 0$ pro nějaké i, j. Důležitým aspektem je homogennost této rovnice, díky níž platnost této rovnice nezávisí na volbě reprezentanta.

Poznámka. Nechť $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ je afinní nadkvadrika. Pak množina $\overline{Q}$ je nejmenší projektivní nadkvadrika, která obsahuje Q. Toto tvrzení není zcela triviální a přenecháváme jej čtenáři k věření.

Lemma 2.1. *Nadkvadrika Q v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ je rozšířením nějaké kvadriky v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ právě tehdy, když existuje nějaký nevlastní bod $X \in \nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$, který v Q neleží.*

Důkaz. Nechť je projektivní nadkvadrika $Q \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ zadána symetrickou bilineární formou f s maticí A. Potom Q není rozšířením afinní nadkvadriky, právě když je blok $\widetilde{A}$ nulový, tj. právě když je zúžení f na nevlastní podprostor nulové. To je ale právě tehdy, když je rovnice $f(x,x) = 0$ splněna pro všechny nevlastní body $X = [x] \in \nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$. □

2.4. Vztah mezi nadkvadrikami a symetrickými bilineárními formami

Nechť $\mathcal{K}_n$ je množina všech nadkvadrik v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$, nechť $\mathcal{B}_n$ je množina všech symetrických bilineárních forem na aritmetickém základu $\mathbb{R}^{n+1}$. Protože se jedná o vektorový prostor, můžeme uvažovat příslušný projektivní prostor $\mathcal{P}(\mathcal{B}_n) = (\mathcal{B}_n \smallsetminus \{0\})/\sim$.

Zobrazení $\varphi\colon \mathcal{B}_n \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{K}_n$, definované předpisem $\varphi(f) = \{[x] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}} \mid f(x,x) = 0\}$, indukuje zobrazení $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{P}(\mathcal{B}_n) \to \mathcal{K}_n$.

Věta 2.2. *Zobrazení $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{P}(\mathcal{B}_n) \to \mathcal{K}_n$ je bijekce.*

Důkaz. Z definice existuje ke každé nadkvadrice příslušná bilineární symetrická forma, tedy $\widetilde{\varphi}$ je surjektivní zobrazení. Chceme dokázat, že je také injektivní, to znamená, že zadávají-li dvě bilineární symetrické formy f a g tutéž kvadriku, pak $g = k \cdot f$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.

Vezměme $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ takové, že $f(u,u) \neq 0$. Protože f a g zadávají tutéž kvadriku, je také $g(u,u) \neq 0$. Můžeme proto psát $g(u,u) = kf(u,u)$ pro nějaké $0 \neq k \in \mathbb{R}$. Vezměme nyní libovolné $v \in \mathbb{C}^{n+1}$. Potom výrazy

$$\begin{aligned} f(tu+v, tu+v) &= t^2 f(u,u) + 2tf(u,v) + f(v,v) \\ g(tu+v, tu+v) &= t^2 g(u,u) + 2tg(u,v) + g(v,v), \end{aligned}$$

chápané jako polynomy druhého stupně v proměnné t, mají podle předpokladů stejné kořeny t_1, t_2. Z algebry víme, že koeficienty polynomů stejného stupně (v našem případě 2) a se stejnými kořeny musí být úměrné, proto ze vztahu $g(u,u) = kf(u,u)$ plyne $g(v,v) = kf(v,v)$. Protože vektor v byl volen libovolně, platí $g = k \cdot f$. □

Poznámka. Podobné tvrzení platí také pro afinní nadkvadriky, konkrétně dvě kvadratické rovnice $q(x) = 0$, $r(x) = 0$ zadávají stejnou nadkvadriku, tj. mají stejnou množinu řešení, právě když $r = k \cdot q$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}^\times$. Důkaz se provede stejně jako v projektivním případě, jen je potřeba zvolit u nevlastní; pak se stejně ukáže, že $g(x,x) = kf(x,x)$ pro $x = (1, x_1, \ldots, x_n)$ vlastní. To je ale přesně rovnice $r(x) = kq(x)$.

2.5. Klasifikace nadkvadrik v projektivním prostoru

Věta 2.3. *Nechť $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika. Potom v $\mathbb{R}^{n+1}$ existuje báze, v níž je nadkvadrika popsána právě jednou z rovnic*

(a) pro $n = 1$

$x_0^2 + x_1^2 = 0$	*dva imaginární body*
$x_0^2 - x_1^2 = 0$	*dva reálné body*
$x_0^2 = 0$	*dvojný bod*

(b) pro $n = 2$

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	*imaginární regulární kuželosečka*
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	*reálná regulární kuželosečka*
$x_0^2 + x_1^2 = 0$	*dvojice imaginárních přímek*
$x_0^2 - x_1^2 = 0$	*dvojice reálných přímek*
$x_0^2 = 0$	*dvojnásobná přímka*

(c) pro $n = 3$

$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	*imaginární regulární kvadrika*
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	*nepřímková regulární kvadrika*
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	*přímková regulární kvadrika*
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	*imaginární kuželová plocha*
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	*reálná kuželová plocha*
$x_0^2 + x_1^2 = 0$	*imaginární dvojice rovin*
$x_0^2 - x_1^2 = 0$	*reálná dvojice rovin*

$$x_0^2 = 0 \qquad \textit{dvojnásobná rovina}$$

Důkaz. Každá nadkvadrika je určena nějakou reálnou symetrickou bilineární formou f na aritmetickém základu $\mathbb{R}^{n+1}$. Pro tuto formu lze nalézt vhodnou bázi $\mathbb{R}^{n+1}$, v níž má f diagonální tvar s koeficienty ± 1 nebo 0 na diagonále. Případným vynásobením číslem -1 dostaneme rovnici tvaru

$$x_0^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0,$$

kde $p, q \geq 0$, $p + 1 \geq q$ a $p + q \leq n$. □

* 2.6. Afinní klasifikace nadkvadrik

Podobně lze provést klasifikaci nadkvadrik v afinním prostoru. Stačí při diagonalizaci brát zvláštní zřetel na použité řádkové/sloupcové operace. Víme totiž, že kolineace je afinním zobrazením, právě když zachovává rozklad na vlastní a nevlastní body. Znamená to tedy, že při změnách báze $(O, e_1, \dots, e_n)$ stačí dbát na to, aby nultý prvek byl vždy bod a zbylé prvky vždy vektory. Jednoduše tak lze aplikovat diagonalizaci na posledních n prvků báze a dostat matici A do tvaru

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & b^{\mathrm{T}} & c^{\mathrm{T}} & d^{\mathrm{T}} \\ \hline b & E_p & 0 & 0 \\ c & 0 & -E_q & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní nastávají dvě možnosti: Pokud $d = 0$, lze použít matice E_p a $-E_q$ k eliminaci b a c (výsledek přičítání násobku vektoru k bodu je opět bod) a případným vydělením prvního řádku a sloupce $\sqrt{|a_{00}|}$ lze opět dosáhnout toho, že a_{00} je jedno z $\varepsilon \in \{0, 1, -1\}$; dostaneme tedy tvar

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \varepsilon + x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0.$$

V takovémto případě mluvíme o *středové* nadkvadrice; o středu pojednáme podrobněji v následující kapitole.

Druhou možností je $d \neq 0$, přičemž lze jednoduše dosáhnout toho, že $a_{0(p+q+1)} = 1$. Pak můžeme $a_{0(p+q+1)}$ použít k eliminaci a_{00}, b, c a zbylých prvků d, čímž dostaneme tvar

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & E_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_q & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad 2x_{p+q+1} + x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0.$$

Takovéto nadkvadriky nazýváme *nestředové*. Dokázali jsme tak následující větu.

Věta 2.4. *Nechť $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika. Potom v $\mathcal{A}_n$ existuje báze, v níž je nadkvadrika popsána právě jednou z rovnic*

(a) pro $n = 1$

$$x_1^2 + 1 = 0 \qquad \textit{dva imaginární body}$$

$x_1^2 - 1 = 0$	*dva reálné body*
$x_1^2 = 0$	*dvojný bod*

(b) pro $n = 2$

$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	*imaginární elipsa*
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	*reálná elipsa*
$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	*hyperbola*
$x_1^2 + 2x_2 = 0$	*parabola*
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	*dvě imaginární různoběžky*
$x_1^2 - x_2^2 = 0$	*dvě reálné různoběžky*
$x_1^2 + 1 = 0$	*dvě imaginární rovnoběžky*
$x_1^2 - 1 = 0$	*dvě reálné rovnoběžky*
$x_1^2 = 0$	*dvojnásobná přímka*

(c) pro $n = 3$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	*imaginární elipsoid*
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	*reálný elipsoid*
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	*dvoudílný (nepřímkový) hyperboloid*
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	*jednodílný (přímkový) hyperboloid*
$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$	*eliptický paraboloid*
$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$	*hyperbolický paraboloid*
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	*imaginární kuželová plocha*
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	*reálná kuželová plocha*
$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	*imaginární eliptická válcová plocha*
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	*reálná eliptická válcová plocha*
$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	*hyperbolická válcová plocha*
$x_1^2 + 2x_2 = 0$	*parabolická válcová plocha*
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	*dvě imaginární různoběžné roviny*
$x_1^2 - x_2^2 = 0$	*dvě reálné různoběžné roviny*
$x_1^2 + 1 = 0$	*dvě imaginární rovnoběžné roviny*
$x_1^2 - 1 = 0$	*dvě reálné rovnoběžné roviny*
$x_1^2 = 0$	*dvojnásobná rovina*

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete vzájemný vztah mezi kuželosečkami v komplexním rozšíření projektivního prostoru a reálnými bilineárními formami.
2. Co znamená, že dva body projektivního prostoru jsou polárně sdružené vzhledem k dané kuželosečce? Které geometrické pojmy se definují pomocí pojmu polárně sdružených bodů?
3. Které kvadriky v projektivní klasifikaci jsou regulární a které singulární?
4. Které kuželosečky a které kvadriky jsou v afinní klasifikaci středové?
5. Které kuželosečky v afinní rovině mají asymptoty?

6. Načrtněte podobu všech kvadrik z afinní klasifikace.

Příklady k procvičení

1. Určete polární nadrovinu k bodu X vzhledem k nadkvadrice Q
   (a) $Q\colon 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 2 = 0, \qquad X = [3; 1; -1]$
   (b) $Q\colon 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \qquad X = [2; -1; 3]$
   (c) $Q\colon 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 14x_2 - 13 = 0, \qquad X = [-3; 2]$

   [Řešení: (a) $7x_1 + 4x_2 = -1$; (b) $3x_2 + 4x_3 = 1$; (c) nevlastní přímka.]

2. Určete tečnou nadrovinu nadkvadriky Q v bodě X
   (a) $Q\colon 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 - 3 = 0, \qquad X = [0; 1]$
   (b) $Q\colon x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 12x_1 + 24x_2 + 15 = 0, \qquad X = [0; -1]$
   (c) $Q\colon x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + 5x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$
   $X = [1; -1; -1]$

   [Řešení: (a) $4x_1 + x_2 = 1$; (b) $3x_1 - x_2 = 1$; (c) $4x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 5$.]

3. Rozhodněte, zda projektivní rozšíření následujících nadkvadrik jsou regulární nebo singulární a vypočtěte hodnost příslušné symetrické bilineární formy. Určete dále singulární body nadkvadrik.
   (a) $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + 20x_2 + 20 = 0$ v $\mathcal{S}_2$
   (b) $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16x_1 + 12x_2 - 36 = 0$ v $\mathcal{S}_2$
   (c) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1 = 0$ v $\mathcal{S}_3$
   (d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2 = 0$ v $\mathcal{S}_3$

   [Řešení:
   (a) hodnost 2, singulární bod [0; -2];
   (b) regulární kuželosečka – hodnost 3;
   (c) hodnost 1, singulární body $[1 + t - 2s; t; s]$;
   (d) hodnost 3, nevlastní singulární bod $(1; 0; -1; 0)$.

4. Určete středy nadkvadrik z příkladu (3).

   [Řešení: (a) $S = [0; -2]$; (b) $S = [3; -4]$; (c) každý bod kvadriky je střed;
   (d) přímka středů $S = [t; 0; -t]$.]

5. Určete typ nadkvadrik z příkladu (3).

   [Řešení: (a) bod; (b) hyperbola; (c) dvojnásobná rovina; (d) imaginární eliptická válcová plocha.]

6. Určete asymptoty kuželoseček
   (a) $2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_1 + 3x_2 + 4 = 0$

(b) $2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 - x_1 - 6x_2 - 15 = 0$

(c) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 14x_2 + 29 = 0$

(d) $8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 16x_1 + 4x_2 - 28 = 0$

[Řešení: (a) $a_1\colon 2x_1 - 3x_2 = -1$, $a_2\colon x = 1$; (b) $a_1\colon x_1 + x_2 = -1$, $a_2\colon 2x_1 - 3x_2 = 3$; (c) nevlastní asymptota; (d) $a_1\colon 24ix_1 + 6(3+i)x_2 = -24i$, $a_2\colon 24ix_1 - 6(3-i)x_2 = -24i$.]

3. Metrická klasifikace nadkvadrik

3.1. Pojem polárně sdružených bodů

Začneme motivací. Nadkvadrika Q v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ je v souřadnicích $x \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ určena rovnicí $x^{\mathrm{T}}Ax = 0$. Tečný vektor ke Q spočítáme derivací křivky $x(t)$ ležící v Q v bodě $x = x(0)$. Derivováním v rovnici $x(t)^{\mathrm{T}}Ax(t) = 0$ dostáváme $(x'(0))^{\mathrm{T}}Ax(0) + x(0)^{\mathrm{T}}Ax'(0) = 0$.

Vzhledem k tomu, že A je symetrická matice, je tato rovnice ekvivalentní

$$(x(0))^{\mathrm{T}}Ax'(0) = 0.$$

Nechť $y \in \mathbb{C}^{n+1}$ leží v tečné nadrovině, pak

$$y = x + x'(0)$$

a platí

$$x^{\mathrm{T}}Ay = x^{\mathrm{T}}A(x + x'(0)) = x^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}Ax'(0) = 0 + 0 = 0.$$

Tedy pro $y \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ v tečné nadrovině ke Q v bodě $x \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ platí $x^{\mathrm{T}}Ay = 0$.

Definice 3.1. Nechť $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika definovaná pomocí bilineární symetrické formy f. Body $[x], [y] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ jsou *polárně sdružené* vzhledem ke Q, jestliže

$$f(x, y) = 0.$$

V dalším budeme občas psát $[x] \pitchfork [y]$. Pro projektivní podprostor $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ označme

$$\mathcal{U}^{\pitchfork} = \{Y \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}} \mid \forall X \in \mathcal{U} \colon X \pitchfork Y\},$$

budeme mu říkat *polární doplněk* podprostoru $\mathcal{U}$.

Okamžitým důsledkem definice je následující tvrzení: bod X leží na Q, právě když je X polárně sdružený sám se sebou, tj. $f(x, x) = 0$.

Lemma 3.2. *Množina $[x]^{\pitchfork}$ polárně sdružených bodů k bodu $[x]$ vzhledem k nadkvadrice Q je buď celé $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ nebo nadrovina v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Množina polárně sdružených bodů k $[x]$ je $\{[y] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}} \mid y \in \ker f(x, -)\}$.

Protože $f(x, -) \colon V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ je lineární zobrazení, je buď $\operatorname{im} f(x, -) = 0$ nebo $\mathbb{C}$. Dále

$$\dim \ker f(x, -) = n + 1 - \dim \operatorname{im} f(x, -),$$

což dává tvrzení lemmatu. □

Příklad (a). V $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$ uvažujme kvadriku

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Polárně sdružené body k bodu $[(1, 1, 0, \sqrt{2})]$ mají homogenní souřadnice (y_1, y_2, y_3, y_4) a tvoří rovinu

$$0 = f\big((1, 1, 0, \sqrt{2}), (y_1, y_2, y_3, y_4)\big) = y_1 + y_2 - \sqrt{2}y_4.$$

Příklad (b). V $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ uvažujme kuželosečku

$$x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Polárně sdružené body k bodu $[(0,0,1)]$ jsou všechny body $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, neboť pro jejich homogenní souřadnice (y_1, y_2, y_3) platí

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 0.$$

Definice 3.3. Bod $[x] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *regulárním bodem* vzhledem k nadkvadrice Q, jestliže množina polárně sdružených bodů k $[x]$ je nadrovina v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$. Tato nadrovina se nazývá *polární nadrovina* (v $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ stručně *polára*).

Definice 3.4. Bod $[x] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *singulárním bodem* nadkvadriky Q, jestliže množina polárně sdružených bodů k $[x]$ je celý prostor $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$. (Speciálně platí $[x] \in Q$.)

Definice 3.5. Nadkvadrika Q v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ se nazývá *regulární*, jsou-li všechny její body regulární. Nadkvadrika se nazývá *singulární*, obsahuje-li nějaký singulární bod.

nd **Lemma 3.6.** *Nadkvadrika $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je regulární právě tehdy, když hodnost symetrické matice A, která ji definuje v souřadnicích, je rovna $n+1$.*

nd *Důkaz.* Hodnost A je rovna $n+1$ právě tehdy, když $x^{\mathrm{T}}A \neq 0$ pro každé $x \neq 0$. To je ale ekvivalentní tomu, že existuje $y \neq 0$ takové, že $x^{\mathrm{T}}Ay \neq 0$, neboli bod $[x]$ je regulární. □

Lemma 3.7. *Jestliže $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je regulární nadkvadrika, pak součet dimenzí podprostoru $\mathcal{U}$ a jeho polárního doplňku $\mathcal{U}^{\pitchfork}$ je vždy $n-1$ a platí $(U^{\pitchfork})^{\pitchfork} = U$. Říkáme, že to jsou podprostory* komplementární dimenze.

Důkaz. Pokud má aritmetický základ $\mathcal{U}$ bázi $(u_0, \ldots, u_d)$, pak jeho polární komplement má aritmetický základ popsaný soustavou $d+1$ rovnic $f(u_0, -) = \cdots = f(u_d, -) = 0$. Tyto rovnice jsou lineárně nezávislé, protože jejich kombinace $f(x_0u_0 + \cdots + x_du_d, -)$ je nulová pouze pro $x_0u_0 + \cdots + x_du_d = 0$, tj. $x_0 = \cdots = x_d = 0$, díky regularitě Q. Proto má aritmetický základ $\mathcal{U}^{\pitchfork}$ dimenzi $n-d$ a v součtu pak mají $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}^{\pitchfork}$ dimenzi $d + (n-d-1) = n-1$.

Druhé tvrzení plyne z prvního, protože zřejmě platí $U \subseteq (U^{\pitchfork})^{\pitchfork}$ a oba podprostory mají stejnou dimenzi. □

Lemma 3.8. *Nechť $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je nadkvadrika se singulárním bodem X. Jestliže $Y \neq X$ je dalším bodem nadkvadriky Q, pak v Q leží celá přímka $\overleftrightarrow{XY}$.*

Důkaz. Pro aritmetické zástupce x, y bodů X a Y a bilineární formu f, která definuje nadkvadriku Q, platí $f(x,x) = 0$ a $f(x,y) = 0$, neboť $[x] = X$ je singulární bod, a $f(y,y) = 0$, neboť $[y] = Y \in Q$.

Potom

$$f(ax+by, ax+by) = a^2 f(x,x) + 2ab f(x,y) + b^2 f(y,y) = 0.$$

Tedy $[ax+by] \in Q$. □

Speciální případ, kdy singulární bod $[v] \in \nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$ je nevlastní, má následující geometrickou interpretaci: s každým bodem $Y \in Q$ obsahuje nadkvadrika Q i celou přímku procházející Y se směrovým vektorem v.

3.2. Tečná nadrovina

Na základě předchozí motivace můžeme vyslovit následující definici.

Definice 3.9. *Tečná nadrovina* nadkvadriky $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ v regulárním bodě $X \in Q$ je polární nadrovina k X.

Věta 3.10. *Nadrovina τ v $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ je tečnou nadrovinou k nadkvadrice Q v regulárním bodě $X \in Q$ právě tehdy, když $\tau \subseteq Q$ nebo $\tau \cap Q$ je singulární kvadrika v τ se singulárním bodem X.*

Důkaz. Nechť τ je tečná nadrovina v bodě $X = [x]$, $\tau = \{[y] \mid f(x,y) = 0\}$. Pak $Q \cap \tau = \{[y] \in \tau \mid f(y,y) = 0\}$ a máme dvě možnosti – buď je zúžení f na aritmetický základ τ nulové, pak je $\tau \subseteq Q$, nebo nenulové, pak je $Q \cap \tau$ opět nadkvadrika a přímo podle definice je X její singulární bod Q. Opačný směr je analogický. □

Důsledek 3.11. *Přímka p je tečnou ke kuželosečce Q právě tehdy, když $p \subseteq Q$ nebo $p \cap Q$ je jednobodová množina (čítaje nevlastní body, viz případ osy paraboly nebo přímky mající směr asymptoty hyperboly).* □

Příklad. Najděte tečnu kuželosečky Q v bodě $X \in Q$.

$$Q\colon 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 16x_1 + 4x_2 - 28 = 0, \qquad X = [0;2]$$

Řešení. Daná kuželosečka je zadána v afinní rovině. Rozšíříme ji prvně na projektivní rovinu. V této rovině je bilineární forma kuželosečky $\overline{Q}$

$$f(x,y) = 8x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 8x_1y_0 + 8x_0y_1 + 2x_2y_0 + 2x_0y_2 - 28x_0y_0.$$

Bod X má homogenní souřadnice $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_0 = 1$. Jeho dosazením do $f(x,y)$ získáme rovnici tečny v homogenních souřadnicích:

$$12y_1 + 12y_2 - 24y_0 = 0.$$

V afinní rovině je tečnou vedenou bodem X ke kuželosečce Q přímka

$$y_1 + y_2 - 2 = 0. \qquad \diamond$$

Příklad. Bodem $X \notin Q$ veďte tečnu ke kuželosečce Q.

$$Q\colon 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x^2 - 2x_1 + 6x_2 - 3 = 0, \qquad X = [3;4]$$

Řešení. Kuželosečku Q zadanou v afinní rovině rozšíříme na kuželosečku $\overline{Q}$ v projektivní rovině. Příslušná bilineární forma pro $\overline{Q}$ je

$$f(x,y) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_0 - x_0y_1 + 3x_2y_0 + 3x_0y_2 - 3x_0y_0.$$

Nechť $T = (t_0, t_1, t_2)$ je bodem dotyku hledané tečny. Tedy $T \in Q$ a T a X jsou polárně sdružené. To vede na rovnice

$$\begin{aligned} 2t_1^2 - 4t_1t_2 + t_2^2 - 2t_1t_0 + 6t_2t_0 - 3t_0^2 &= 0 \\ -3t_1 + t_2 + 6t_0 &= 0 \end{aligned}$$

Dosazením $t_2 = 3t_1 + 6t_0$ do první rovnice dostaneme

$$-t_1^2 - 3t_0^2 + 4t_1 t_0 = 0.$$

Položíme $t_0 = 1$ a řešíme rovnici

$$-t_1^2 + 4t_1 - 3 = 0.$$

Řešení $t_1 = 3$ a 1 vede k bodům $T_1 = (1, 3, 3)$ a $T_2 = (1, 1, -3)$. Hledané tečny jsou potom

$$x_1 - 3 = 0 \qquad \text{a} \qquad 7x_1 - 2x_2 - 13 = 0. \qquad \diamond$$

3.3. Střed nadkvadriky v afinním prostoru

V tomto paragrafu budeme pracovat s nadkvadrikou Q v afinním prostoru $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ a s jejím projektivním rozšířením $\overline{Q}$ v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$. Body z $\overline{Q} \setminus Q$ nazýváme *nevlastní body* nadkvadriky Q. Obecně pak o bodech z $\nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$ budeme hovořit jako o *směrech*.

Definice 3.12. Bod $S \in \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ se nazývá *střed* nadkvadriky Q, jestliže je polárně sdružen se všemi nevlastními body.

Poznámka. Střed může být vlastní i nevlastní bod v $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$.

Následující věta říká, že vlastní střed má právě ty vlastnosti, které po středu v geometrii požadujeme.

Věta 3.13. *Bod $S \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ je středem nadkvadriky Q právě tehdy, když Q je středově souměrná podle S.*

Důkaz. Nechť $s \in \mathbb{C}^{n+1}$ je aritmetický zástupce středu nadkvadriky $S \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$. Potom pro všechny vektory v ze zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ platí $f(s, v) = 0$. Odtud dostáváme

$$f(s + tv, s + tv) = f(s, s) + 2f(s, v)t + f(v, v)t^2 = f(s, s) + f(v, v)t^2.$$

Tato rovnice v proměnné t má buď nekonečně mnoho řešení (oba koeficienty jsou nulové), žádně řešení (pouze kvadratický je nulový) nebo právě dvě řešení $t = \pm t_0$. V každém případě je množina řešení symetrická podle počátku a proto Q symetrická podle S.

** V opačném směru je potřeba ještě uvážit jednu možnost symetricky rozložených řešení, konkrétně jediné řešení $t = 0$, kdy lineární člen nemusí být nulový. Potom bude nulový kvadratický člen, tj. $f(v, v) = 0$. Protože je ale zúžení bilineární formy f na nevlastní podprostor $\operatorname{Dir} \mathcal{A}_n$ nenulové, existuje báze $(e_1, \ldots, e_n)$ taková, že $f(e_i, e_i) \neq 0$, jak se snadno ukáže. Podle předchozího tak musí platit $f(s, e_i) = 0$ a proto je S polárně sdružený s $[e_i]$ a tím pádem se všemi nevlastními body. $\square$

Výpočet středu. Chceme-li najít středy S nadkvadriky Q zadané v homogenních souřadnicích $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ bilineární symetrickou formou $f(x, x) = x^{\mathrm{T}} A x$, řešíme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{10}s_0 & + & a_{11}s_1 & + & \ldots & + & a_{1n}s_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n0}s_0 & + & a_{n1}s_1 & + & \ldots & + & a_{nn}s_n & = & 0 \end{array}$$

Ta vznikne ze vztahu $0 = f(x, s) = x^{\mathrm{T}} A s$ postupným dosazením $e_1, \ldots, e_n$ za x. Chceme-li najít vlastní střed, pokládáme $s_0 = 1$, ideálně pak převedeme členy $a_{i0}s_0$ na pravou stranu. (Pro výpočet nevlastního středu bychom položili $s_0 = 0$.)

Lemma 3.14. *Regulární nadkvadrika má právě jeden (vlastní nebo nevlastní) střed.*

Důkaz. To plyne buď z lemmatu o dimenzích polárních duálů (střed je polární duál nevlastní nadroviny, která má dimenzi $n-1$) nebo z předchozího popisu výpočtu. $\square$

Příklad. Najděte středy kuželosečky Q (vlastní i nevlastní).

$$Q\colon 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 + 12x_2 - 36 = 0$$

Řešení. Bilineární forma pro kuželosečku Q je

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_1y_0 + 3x_0y_1 + 6x_2y_0 + 6x_0y_2 - 36x_0y_0.$$

Rovnice pro střed $S = (y_0, y_1, y_2)$ jsou

$$\begin{aligned} 2y_2 + 3y_0 &= 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + 6y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Pro $y_0 = 1$ dostaneme jediné řešení $S = (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 1)$. Pro $y_0 = 0$ dostame $y_1 = y_2 = 0$, což nedává v projektivní rovině žádný bod. Daná kuželosečka má tedy vlastní střed $S = [-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}]$ a nemá žádný nevlastní střed. $\diamond$

Příklad. Najděte středy kvadriky Q (vlastní i nevlastní).

$$Q\colon x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3 - 2 = 0$$

Řešení. Bilineární forma pro kvadriku Q je

$$2f(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - x_3y_0 - x_0y_3 - 4x_0y_0.$$

Soustava rovnic pro střed $S = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ je

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2y_1 & + & y_2 & & & = & 0 \\ y_1 & + & 4y_2 & & & = & 0 \\ & & & & -y_0 & = & 0 \end{array}$$

Tato soustava nemá řešení pro $y_0 \neq 0$. Pro $y_0 = 0$ má řešení $(0,0,0,t)$. Tedy daná kvadrika nemá vlastní střed a má jeden nevlastní střed o homogenních souřadnicích $(0,0,0,1)$. $\diamond$

3.4. Eukleidovský afinní prostor

Řekneme, že afinní prostor $\mathcal{S}$ je *Eukleidovský*, jestliže je na $\operatorname{Dir}\mathcal{S}$ zadán skalární součin. Standardní Eukleidovský prostor $\mathcal{E}_n$ dimenze n je standardní afinní prostor $\mathcal{A}_n$ vybavený stadardním skalárním součinem

$$\langle (0, x_1, \dots, x_n), (0, y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Skalární součin bodů nebudeme uvažovat, protože geometricky nedává smysl.

V této části budeme nadkvadriky uvažovat v komplexním rozšíření $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ a v jeho projektivním rozšíření $\overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$. Tyto nadkvadriky budeme popisovat nyní pouze v souřadnicích reálných ortonormálních bází $(O, e_1, \dots, e_n)$ v $\mathcal{E}_n$. To znamená, že $O \in \mathcal{E}_n$ a $(e_1, \dots, e_n)$ tvoří ortonormální bázi $\operatorname{Dir}\mathcal{E}_n$.

Říkáme, že směry $[u]$ a $[v]$ jsou *kolmé*, jestliže $u \perp v$. Jak již bylo řečeno, kolmost vlastních bodů nedává geometricky smysl.

3.5. Hlavní směry

Směr $[u]$ zadaný reálným vektorem $u \in \operatorname{Dir} \mathcal{E}_n$ se nazývá *hlavní směr* nadkvadriky Q, jestliže všechny k němu kolmé směry v $\operatorname{Dir} \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ jsou s ním polárně sdružené.

Jinými slovy: Je-li nadkvadrika Q popsána bilineární formou f, pak pro všechny $v \in \operatorname{Dir} \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$, $u \perp v$ platí

$$f(u, v) = 0.$$

Nechť $(O, e_1, \dots, e_n)$ je nějaká ortonormální báze v $\mathcal{E}_n$. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$ je matice bilineární formy f na $\mathbb{R}^{n+1}$. Nechť $\widetilde{A}$ je matice bilineární formy f zúžené na $\operatorname{Dir} \mathcal{E}_n$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$, tj. $\widetilde{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Věta 3.15. *Nenulový vektor $u \in \operatorname{Dir} \mathcal{E}_n$ určuje hlavní směr nadkvadriky Q právě tehdy, když je vlastním vektorem lineárního zobrazení zadaného maticí $\widetilde{A}$.*

Důkaz. Lineární zobrazení $\operatorname{Dir} \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}} \to \operatorname{Dir} \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ zadané maticí $\widetilde{A}$ označme opět $\widetilde{A}$. Nechť $u \neq 0$ určuje hlavní směr. Potom

$$0 = f(u, v) = \langle \widetilde{A}u, v \rangle$$

pro všechna $u \perp v$. Proto $\widetilde{A}u \in (u^{\perp})^{\perp} = [u]$, tj. $\widetilde{A}u = \lambda u$.

Nechť obráceně $u \neq 0$ je vlastním vektorem zobrazení $\widetilde{A}$, tj. $\widetilde{A}u = \lambda u$. Pro všechna $u \perp v$ pak platí

$$f(u, v) = \langle \widetilde{A}u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = 0.$$

Tedy u určuje hlavní směr. □

Z důkazu je zároveň vidět, že pro normovaný vektor u zadávající hlavní směr platí $f(u, u) = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda$. V ortonormální bázi složené z vlastních vektorů tedy bude $\widetilde{A}$ diagonální s vlastními čísly na diagonále (to by nebyla pravda bez normovanosti!).

Důsledek 3.16. *Ke každé nadkvadrice Q v $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ existuje ortonormální báze v $\operatorname{Dir} \mathcal{E}_n$, jejíž vektory určují hlavní směry nadkvadriky Q.*

Důkaz. K symetrické reálné matici $\widetilde{A}$ existuje ortonormální báze tvořená reálnými vlastními vektory. □

Definice 3.17. Vlastní čísla matice $\widetilde{A}$ se nazývají *hlavní čísla* nadkvadriky Q. Tato čísla nejsou určena jednoznačně, ale pouze až na společný násobek, je tedy jednoznačný jejich poměr $(\lambda_1 : \cdots : \lambda_n)$, který lze chápat jako prvek projektivního prostoru $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (protože vlastní čísla symetrických matic jsou reálná).

3.6. Nadkvadriky a symetrie

Již dříve jsme podali definici středu nadkvadriky v afinním prostoru. K této definici jsme nepotřebovali skalární součin. O symetrii nadkvadriky vzhledem k nadrovině však můžeme mluvit pouze tehdy, když máme na zaměření afinního prostoru zadán skalární součin.

Definice 3.18. Nadrovina τ v $\mathcal{E}_n$ se nazývá *hlavní nadrovinou* nadkvadriky Q, jestliže je buď

- polární nadrovinou k regulárnímu hlavnímu směru nadkvadriky $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$ nebo
- kolmou nadrovinou k singulárnímu hlavnímu směru nadkvadriky $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$.

Osová nadrovina pro $n = 2$ se nazývá *osová přímka* nebo *osa*.

Poznamenejme, že i v prvním případě je hlavní nadrovina kolmá k danému hlavnímu směru $[u]$ – ten je totiž polárně sdružen s $[u]^\perp$ a to je tedy zaměření této hlavní nadroviny.

Poznámka. V dalším ukážeme, že hlavní nadroviny Q jsou *osovými nadrovinami* Q; obrácené tvrzení platí až na drobnou výjimku také a nebudeme proto mezi těmito pojmy rozlišovat.

Příklad. Uvažujme parabolu $x_1^2+2x_2 = 0$ ve standardní ortonormální bázi v $\mathbb{R}^2 = \mathcal{E}_2$. Matice A je

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matice $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla 1 a 0 s vlastními vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Ty určují hlavní směry a jsou regulárními nevlastními body o homogenních souřadnicích $(0 : 1 : 0)$ a $(0 : 0 : 1)$. Polára k $(0 : 1 : 0)$ v $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$ je dána rovnicí

$$x_1 = 0.$$

Polára k $(0 : 0 : 1)$ v $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$ je dána rovnicí

$$x_0 = 0.$$

Tedy v $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$ má parabola pouze jedinou osovou přímku

$$x_1 = 0.$$

Příklad. Uvažujme dvojici reálných rovnoběžek

$$x_1^2 - 1 = 0$$

ve standardní ortonormální bázi $\mathbb{R} = \mathcal{E}_2$. Matice

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice $\widetilde{A}$ jsou 1 a 0 s vlastními vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Ty určují 2 hlavní směry o homogenních souřadnicích $(0 : 1 : 0)$ a $(0 : 0 : 1)$. $(0 : 1 : 0)$ je regulární nevlastní bod. Polára k němu je

$$x_1 = 0.$$

$(0 : 0 : 1)$ je singulární nevlastní bod. Všechny přímky kolmé na $(0, 1)$ v $\mathcal{E}_2$ jsou $x_2 = c$, kde c je nějaká konstanta. Daná kuželosečka má tedy osové přímky $x_1 = 0$ a $x_2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Věta 3.19. *Nechť τ je hlavní nadrovina Q v $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$. Pak je Q symetrická podle τ.*

Důkaz. Nechť τ je osová nadrovina v $\mathcal{E}_n$ k hlavnímu směru $[u]$ a nechť $S \in \tau$. Potom $[s+tu] \in Q$, právě když

$$0 = f(s + tu, s + tu) = f(s, s) + 2f(s, u)t + f(u, u)t^2 = f(s, s) + f(u, u)t^2$$

a opět kořeny tohoto polynomu v proměnné t jsou symetricky rozložené okolo 0, tedy Q je symetrická podle τ. □

Definice 3.20. Průsečnice dvou osových rovin kvadriky Q se nazývá *osová přímka* nebo *osa* kvadriky Q. Body průniku osové přímky s kvadrikou se nazývají *vrcholy*.

3.7. Metrická klasifikace kuželoseček a kvadrik

Klasifikaci provedeme indukcí. Předpokládejme prvně, že existuje singulární směr a označme jej $[e_n]$, kde e_n je normovaný. Zvolme libovolnou vlastní nadrovinu τ kolmou na e_n; podle klasifikace v dimenzi $n-1$ existuje ortonormální afinní báze $(V, e_1, \ldots, e_{n-1})$, v níž má $Q \cap \tau$ kanonický tvar. Doplňme tuto bázi vektorem e_n do ortonormální afinní báze $\mathcal{A}_n$ a zkoumejme matici nadkvadriky v této bázi. Protože byl $[e_n]$ singulární, je tato stejná jako pro $Q \cap \tau$, pouze doplněná nulovým řádkem a nulovým sloupcem. Zejména, rovnice Q je totožná s rovnicí $Q \cap \tau$. Budeme tedy v dalším předpokládat, že žádný singulární směr neexistuje.

Poznamenejme ještě krátce, že v případě singulárního vlastního bodu je celá nadkvadrika kuželem a klasifikace se redukuje na (metrickou) projektivní klasifikaci nadkvadrik.

Nechť je nejdříve Q středová a zvolme střed S za počátek. Dále zvolme ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ zaměření $\operatorname{Dir} \mathcal{E}_n$ složenou z vektorů reprezentujících hlavní směry. To je možné díky ortonormální diagonalizovatelnosti symetrických bilineárních forem. V bázi $(S, e_1, \ldots, e_n)$ má Q matici

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_n \end{array}\right),$$

jelikož platí: $f(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, protože jsou $[e_i]$ hlavní směry; $f(S, e_i) = 0$, protože je S střed. Ve skutečnosti je $a_{ii} = f(e_i, e_i) = \langle \widetilde{A} e_i, e_i \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_i \rangle = \lambda_i$, protože $|e_i| = 1$, a $a_{00} = f(S, S)$.

V nestředovém případě se stačí omezit na regulární nadkvadriky, protože vlastní singulární bod by byl tím spíše vlastním středem. Díky regularitě je $(\nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}))^{\pitchfork}$ nularozměrný, označme jeho jediný bod $[e_n]$ a předpokládejme opět e_n normovaný. Zkoumejme nyní kolmý doplněk $[e_n]^{\perp} \subseteq \nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$. To je projektivní podprostor dimenze $n-2$ a proto má jeho polární doplněk dimenzi 1, přičemž průnik tohoto doplňku s $[e_n]^{\pitchfork} = \nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$ je $([e_n]^{\perp} + [e_n])^{\pitchfork} = (\nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}))^{\pitchfork} = [e_n]$, takže doplněk obsahuje krom $[e_n]$ ještě vlastní přímku o, tzv. *osu* nadkvadriky Q. Protože není o tečná k $[e_n]$ (neleží v $[e_n]^{\pitchfork} = \nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$), je průnik $Q \cap o$ regulární a obsahuje tedy krom $[e_n]$ i druhý bod V, nutně vlastní, který zvolíme za počátek. Zvolíme libovolnou ortonormální bázi zaměření složenou z vektorů zadávajících hlavní směry, přičemž e_n bude aritmetický zástupce středu (hlavního směru příslušného hlavnímu číslu 0). Nadkvadrika Q pak bude mít matici

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & \cdots & & 0 & p \\ \hline 0 & \lambda_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ p & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Z výpočetního hlediska je dobré si zapamatovat, že i v singulárním případě se regulární střed dostane jako střed kolmý na všechny singulární směry. Osa je pak přímka mající směr tohoto regulárního středu polárně sdružená se všemi hlavními směry odpovídajícími nenulovým hlavním číslům (stačí spočítat jediný takový bod, protože směr již známe).

Dostáváme tak následující klasifikační větu.

Věta 3.21. *Pro každou nadkvadriku Q v $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ lze najít takovou ortonormální bázi $(O, e_1, \ldots, e_n)$, že v jejích souřadnicích má Q právě jednu z rovnic* *(a) pro* $n = 1, 2, 3$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + 1 = 0 \qquad \textit{dvojice imaginárních bodů/přímek/rovin}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \textit{dvojice reálných bodů/přímek/rovin}$$

a následující kužel

$$x_1^2 = 0 \qquad \textit{dvojnásobný bod/přímka/rovina}$$

(b) pro $n = 2, 3$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 1 = 0 \qquad \textit{imaginární elipsa/imaginární eliptický válec}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \textit{reálná elipsa/reálný eliptický válec}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \textit{hyperbola/hyperbolický válec}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + 2x_2 = 0 \qquad \textit{parabola/parabolický válec}$$

a následující kužele

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 = 0 \qquad \textit{imaginární různoběžné přímky/roviny}$$

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 = 0 \qquad \textit{reálné různoběžné přímky/roviny}$$

(c) pro $n = 3$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 + 1 = 0 \qquad \textit{imaginární elipsoid}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \textit{reálný elipsoid}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 + 1 = 0 \qquad \textit{dvoudílný (nepřímkový) hyperboloid}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \textit{jednodílný (přímkový) hyperboloid}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 2x_3 = 0 \qquad \textit{eliptický paraboloid}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 2x_3 = 0 \qquad \textit{hyperbolický paraboloid}$$

a následující kužele

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 = 0 \qquad \textit{imaginární kuželová plocha}$$

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 = 0 \qquad \textit{reálná kuželová plocha}$$

Pro koeficienty platí $a_i > 0$, $\alpha_i > 0$, *přičemž koeficienty* α_i *jsou určeny až na násobek; jinými* *slovy, hraje roli pouze poměr* $(\alpha_1 : \cdots : \alpha_n)$.

Příklad. Najděte hlavní směry, osové rovin, osové přímky, vrcholy a kanonickou rovnici ve vhodné bázi kvadriky

$$x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 + 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 - 16 = 0.$$

Řešení. Matice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla λ_1, λ_2, λ_3 matice $\widetilde{A}$ jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\widetilde{A} - \lambda E) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 16\lambda + 32.$$

Tyto kořeny, pokud jsou celočíselné, musí dělit absolutní člen 32. Tak zjistíme, že

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 4, \qquad \lambda_3 = -4.$$

Odpovídající vlastní vektory u_i jsou řešeními soustavy $(\widetilde{A} - \lambda_i E)u_i = 0$. Dostáváme $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ a $u_3 = (0, 1, 0)$. Osové roviny má kvadrika 3 a jsou to roviny polární k u_1, u_2 a u_3.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Osové přímky jsou opět tři a jejich popis je dán výběrem 2 z předchozích 3 rovnic. Průnik všech tří osových rovin je jediný bod $S = (1, 2, -1)$. Ten je středem kvadriky. Parametrické vyjádření os je potom následující:

$$\begin{aligned} o_1 &: (1, 2, -1) + t(0, 1, 0) \\ o_2 &: (1, 2, -1) + t(1, 0, 1) \\ o_3 &: (1, 2, -1) + t(1, 0, -1) \end{aligned}$$

Z parametrického vyjádření osy o_1 dosadíme do rovnice kvadriky a pro parametr t dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 - 1 = 0$. Vrcholy na ose t_1 jsou tedy $A = (1, 3, -1)$ a $B = (1, 1, -1)$.

Z parametrického vyjádření osy o_2 dostaneme kvadratickou rovnici $2t^2 + 1 = 0$. Na o_2 tedy leží dva komplexně sdružené vrcholy $E = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i, 2, -1 + \frac{\sqrt{2}}{i})$, $\overline{E} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i, 2, -1 - \frac{\sqrt{2}}{i})$.

Konečně pro osu o_3 dostaneme opět rovnici $t^2 - 1 = 0$, která dává vrcholy $C = (2, 2, -2)$ a $D = (0, 2, 0)$.

Z popisu os a reálných vrcholů vyplývá, že daná kvadrika je jednodílný hyperboloid. V bázi S, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $v_3 = u_3$ budeme mít souřadnice y_1, y_2, y_3, pro které platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tedy v homogenních souřadnicích

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Tedy rovnice kvadriky v souřadnicích y je

$$yP^{\mathrm{T}}APy = 0,$$

kde

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} -16 & 2 & 8 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{\mathrm{T}}AP = \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Rovnice v nových souřadnicích je

$$-2y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 + 4 = 0. \qquad \diamond$$

Kontrolní otázky

1. Podejte definici hlavních směrů a vysvětlete, kterou větu použijete k jejich výpočtu.
2. Jak se liší hlavní čísla regulárních kvadrik?
3. Kolik osových (hlavních) rovin mají jednotlivé kvadriky? (Použijte jejich metrickou klasifikaci.)
4. Napište kanonické rovnice kvadrik s 1, 2, 4, 6 a nekonečně mnoha reálnými vrcholy.
5. Zvolte si nějakou kvadriku a popište všechny její symetrie.

Příklady k procvičení

1. Určete hlavní čísla a hlavní směry nadkvadriky, její střed a její kanonickou rovnici v příslušné ortonormální bázi.
   (a) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0$ v $\mathcal{E}_2$

   [Řešení: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $S = [2; -1]$, hyperbola $x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 1$]

   (b) $7x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 + 28x_1 + 12x_2 + 28 = 0$ v $\mathcal{E}_2$

   [Řešení: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, $u_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$, $S = [-2; 0]$, různoběžky $x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 0$]

(c) $9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 24x_1 - 16x_2 + 3 = 0$ v $\mathcal{E}_2$

[Řešení: $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 0$, $u_1 = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$, $u_2 = (\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$, $S = [2t; 3-2t]$, rovnoběžky $x_1^2 = 1$]

(d) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 9 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$, $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $S = [1; -1; 1]$, reálná kuželová plocha $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - \frac{x_3^2}{3} = 0$]

(e) $5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 - 27 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_{1,2} = 9$, $\lambda_3 = 0$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $u_2 = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$, $u_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $S = [0; 0; 0]$, reálná eliptická válcová plocha $\frac{x_1^2}{3} + \frac{x_2^2}{3} = 1$]

(f) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_{1,2} = -3$, $\lambda_3 = 6$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$, $u_2 = (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})$, $u_3 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $S = [1; 1; -1]$, reálná kuželová plocha $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_3^2 = 0$.]

(g) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $S = [t; 2; t]$, reálná eliptická válcová plocha $x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} = 1$.]

(h) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 2\sqrt{2}x_3 - 8 = 0$ v $\mathcal{E}_3$

[Řešení: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 0$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$, nestředová, parabolická válcová plocha $x_1^2 + 2x_3 = 0$.]

2. Určete osové nadroviny a vrcholy nadkvadrik z příkladu (1).

[Řešení:

(a) Osy $o_1\colon x_1 + x_2 = 1$, $o_2\colon x_1 - x_2 = 3$, vrcholy $V_{1,2} = [2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}; -1 \mp \frac{3}{\sqrt{2}}]$ příslušné k o_1, $V_{3,4} = [2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}; -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}]$ příslušné k o_2;

(b) Osy $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 - 3x_2 = -2$, vrcholy $V_1 = [-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}]$ k o_1, $V_2 = [-2; 0]$ k o_2;

(c) Osa $3x_1 + 2x_2 = 4$, nevlastní vrchol určený zaměřením osy (-2,3,0);

(d) Osové roviny $\sigma_1\colon x_1 - x_2 + x_3 = 3$, $\sigma_2\colon x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, $\sigma_3\colon x_1 + x_2 = 0$, 6 os zadaných průniky vždy dvou rovin, vrchol $V = [1; -1; 1]$;

(e) Osové roviny $2x_1 - x_2 - 2x_3 = p$ pro $\forall p \in \mathbb{R}$, dále všechny roviny obsahující osu $o\colon x_1 + 2x_2 = 0, 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$, další osy jsou přímky na tuto osu kolmé, vrcholy jsou všechny body kvadriky;

(f) Osové roviny $\sigma\colon 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$, dále všechny roviny procházející osou $o\colon x_1 - x_2 = -3, 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1$, vrchol $V = [1; -1; 1]$;

(g) Osové roviny $\sigma_1\colon x_1 - 2x_2 - x_3 = -2$, $\sigma_2\colon x_1 + x_2 - x_3 = 1$, osa daná průnikem rovin a nevlastní vrchol určený jejím zaměřením (1,0,1,0);

(h) Osová rovina $x_1 = x_2$.]

4. Mooreova–Penroseova pseudoinverze

4.1. Pseudoinverze

Nechť $\varphi\colon U \to V$ je lineární zobrazení mezi Eukleidovskými prostory. Zabývejme se otázkou, zda existuje inverzní zobrazení a v případě, že neexistuje, otázkou, jak blízko se k inverzi můžeme přiblížit. Nechť tedy $\psi\colon V \to U$ je libovolné zobrazení a zkoumejme složení $\psi\varphi$ a $\varphi\psi$. Zřejmě je $\psi\varphi = 0$ na $\ker\varphi$ a nejlepší, co můžeme očekávat, je, že bude toto složení rovno identitě na nějakém doplňku $\ker\varphi$. Symetricky můžeme očekávat $\varphi\psi = \mathrm{id}$ pouze na nějakém doplňku $\ker\psi$.

Definice 4.1. Lineární zobrazení $\psi\colon V \to U$ se nazývá *Mooreova–Penroseova pseudoinverze* lineárního zobrazení $\varphi\colon U \to V$, jestliže

- $\psi\varphi = \mathrm{id}$ na $(\ker\varphi)^\perp$ a
- $\varphi\psi = \mathrm{id}$ na $(\ker\psi)^\perp$.

Protože na $\ker\varphi$ je vždy $\psi\varphi = 0$, je první podmínka ekvivalentní tomu, že $\psi\varphi$ je kolmá projekce na $(\ker\varphi)^\perp$.

Lemma 4.2. *Pro Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi platí* $\operatorname{im}\varphi = (\ker\psi)^\perp$.

Důkaz. Podle druhé podmínky z definice platí $(\ker\psi)^\perp \subseteq \operatorname{im}\varphi$, ukážeme nyní opačnou inkluzi. Prvně si uvědomme, že platí $\varphi\psi\varphi = \varphi$ – na $\ker\varphi$ jsou obě strany nulové a na $(\ker\varphi)^\perp$ to plyne z první podmínky. Jinými slovy tato rovnost znamená, že $\varphi\psi = \mathrm{id}$ na $\operatorname{im}\varphi$. Zároveň je však kompozice $\varphi\psi$ projekce, musí tedy nutně $\operatorname{im}\varphi$ ležet v jejím obraze $(\ker\psi)^\perp$. □

Symbolicky budeme situaci z předchozí definice/lemmatu znázorňovat diagramem

$$\begin{array}{ccc} (\ker\varphi)^\perp & \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\cong}}}} & \operatorname{im}\varphi \\ \oplus & & \oplus \\ \ker\varphi & & (\operatorname{im}\varphi)^\perp \end{array}$$

kde fakt, že ψ je naznačené jako zobrazení $\operatorname{im}\varphi \to (\ker\varphi)^\perp$ značí, že je nulové na komplementu $(\operatorname{im}\varphi)^\perp$ a jeho komponenta v $\ker\varphi$ je taktéž nulová. Značka $\cong$ uprostřed značí, že jakožto zobrazení mezi $(\ker\varphi)^\perp$ a $\operatorname{im}\varphi$ jsou φ a ψ vzájemně inverzní izomorfismy.

S výhodou lze předchozí situaci vyjádřit pomocí blokových matic. Pokud zvolíme v U bázi tak, že vektory ze začátku tvoří bázi $(\ker\varphi)^\perp$, zatímco vektory z konce tvoří bázi $\ker\varphi$ a analogicky pro V a podprostory $\operatorname{im}\varphi$, $(\operatorname{im}\varphi)^\perp$, lze matice φ a ψ psát v blokovém tvaru

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

U první matice dva nulové bloky napravo značí, že $\varphi|_{\ker\varphi} = 0$, zatímco dva nulové bloky dole značí, že komponenta φ v $(\operatorname{im}\varphi)^\perp$ je nulová.

Zřejmě také naopak v situaci z předchozího diagramu je $(\operatorname{im}\varphi)^\perp = \ker\psi$ a ψ je Mooreovou–Penroseovou pseudoinverzí φ. Protože inverze izomorfismu $\varphi\colon (\ker\varphi)^\perp \to \operatorname{im}\varphi$ existuje jediná, dostáváme jednoduše následující tvrzení.

Tvrzení 4.3. *Nechť $\varphi\colon U \to V$ je lineární zobrazení mezi Eukleidovskými prostory (konečné dimenze). Potom Mooreova–Penroseova pseudoinverze existuje a je jediná. Značíme ji φ^+.* □

Tradičně se Mooreova–Penroseova pseudoinverze definuje pomocí singulárního rozkladu (singular value decomposition). Tento přístup je výhodný i z dalších důvodů. Uvažujme proto adjungované zobrazení $\varphi^* \colon V \to U$.

Lemma 4.4. *Zobrazení $\varphi^*\varphi$ je samoadjungované a platí $\langle \varphi^*\varphi(u), u\rangle \geq 0$ (říkáme, že $\varphi^*\varphi$ je pozitivně semidefinitní). Navíc* $\ker(\varphi^*\varphi) = \ker\varphi$.

Důkaz. Z definice adjungovaného zobrazení platí

$$\langle \varphi^*\varphi(u), v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, \varphi^*\varphi(v)\rangle$$

a navíc prostřední člen je pro $u = v$ nezáporný.

Inkluze $\ker(\varphi^*\varphi) \supseteq \ker\varphi$ je zřejmá. Je-li naopak $\varphi^*\varphi(u) = 0$, pak také $0 = \langle \varphi^*\varphi(u), u\rangle = |\varphi(u)|^2$ a proto $\varphi(u) = 0$, tedy $u \in \ker\varphi$. $\square$

Podle tohoto lemmatu existuje na U ortonormální báze $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ složená z vlastních vektorů $\varphi^*\varphi$ a můžeme ji zvolit tak, že

$$[u_{r+1}, \dots, u_m] = \ker(\varphi^*\varphi) = \ker\varphi$$

a tím pádem

$$[u_1, \dots, u_r] = (\ker\varphi)^\perp.$$

Nechť vlastní čísla příslušná $u_1, \dots, u_m$ jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Podle naší volby $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_m = 0$ a zbylá λ_i jsou nenulová. Stále podle předchozího lemmatu platí

$$\lambda_i = \langle \lambda_i u_i, u_i\rangle = \langle \varphi^*\varphi(u_i), u_i\rangle \geq 0$$

Zkonstruujme nyní vhodnou ortonormální bázi V, vzhledem k níž bude mít φ co nejjednodušší tvar. Prvně se zabývejme obrazem φ, který je generován $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)$:

$$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j)\rangle = \langle \varphi^*\varphi(u_i), u_j\rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Jsou tedy vektory $\varphi(u_i)$ navzájem kolmé o velikostech

$$|\varphi(u_i)| = \sqrt{\lambda_i} = s_i.$$

Tato čísla nazýváme *singulární hodnoty* zobrazení φ. Položíme

$$v_i = \tfrac{1}{s_i}\varphi(u_i)$$

pro $i = 1, \dots, r$ a doplníme $v_1, \dots, v_r$ do ortonormální báze $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ prostoru V.

Vzhledem k těmto bázím má φ matici

$$(\varphi)_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & s_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

(tato matice má rozměry $m \times n$). Poznamenejme, že matice adjungovaného zobrazení φ^* je „stejná“, akorát má rozměry $n \times m$. V těchto bázích je také extrémně jednoduché napsat Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi

$$(\varphi^+)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (s_1)^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & (s_r)^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Tímto souřadnicovým zápisem se často Mooreova–Penroseova pseudoinverze definuje. Elegantně to lze provést následující úvahou. Pracujme pro jednoduchost ve standardních Eukleidovských prostorech a místo φ pracujme s maticí M. Ve výše popsaných bázích α, β má M diagonální matici, označme ji Σ. To znamená, že lze psát

$$M = P\Sigma Q^*,$$

kde P, Q jsou ortogonální matice. Tomuto rozkladu matice M se říká *singulární rozklad*. Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi potom můžeme spočítat jako $M^+ = Q\Sigma^+ P^*$, kde Σ^+ vznikne (tak jako výše) z diagonální matice Σ inverzí všech nenulových prvků.

Poznamenejme ještě, že z matice $(\varphi)_{\beta\alpha}$ lze také odvodit geometrický význam singulárních hodnot. Uvážíme-li v U jednotkovou sféru, pak její obraz při zobrazení φ je (v některých směrech možná zdegenerovaný) elipsoid, jehož délky poloos jsou právě singulární hodnoty.

Tvrzení 4.5. *Platí následující vztahy*

- *Je-li φ injektivní, potom $\varphi^+ = (\varphi^*\varphi)^{-1}\varphi^*$.*
- *Je-li φ surjektivní, potom $\varphi^+ = \varphi^*(\varphi\varphi^*)^{-1}$.*

Důkaz. V bázích α, β jsou všechny uvažované matice diagonální. V případě injektivního φ má $\varphi^*\varphi$ na diagonále pouze čísla s_i^2. Proto $(\varphi^*\varphi)^{-1}$ existuje a má na diagonále čísla s_i^{-2} a tím pádem pravá strana má na diagonále prvky s_i^{-1}. Týž diagonální tvar levé strany jsme odvodili před tvrzením. Podobná analýza funguje v případě surjektivního φ. $\square$

cv *Poznámka.* Je-li $U = V \oplus W$, má každý vektor $u \in U$ jednoznačné vyjádření $u = v + w$, kde $v \in V$ a $w \in W$. Označme $v = p(u)$ a dostáváme tak lineární zobrazení $p\colon U \to U$ (s hodnotami ve V), kterému říkáme *projekce* na V ve směru W.

Uveďme nyní ještě dvě alternativní charakterizace. Lineární zobrazení $p\colon U \to U$ je projekce na V ve směru W, právě když $p|_V = \mathrm{id}$ a $p|_W = 0$. Lineární zobrazení $p\colon U \to U$ je projekce, právě když $p \circ p = p$; v takovém případě se jedná o projekci na $\operatorname{im} p$ ve směru $\ker p$.

Ukažte, že projekce je samoadjungovaná, právě když je kolmá[3].

Věta 4.6. *Platí*

1. $\varphi\varphi^+\varphi = \varphi$
2. $\varphi^+\varphi\varphi^+ = \varphi^+$

[3] Podle definice je projekce p samoadjungovaná, právě když $\langle u, p(v)\rangle = \langle p(u), v\rangle$. Tato podmínka je triviálně splněná pro $u, v \in \ker p$ a $u, v \in \operatorname{im} p$. Pro $u \in \ker p$, $v \in \operatorname{im} p$ tato podmínka je $\langle u, v\rangle = 0$, tedy právě $\ker p \perp \operatorname{im} p$. Zbylý případ $u \in \operatorname{im} p$, $v \in \ker p$ je symetrický.

3. $\varphi^+\varphi$ *je samoadjungované*

4. $\varphi\varphi^+$ *je samoadjungované*

Naopak každé zobrazení ψ *splňující tyto čtyři vztahy s* φ^+ *nahrazeným* ψ *je Mooreovou–Penroseovou pseudoinverzí k* φ*, tj.* $\psi = \varphi^+$*.*

Důkaz. Je jednoduché ověřit vztahy z tvrzení pro Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi; vlastnosti (3) a (4) platí proto, že příslušné kompozice jsou kolmé projekce na podprostory $\operatorname{im}\varphi$ a $(\ker\varphi)^\perp$. V tomto i opačném směru je podstatné si uvědomit, že projekce je samoadjungovaná, právě když je kolmá.

Podle (1) a (3) je $\varphi^+\varphi$ samoadjungovaná projekce (neboť $(\varphi^+\varphi)^2 = \varphi^+\varphi$) ve směru $\ker(\varphi^+\varphi) = \ker\varphi$ (neboť $\ker\varphi \subseteq \ker(\varphi^+\varphi) \subseteq \ker(\varphi\varphi^+\varphi) = \ker\varphi$), nutně tedy kolmá. Proto je jejím obrazem $(\ker\varphi)^\perp$ a φ^+ tedy splňuje první definiční vztah. Druhý se dokáže symetricky.

Téměř v jakékoliv knize pojednávající o Mooreově–Penroseově pseudoinverzi lze najít alternativní důkaz hrubou silou. □

4.2. Aproximace řešení soustavy lineárních rovnic

Zabývejme se soustavou lineárních rovnic $Ax = v$. Pokud je matice A čtvercová a invertibilní, lze formálně tuto soustavu vyřešit vynásobením inverzí A^{-1},

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}v.$$

V případě, že A nemá inverzi nebo dokonce není ani čtvercová, lze stále něco říct o řešeních pomocí Mooreovy–Penroseovy pseudoinverze.

Tvrzení 4.7. *Soustava* $Ax = v$ *má řešení, právě když*

$$AA^+v = v$$

Důkaz. Pokud platí $AA^+v = v$, pak zřejmě A^+v je řešením. Naopak, pokud $Ax = v$ pro nějaké x, potom

$$AA^+v = AA^+Ax = Ax = v.$$

Jiný důkaz spočívá v tom, že AA^+ je projekce na $\operatorname{im} A$, a proto rovnost $AA^+v = v$ je ekvivalentní tomu, že $v \in \operatorname{im} A$, což je zřejmě to samé, že soustava má řešení. □

Vidíme tedy, že i v případě, že A nemá inverzi, nebo dokonce není ani čtvercová, můžeme nějaké její řešení (v případě, že existuje) najít jako A^+v. V následujícím ukážeme, jaký geometrický význam toto řešení má. Obecněji se budeme zabývat otázkou geometrického významu A^+v i v případě, kdy soustava $Ax = v$ nemá řešení.

Řekneme, že x je *nejlepší aproximace řešení*, jestliže minimalizuje výraz $|Ax-v|$, tj. pokud pro libovolné y platí

$$|Ax - v| \leq |Ay - v|$$

Zřejmě je tedy Ax bod $\operatorname{im} A$, který je nejblíž v, je to tedy kolmá projekce vektoru v do podprostoru $\operatorname{im} A$. Tu umíme podle předchozího napsat pomocí pseudoinverze jako AA^+v. Platí tedy

Lemma 4.8. *Vektor* x *je nejlepší aproximací řešení soustavy* $Ax = v$*, právě když platí*

$$Ax = AA^+v.$$

Zejména tedy A^+v je nejlepší aproximace řešení. Obecně je takových nejlepších aproximací víc. Mezi nimi lze A^+v charakterizovat pomocí následující věty

Věta 4.9. *Vektor A^+v je nejlepší aproximace řešení soustavy $Ax = v$ s nejmenší normou, „zkráceně“ nejmenší nejlepší aproximace řešení.*

Důkaz. Množina nejlepších aproximací je právě množinou řešení soustavy

$$Ax = AA^+v$$

a jedná se tedy o afinní podprostor se zaměřením $\ker A$. Vektor z tohoto afinního podprostoru s nejmenší normou je tedy jediný a to právě ten, který je kolmý na zaměření $\ker A$. Přitom ale $A^+v \in \operatorname{im} A^+ = (\ker A)^\perp$. □

Příklad (Aproximace přímkou)**.** Nechť jsou v rovině dány body $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Úkolem je vést těmito body přímku. Pokud by to bylo možné přesně, existovaly by a, b (koeficienty v rovnici přímky $a + bx = y$) takové, že

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot x_1 &= y_1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a \cdot 1 + b \cdot x_n &= y_n \end{aligned}$$

Naším úkolem je tedy vyřešit soustavu (vzhledem k neznámým a, b) s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{array}\right)$$

Její nejmenší nejlepší aproximace řešení je

$$(a, b)^T = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Přímka s rovnicí $y = a + bx$ se nazývá aproximací přímkou zadané n-tice bodů. Je potřeba však vysvětlit, v jakém smyslu je to nejoptimálnější odpověď na naší otázku proložení přímky zadanými body. Tato přímka minimalizuje

$$\sum_{i=1}^{n} \big((a + bx_i) - y_i\big)^2,$$

tedy součet čtverců odchylek funkčních hodnot $a + bx_i$ od zadaných y_i. Tato aproximace se používá, pokud víme, že zadané hodnoty y_i můžou být zatíženy chybou, ale x_i jsou naměřeny přesně.

4.3. Kolmá projekce do podprostoru

Nechť $V = [v_1, \dots, v_k] \subseteq U$ je podprostor. Kolmá projekce vektoru u do V je takový vektor $P(u) = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k$, který je nejblíž k u. Jedná se tedy o nejlepší aproximaci řešení soustavy $x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = u$. Označíme-li $A = (v_1 \cdots v_k)$ matici na levé straně, dostáváme z předchozího formulku $(x_1 \cdots x_k)^{\mathrm{T}} = A^+ u$ a tedy

$$P(u) = (v_1 \cdots v_k)(x_1 \cdots x_k)^{\mathrm{T}} = AA^+ v.$$

Předpokládáme-li nyní, že vektory $v_1, \dots, v_k$ jsou lineárně nezávislé, je A maticí injektivního zobrazení a dostáváme tak formulku

$$P = A(A^* A)^{-1} A^*.$$

V případě, že byl systém vektorů dokonce ortonormální, je matice uprostřed jednotková a tedy $P = AA^*$.

5. Multilineární algebra

V celé této kapitole budeme pracovat s vektorovými prostory nad pevným tělesem $\mathbb{K}$.

5.1. Báze a souřadnice

Prvně připomeňme důležité vlastnosti bází a souřadnic. Lineární zobrazení $\alpha\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} U$ je jednoznačně určené obrazy $u_i = \alpha(e_i)$ a lze jej tedy chápat jako n-tici vektorů $(u_1, \ldots, u_n)$. Přitom se jedná o bázi, tj. α posílá bázi na bázi, právě když je α izomorfismus. Inverzní zobrazení $\varphi = \alpha^{-1}\colon U \to \mathbb{K}^n$ pak posílá každý vektor u na jeho souřadnice $(u)_\alpha$ a budeme mu tedy říkat souřadnicové zobrazení (nebo prostě souřadnice na U).

Lemma 5.1. *Vektory $u_1, \ldots, u_n$ tvoří bázi U, právě když se každé zobrazení $\{u_i\} \to V$ jednoznačně rozšiřuje na lineární zobrazení $U \to V$.*

Poznámka. V řeči univerzální algebry to znamená, že báze vektorového prostoru je koncept totožný s volnou algebrou. Následující důkaz je vhodné v tomto směru chápat.

Důkaz. To, že báze má vlastnost z tvrzení, známe z dřívějška. Nechť tedy naopak $u_1, \ldots, u_n$ mají vlastnost z trvzení. Zejména tedy existuje zobrazení $\varphi\colon U \to \mathbb{K}^n$, posílající $u_i \mapsto e_i$. Ze stejné vlastnosti standardní báze dostáváme zobrazení $\alpha\colon \mathbb{K}^n \to U$ posílající $e_i \mapsto u_i$. Protože složené zobrazení $\alpha\varphi$ posílá $u_i \mapsto u_i$, stejně jako identické zobrazení, plyne z jednoznačnosti rozšíření $\alpha\varphi = \mathrm{id}$ a symetricky také $\varphi\alpha = \mathrm{id}$; tím pádem je α skutečně báze. □

5.2. Faktorový prostor

Nechť U je vektorový prostor, V jeho podprostor. Tento podprostor definuje na U ekvivalenci $u_1 \sim u_2$ právě tehdy, když $u_1 - u_2 \in V$. Třídu ekvivalence obsahující vektor u budeme značit $[u]$. Je to množina

$$[u] = u + V = \{u + v \mid v \in V\}.$$

Množinu všech tříd ekvivalence označujeme U/V. Jakožto kvocient komutativní grupy podle její podgrupy je to opět komutativní grupa, navíc můžeme na této množině definovat násobení skalárem z $\mathbb{K}$ takto:

$$\begin{aligned}[u] + [v] &= [u + v]\\ k[u] &= [ku]\end{aligned}$$

Tyto operace jsou nezávislé na výběru reprezentantů a není obtížné se přesvědčit, že z U/V vytvářejí vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

Je-li W komplementární podprostor k V, tj. $U = W \oplus V$, pak projekce $U \to U/V$ se zužuje na izomorfismus $W \to U/V$: ke každému $u + V \in U/V$ hledejme vzor $w \in W$ tak, že $u + V = w + V$, tj. $u = w + v$ pro nějaký vektor $v \in V$; podle definice přímého součtu lze toto jediným způsobem.

Je-li U konečněrozměrný prostor, pak

$$\dim U/V = \dim U - \dim V.$$

Důkaz je jednoduchý: Zvolme bázi $v_1, \ldots, v_k$ prostoru V a doplňme ji na bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru U. Stačí ukázat, že $[v_{k+1}], \ldots, [v_n]$ je báze prostoru U/V.

Cvičení. Dokažte předchozí tvrzení.

Označme $p\colon U \to U/V$ surjektivní lineární zobrazení definované předpisem

$$p(u) = [u].$$

Toto zobrazení se nazývá projekce.

Nechť $\varphi\colon U \to W$ je lineární zobrazení a nechť $V \subseteq \ker\varphi$. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\overline{\varphi}\colon U/V \to W$ takové, že

$$\varphi = \overline{\varphi} \circ p,$$

tedy že následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & W \\ U/V \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

φ musí být definováno předpisem

$$\overline{\varphi}([u]) = \varphi(u).$$

Díky tomu, že pro $v \in V$ je $\varphi(v) = 0$, je pro $u_1 \sim u_2$

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_1) + \varphi(u_1 - u_2) = \varphi(u_2)$$

a definice $\overline{\varphi}$ nezávisí na výběru reprezentanta.

Nechť $\varphi\colon U \to W$ je lineární zobrazení. Pak známá věta z algebry říká $U/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi$, což pro dimenze znamená $\dim U - \dim\ker\varphi = \dim\operatorname{im}\varphi$ (známe z dřívějška).

5.3. Prostory lineárních a multilineárních zobrazení

Lineární zobrazení z vektorového prostoru U do vektorového prostoru V vytvářejí vektorový prostor, který budeme označovat

$$\operatorname{Hom}(U, V).$$

Důvodem pro toto označení je skutečnost, že lineární zobrazení se často nazývají homomorfismy vektorových prostorů.

Nechť U_1, …, U_q, V jsou vektorové prostory. Zobrazení

$$\varphi\colon U_1 \times \cdots \times U_q \to V$$

se nazývá multilineární (nebo q-lineární), jestliže je lineární v každé své složce, tj.

$$\varphi(u_1, \dots, au_i + bv_i, \dots, u_n) = a\varphi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_q) + b\varphi(u_1, \dots, v_i, \dots, u_q)$$

Množina všech q-lineárních zobrazení z $U_1 \times \cdots \times U_q$ do V tvoří opět vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, který budeme označovat

$$\operatorname{Lin}_q(U_1, \dots, U_q; V).$$

Sčítání a násobení skalárem se děje ve V, tj.

$$(a\varphi + b\psi)(u_1, \dots, u_q) = a\varphi(u_1, \dots, u_n) + b\psi(u_1, \dots, u_q).$$

Speciálně platí

$$\operatorname{Lin}_1(U; V) = \operatorname{Hom}(U, V).$$

Příklad. Na $\mathbb{R}^3$ uvažujme lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadaná předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3, \qquad g(y_1, y_2, y_3) = y_1.$$

Ukážeme, že zobrazení

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y) = x_3 y_1$$

je bilineární. Platí

$$\varphi(ax + bz, y) = f(ax + bz) \cdot g(y) = (ax_3 + bz_3)y_1 = ax_3y_1 + bz_3y_1 = a\varphi(x, y) + b\varphi(z, y).$$

Důkaz pro linearitu ve druhé složce se provede obdobně.

cv **Cvičení.** Ukažte, že multilineární zobrazení jsou uzavřena na skládání.

5.4. Duální prostor

Lineární zobrazení z U do $\mathbb{K}$ se nazývají *lineární formy* na U, vektorový prostor všech lineárních forem se nazývá *duální vektorový prostor* k prostoru U a označuje se

$$U^* = \operatorname{Hom}(U, \mathbb{K}).$$

Věta 5.2 (o duální bázi). *Nechť U je vektorový prostor s bází $(e_1, \ldots, e_n)$. Potom v duálním prostoru U^* existuje báze $(f^1, \ldots, f^n)$ taková, že*

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Tato báze se nazývá duální bází *k bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.*

Důkaz. Každý vektor u lze psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů báze

$$u = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i.$$

Jelikož je f^j jednoznačně určena tím, že posílá e_j na 1 a zbylé bázové vektory na 0, dostáváme vztah $f^j(u) = a^j$ jako j-tou souřadnici vektoru.

Nechť $\eta \in U^*$ je libovolná lineární forma a hledejme $b_j \in \mathbb{K}$ tak, aby $\eta = \sum_{j=1}^{n} b_j f^j$. Tato rovnost forem bude platit, právě když tomu tak bude po dosazení všech bázových vektorů e_i, tj. právě když pro každé i bude platit

$$\eta(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j f^j(e_i) = b_i.$$

Tím jsme dokázali, že $(f^1, \ldots, f^n)$ je báze U^*. □

* *Poznámka.* Zabývejme se nyní krátce tím, co se stane pro U nekonečné dimenze. Zjevně formy f^j existovat budou a opět $\eta = \sum_j b_j f^j$, právě když $b_i = \eta(e_i)$. Přitom ale výraz napravo dává smysl pouze, pokud z těchto čísel bude pouze konečně mnoho nenulových. Ve výsledku tak každá forma má maximálně jedno vyjadření jako lineární kombinace f^j, a proto jsou f^j lineárně nezávislé a generují jistý podprostor U^*. Navíc k tomuto závěru stačí, aby byl e_i libovolný lineárně nezávislý systém vektorů (to je potřeba k tomu, aby formy f^j existovaly, nebudou však již jednoznačně určeny).

Z důkazu je dobré si zapamatovat, že souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (e_1, \ldots, e_n)$ lze spočítat pomocí duální báze $\alpha^* = (f^1, \ldots, f^n)$:

$$(u)_\alpha = \big(f^1(u), \ldots, f^n(u)\big)^{\mathrm{T}}$$

a naopak souřadnice formy η v duální bázi α^* lze spočítat pomocí báze α:

$$(\eta)_{\alpha^*} = (\eta(e_1), \ldots, \eta(e_n))$$

(v dalším je budeme zapisovat do řádků).

Příklad. Vektory v $\mathbb{R}^n$ považujeme za n-tice reálných čísel ve formě sloupců. Prvky duálního prostoru $(\mathbb{R}^n)^*$ budeme značit jako n-tice reálných čísel ve formě řádků (nakonec to jsou lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Tedy

$$u \in \mathbb{R}^3, \qquad u = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad \eta \in (\mathbb{R}^3)^*, \qquad \eta = (y_1, y_2, y_3).$$

Vyčíslení formy η na vektoru u je potom maticové násobení

$$\eta(u) = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = y_1x^1 + y_2x^2 + y_3x^3.$$

Nechť $\alpha = (u_1, \ldots, u_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$. Matice přechodu od α ke standardní bázi $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ je $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha} = A$

$$(u_1, \ldots, u_n) = (e_1, \ldots, e_n)(\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha}.$$

Duální báze k $(e_1, \ldots, e_n)$ je $f^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $f^n = (0, \ldots, 0, 1)$ a duální báze $(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ k $(u_1, \ldots, u_n)$ je určena řádky matice A^{-1}, neboť musí platit

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} \cdot (u_1, \ldots, u_n) = \big(\eta^i(u_j)\big) = (\delta^i_j) = E.$$

Důsledek 5.3 (o druhém duálu)**.** *Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze. Pro vektor $u \in U$ efinujme lineární formu $\mathrm{ev}_u \in (U^*)^*$ na duálním prostoru U^* pomocí předpisu $\mathrm{ev}_u(\eta) = \eta(u)$. Potom vzniklé zobrazení $\mathrm{ev}\colon U \to (U^*)^*$ je lineární izomorfismus.*

Důkaz. Podle předchozí věty k bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ prostoru U lze najít duální bázi $(f^1, \ldots, f^n)$ prostoru U^*. Ukážeme, že $\big(\mathrm{ev}_{e_1}, \ldots, \mathrm{ev}_{e_n}\big)$ tvoří duální bázi k $(f^1, \ldots, f^n)$. Platí totiž

$$\mathrm{ev}_{e_i}(f^j) = f^j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Protože je zjevně ev lineární a převádí bázi na bázi, jedná se o izomorfismus. □

∗ *Poznámka.* Zabývejme se nyní krátce tím, co se stane pro U nekonečné dimenze. Jak jsme viděli, formy f^j jsou bází jistého podprostoru U^* a ev_{e_i} jsou k nim opět duální, takže jsou lineárně nezávislé. Zobrazení ev je tedy injektivní a U je izomorfní podprostoru U daného právě prvky tvaru ev_u.

Od tohoto okamžiku budeme považovat prostory U a $(U^*)^*$ za totožné. Zobrazení $(-,-)\colon U^*\times U \to \mathbb{K}$ definované

$$(\eta, u) = \eta(u)$$

je bilineární a někdy se nazývá *dualita* nebo párování. Pomocí duality se dají vyjádřit podmínky pro duální bázi jako $(f^j, e_i) = \delta^j_i$ a pro souřadnice platí symetrické vztahy $(f^j, u) = u^j$, $(\eta, e_i) = \eta_i$.

5.5. Duální lineární zobrazení

Nechť $\varphi\colon U \to V$ je lineární zobrazení. Zobrazení $\varphi^*\colon V^* \to U^*$ definované pro $\theta \in V^*$ předpisem $\varphi^*(\theta) = \theta \circ \varphi$, tj.

$$\varphi^*(\theta)(u) = \theta\big(\varphi(u)\big)$$

se nazývá *duální lineární zobrazení* k zobrazení φ.

Poznámka. Pomocí dualit $(-,-)_U\colon U^* \times U \to \mathbb{K}$ a $(-,-)_V\colon V^* \times V \to \mathbb{K}$ lze definici psát

$$\big(\varphi^*(\theta), u\big)_U = \big(\theta, \varphi(u)\big)_V,$$

což formálně připomíná definici adjungovaného zobrazení, kde skalární součiny jsou nahrazeny dualitami. Výhodou tohoto zápisu je jeho symetrie a lepší přehlednost.

Podobnost s definicí adjungovaného zobrazení není náhodná. Je-li totiž U reálný Eukleidovský vektorový prostor, je zobrazení

$$R\colon U \to U^*, \qquad u \mapsto \langle u, -\rangle$$

izomorfismus – prostory mají stejnou dimenzi a injektivita plyne z toho, že $\langle u, -\rangle = 0$ znamená zejména $|u|^2 = \langle u, u\rangle = 0$, tj. $u = 0$. Při této identifikaci R pak dualita vypadá

$$(Ru, v) = (\langle u, -\rangle, v) = \langle u, v\rangle,$$

tj. dualita je přesně skalární součin. Pro komplexní skalární součin je R izomorfismus $\overline{U} \cong U^*$ a situace je o něco komplikovanější.

Příklad. Nechť $\varphi\colon U \to U$ je zobrazení $\varphi(u) = 3u$. Vypočtěte $\varphi^*\colon U^* \to U^*$ z definice. Platí

$$\Big(\varphi^*(\theta)\Big)(u) = \theta\big(\varphi(u)\big) = \theta(3u) = 3\theta(u).$$

Tedy $\varphi^*(\theta) = 3\theta$.

Zabývejme se nyní souřadnicovým zápisem duálního zobrazení. Připomeňme, že vektory zapisujeme do sloupce, zatímco lineární formy do řádku a dualita je násobení matic. Definice duálního zobrazení $\varphi^*(\eta) = \eta\varphi$ pak v souřadnicích dává $(\varphi^*(\eta))_\alpha = (\eta)_\beta(\varphi)_{\beta\alpha}$ a je tedy dáno násobením maticí $(\varphi)_{\beta\alpha}$ zprava.

5.6. Dualita a podprostory

Nechť $U \subseteq V$ je vektorový podprostor a uvažujme vložení

$$\iota \colon U \hookrightarrow V$$

a k němu duální surjektivní zobrazení

$$\iota^* \colon V^* \twoheadrightarrow U^*,$$

které je zřejmě dáno předpisem $\eta \mapsto \eta|_U$. Definujme

$$U^\perp = \ker \iota^* = \{\eta \in V^* \mid \forall u \in U \colon (\eta, u) = 0\},$$

kde podmínku $(\eta, u) = 0$ si lze představovat jako „$\eta \perp U$ neboli $\eta \in U^\perp$“; proto také tento podprostor duálního prostoru značíme tímto symbolem.

Přiřazení $U \mapsto U^\perp$ zadává zobrazení

$$D_V \colon \{\text{podprostory } V\} \longrightarrow \{\text{podprostory } V^*\},$$

které zjevně obrací uspořádání, tj. pokud $U_0 \subseteq U_1$, pak $U_0^\perp \supseteq U_1^\perp$. Navíc, pokud U má dimenzi d, pak $U^\perp$ má dimenzi $n - d$ (také říkáme, že má kodimenzi d); to je proto, že je jádrem surjektivního zobrazení $V^* \twoheadrightarrow U^*$ z n-rozměrného do d-rozměrného prostoru.

Naším dalším krokem bude ukázat, že zobrazení D_V je bijekce (a tedy antiizomorfismus uspořádaných množin – ve skutečnosti svazů). Zabývejme se proto tím, co se stane při druhé aplikaci „kolmého doplňku“. Geometrická intuice z Eukleidovských prostorů říká, že druhý kolmý doplněk musí nutně obsahovat původní prostor a ve skutečnosti se musí rovnat, protože mají stejné dimenze. Stejný argument funguje i obecně,

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V \mid \forall \eta \in U^\perp \colon (\eta, v) = 0\},$$

Protože se však všechny formy z $U^\perp$ podle definice nulují na U, platí $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Zároveň mají oba prostory stejnou dimenzi, musí být tedy totožné, $(U^\perp)^\perp = U$.

Věta 5.4. *Přiřazení $U \mapsto U^\perp$ určuje bijektivní zobrazení*

$$D_V \colon \{\textit{podprostory } V\} \longrightarrow \{\textit{podprostory } V^*\}, \quad U \mapsto U^\perp$$

s následujícími vlastnostmi

- *D_V převrací uspořádání,*
- *je-li U dimenze d, pak $U^\perp$ je dimenze $n - d$,*
- $(U_0 \cap U_1)^\perp = U_0^\perp + U_1^\perp$,
- $(U_0 + U_1)^\perp = U_0^\perp \cap U_1^\perp$

$\square$

Poznámka. Vše je důsledkem prvního bodu, dokonce i vztah mezi dimenzemi. Můžeme totiž vyčíst dimenzi U jako délku d nejdelšího striktně rostoucího řetězce podprostorů $0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d = U$.

Pěknou aplikací je popsání svazku všech rovin v prostoru procházejících danou přímkou p. Přechodem ke kolmým doplňkům to znamená popsat všechny přímky obsažené v rovině $p^\perp$. To je ale jednoduché – jejich směrové vektory jsou právě všechny nenulové prvky $p^\perp$. Pokud je p zadaná implicitně jako řešení soustavy $\alpha(v) = \beta(v) = 0$ dvou rovnic, je $p^\perp = [\alpha, \beta]$ a přímka ležící v $p^\perp$ je proto generovaná libovolnou jejich nenulovou lineární kombinací $a\alpha + b\beta$. Přechodem zpátky vidíme, že rovnice odpovídající roviny obsahující p je $(a\alpha + b\beta)(v) = 0$, ve výsledku tedy libovolná nenulová lineární kombinace definujících rovin přímky p.

Zabývejme se dále vztahem mezi podprostory zadanými implicitním a parametrickým popisem. Nechť je podprostor $W \subseteq V^*$ zadán parametricky jako $W = [\eta^1, \dots, \eta^k]$. Potom

$$W^\perp = \{v \in V \mid \forall \eta \in W \colon (\eta, v) = 0\} = \{v \in V \mid (\eta^1, v) = \cdots = (\eta^k, v) = 0\}.$$

To je ale popis $W^\perp$ jako prostoru řešení soustavy lineárních rovnic $\eta^1(v) = 0, \dots, \eta^k(v) = 0$, tedy implicitní popis. Stejný princip funguje naopak. Je-li $U = [v_1, \dots, v_d]$, pak

$$U^\perp = \{\eta \in V^* \mid (\eta, v_1) = \cdots = (\eta, v_d) = 0.\}$$

Formálně tak převod parametrického popisu na implicitní je elementární. Parametrický popis U je ekvivalentní implicitnímu popisu $U^\perp$, ten lze pomocí vyřešení soustavy s parametry převést na parametrický popis, který je zpětně ekvivalentní implicitnímu popisu U.

Tvrzení 5.5. *Nechť jsou na V zadány formy $\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^k$. Jestliže libovolné $v \in V$ splňující*

$$\eta^1(v) = \cdots = \eta^k(v) = 0$$

splňuje zároveň $\eta^0(v) = 0$, pak $\eta^0 \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$.

Poznámka. Opačná implikace je triviální: je-li $\eta^0 \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$, pak z $\eta^1(v) = \cdots \eta^k(v) = 0$ plyne jednoduše $\eta^0(v) = 0$.

V případě implikace $(\eta^1(v) = \cdots = \eta^k(v) = 0) \Rightarrow (\eta^0(v) = 0)$ můžeme mluvit o tom, že rovnice $\eta^0(v) = 0$ je logickým důsledkem zmíněné soustavy. Věta tedy říká, že pokud je $\eta^0(v) = 0$ logickým důsledkem, je ve skutečnosti „algebraickým“ důsledkem; lze odvodit ze soustavy tím nejtriviálnějším možným způsobem – je kombinací rovnic soustavy. V jistém smyslu se jedná o úplnost jistého logického systému: implikace, které platí, jsou právě ty, které lze dokázat (pomocí zmíněného jednoduchého pravidla).

Důkaz. Implikaci lze vyjádřit jako

$$[\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^k]^\perp = [\eta^1, \dots, \eta^k]^\perp.$$

Druhou aplikací D_V dostáváme $[\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^k] = [\eta^1, \dots, \eta^k]$ a zejména $\eta^0 \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$. □

Následující tvrzení je dobře známe z teorie řešení soustavy lineárních rovnic a lze jej vyvodit z Gaussovy eliminační metody. Uvádíme zde alternativní důkaz pomocí duality.

Tvrzení 5.6. *Soustava rovnic $Ax+b = 0$ nemá řešení, právě když existuje lineární kombinace jejích řádků (tedy rovnic) tvaru $1 = 0$.*

Důkaz. Trik spočívá v „projektivizaci“ soustavy. Původní soustava nemá řešení, právě když každé řešení soustavy $Ax + bt = 0$ splňuje také $t = 0$. Podle předchozího tvrzení to nastane právě tehdy, když forma zadaná řádkem $(0, \dots, 0, 1)$, tj. $(0 \mid 1)$ je lineární kombinací řádků rozšířené matice $(A \,|\, b)$. □

5.7. Prostory multilineárních forem

Zabývejme se nyní multilineárními formami. Pro jednoduchost zápisu se omezíme pouze na případ $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})$. Nechť $\eta \in U^*$, $\theta \in V^*$ jsou lineární formy. Definujme bilineární formu

$$\theta \odot \eta \colon U \times V \to \mathbb{K}, \qquad (\theta \odot \eta)(u, v) = \eta(u) \cdot \theta(v)$$

(součin funkčních hodnot – prvků tělesa $\mathbb{K}$); všimněte si, že argumenty se dosazují do lineárních forem v opačném pořadí než je pořadí jejich zápisu – toto bude naše konvence, která není úplně běžná.

Poznámka. Při práci s bilineárními formami a později s tenzorovým součinem je výhodnější se vzdát uspořádání prvků báze a pracovat s neuspořádanými bázemi. V dalším budeme zkracovat na „$\{e_i\}$ je báze U“.

Lemma 5.7. *Nechť $\{e_i\}$ je báze U, $\{\widetilde{e}_j\}$ báze V^* s příslušnými duálními bázemi $\{f^i\}$ a $\{\widetilde{f}^j\}$. Potom množina $\{\widetilde{f}^j \odot f^i \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ tvoří bázi $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})$.*

Důkaz. Pointou důkazu je, že dvě bilineární formy se rovnají, právě když dávají stejné hodnoty na všech dvojicích $(e_i, \widetilde{e}_j)$ bázových vektorů (to by mělo být čtenáři známo, případně by to měl zvládnout dokázat sám). Pokusme se napsat bilineární formu Φ jako kombinaci

$$\Phi = \sum_{r,s} \Phi_{rs}(\widetilde{f}^s \odot f^r).$$

Tato rovnost bude podle předchozího splněna, právě když pro každé i, j bude platit

$$\Phi(e_i, \widetilde{e}_j) = \sum_{r,s} \Phi_{rs}(\widetilde{f}^s \odot f^r)(e_i, \widetilde{e}_j) = \sum_{r,s} \Phi_{rs} \underbrace{f^r(e_i)}_{\delta_i^r} \underbrace{\widetilde{f}^s(\widetilde{e}_j)}_{\delta_j^s} = \Phi_{ij}.$$

Je tedy vidět, že koeficienty existují a to jediné: $\Phi_{ij} = \Phi(e_i, \widetilde{e}_j)$. To ale přesně znamená, že daná množina je báze. $\square$

Poznámka. Předchozí důkaz je analogií vztahu $\eta_i = \eta(e_i)$ pro souřadnice formy – souřadnice bilineární formy jsou také dány hodnotami na prvcích báze, $\Phi_{ij} = \Phi(e_i, e_j)$.

6. Tenzorový součin

6.1. Tenzorový součin vektorových prostorů

Pointa tenzorového součinu je, že chceme převést bilineární zobrazení na lineární. Konkrétně bilineární zobrazení $U \times V \to W$ bude ekvivalentní lineárnímu zobrazení $U \otimes V \to W$. Symbolicky

$$\mathrm{Lin}_2(U, V; W) \cong \mathrm{Hom}(U \otimes V, W),$$

kde však říkáme víc než v předchozím – vyžadujeme, aby se jednalo o izomorfismus vektorových prostorů (a ne jen o bijekci). Tímto vztahem je tenzorový součin určen jednoznačně až na izomorfismus a ve většině aplikací není potřeba znát přesnou definici a vystačíme si s touto vlastností. Pokusme se s její pomocí „odvodit“ definici tenzorového součinu. Dosaďme do uvedeného vztahu $W = \mathbb{K}$. Dostáváme

$$\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K}) \cong (U \otimes V)^*.$$

Budeme-li nyní předpokládat, že má $U \otimes V$ konečnou dimenzi, lze psát

$$U \otimes V \cong \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^*$$

Chceme-li tedy dostát tomu, že tenzorový součin převádí bilineární zobrazení na lineární, jsme vedeni k následujícímu:

Definice 6.1. Nechť U a V jsou vektorové prostory konečné dimenze. Definujeme jejich *tenzorový součin* $U \otimes V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^*$.

Prvek tenzorového součinu $t \in U \otimes V$ nazýváme *tenzor*.

(V analogii k předchozímu výkladu pro lineární formy jde o verzi „druhého duálu“ pro více činitelů.)

Definujme nyní bilineární zobrazení $t \colon U \times V \to U \otimes V$ předpisem

$$t(u, v) \colon \Phi \mapsto \Phi(u, v),$$

jedná se tedy o „evaluaci“ (viz srovnání druhého duálu s původním vektorovým prostorem). V následujícím budeme značit $u \otimes v = t(u, v)$ a je to tedy zobrazení, které každou bilineární formu posílá na její hodnotu na dvojici (u, v).

Lemma 6.2. *Zobrazení t je bilineární, tj.*

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2) \otimes v = a_1 \cdot u_1 \otimes v + a_2 \cdot u_2 \otimes v$$

a analogicky pro druhou složku.

Důkaz. Levá strana je dána evaluací

$$\Phi \mapsto \Phi(a_1 u_1 + a_2 u_2, v),$$

zatímco pravá je dána jako lineární kombinace evaluací, tedy

$$\Phi \mapsto a_1 \Phi(u_1, v) + a_2 \Phi(u_2, v).$$

Tyto dva výrazy se rovnají díky bilinearitě Φ. □

Tenzory tvaru $u \otimes v$ nazýváme *jednoduché*. Není pravda, že by každý tenzor byl jednoduchý, ale jednoduché tenzory prostor $U \otimes V$ generují – to je důsledek následující věty.

Věta 6.3. *Nechť $\{e_i\}$ je báze prostoru U a $\{\widetilde{e}_j\}$ báze prostoru V. Pak $\{e_i \otimes \widetilde{e}_j \mid i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m\}$ tvoří bázi prostoru $U \otimes V$.*

Důkaz. Ukážeme, že $\{e_i \otimes \widetilde{e}_j\}$ tvoří duální bázi k bázi $\{\widetilde{f}^j \odot f^i\}$ z Lemmatu 5.7. Stačí tedy počítat

$$(e_i \otimes \widetilde{e}_j)(\widetilde{f}^s \odot f^r) = (\widetilde{f}^s \odot f^r)(e_i, \widetilde{e}_j) = f^r(e_i)\widetilde{f}^s(\widetilde{e}_j) = \delta_i^r \delta_j^s,$$

což je 0 s vyjímkou případu $i = r$, $j = s$. To je ale přesně podmínka na duální bázi. □

* *Poznámka.* Zabývejme se nyní krátce tím, co se stane pro U nebo V nekonečné dimenze. Opět platí, že $e_i \otimes \widetilde{e}_j$ jsou duální k $\widetilde{f}^j \odot f^i$, takže $e_i \otimes \widetilde{e}_j$ jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi podprostoru $\mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^*$, který budeme označovat $U \otimes V$. Pro tuto definici platí předchozí věta beze změny. V dalším nebudeme konkrétní definici $U \otimes V$ potřebovat a vystačíme s předchozí větou; zejména bude vše platit i pro prostory nekonečné dimenze.

6.2. Univerzální vlastnost tenzorového součinu

Vraťme se nyní ke vztahu, který jsme použili k motivaci definice tenzorového součinu a ověřme, že opravdu platí. Připomeňme kanonické zobrazení $t\colon U \times V \to U \otimes V$ dané $(u, v) \mapsto u \otimes v$.

Věta 6.4 (Univerzální vlastnost tenzorového součinu)**.** *Nechť $F\colon U \times V \to W$ je bilineární zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi\colon U \otimes V \to W$ takové, že*

$$\varphi(u \otimes v) = F(u, v),$$

tj. takové, že následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "t"'] & W \\ U \otimes V \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Důkaz. Jsme nuceni položit $\varphi(e_i \otimes \widetilde{e}_j) = F(e_i, \widetilde{e}_j)$. Jelikož takové tenzorové součiny tvoří bázi, je tímto φ díky linearitě jednoznačně určeno. Zbývá ukázat, že podmínka opravdu platí. Přitom jsou ale obě F, $\varphi \circ t$ bilineární zobrazení $U \times V \to W$. Podle předchozího se shodují na dvojicích bázových vektorů a musí tedy být stejné. □

* **Důsledek 6.5.** *Existuje přirozený izomorfismus*

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Lin}_2(U, V; W),$$

daný $\varphi \mapsto \varphi \circ t$.

Následující tvrzení říká, že tenzorový součin je svou univerzální vlastností určen až na izomorfismus jednoznačně.

* **Věta 6.6** (o jednoznačnosti tenzorového součinu). *Nechť S je vektorový prostor a nechť $s\colon U_1 \times \cdots \times U_n \to S$ je n-lineární zobrazení, které má stejnou vlastnost jako zobrazení $t\colon U_1 \times \cdots \times U_n \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ z předchozí věty. Potom existuje právě jeden izomorfismus $\sigma\colon U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to S$ a k němu inverzní $\tau\colon S \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ tak, že komutuje diagram*

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \arrow[r, shift left, "\sigma"] & S \arrow[l, shift left, "\tau"] \\ U_1 \times \cdots \times U_n \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Důkaz. Provedeme pouze náznak. Existence lineárního zobrazení σ plyne z univerzální vlastnosti t, existence lineárního zobrazení τ plyne z univerzální vlastnosti zobrazení s. Identity $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}$, $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}$ se dokáží dalším použitím předchozí věty (především jejího tvrzením o jednoznačnosti). □

Poznámka. Existují i jiné definice tenzorového součinu vektorových prostorů než je ta, kterou jsme použili. Podle předchozího tvrzení lze však vždy ukázat, že jsou na prostorech konečné dimenze ekvivalentní s naší definicí.

Jedna z možností, která funguje i pro U, V nekonečné dimenze, je

$$U \otimes V = T/T_0,$$

kde T je vektorový prostor všech formálních lineárních kombinací dvojic $(u, v) \in U \times V$ (pro $\mathbb{K}$ nekonečné a U, V netriviální nemá T konečnou dimenzi!), tj. T je volný vektorový prostor na množině $U \times V$, a T_0 je jeho podprostor generovaný prvky

$$\begin{gathered}(au_1 + bu_2, v) - a(u_1, v) - b(u_2, v)\\ (u, av_1 + bv_2) - a(u, v_1) - b(u, v_2)\end{gathered}$$

Zobrazení $t\colon U \times V \to T/T_0$ je $t(u, v) = [(u, v)]$.

6.3. Asociativita a komutativita tenzorového součinu

Uvažujme zobrazení $U_1 \times U_2 \times U_3 \to (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3$, $(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1 \otimes u_2) \otimes u_3$. To je zřejmě lineární v každé složce (protože tenzorový součin vektorů je lineární v každé složce) a díky univerzální vlastnosti tenzorového součinu tak existuje jediné lineární zobrazení

$$\begin{aligned}\alpha\colon U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 &\longrightarrow (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3,\\ u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 &\longmapsto (u_1 \otimes u_2) \otimes u_3.\end{aligned}$$

Jedná se o izomorfismus, protože posílá bázi na bázi. Obdobně pro každou permutaci σ množiny $\{1, \ldots, n\}$ existuje právě jeden lineární izomorfismus

$$\begin{aligned}\rho_\sigma\colon U_1 \otimes \cdots \otimes U_n &\longrightarrow U_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes U_{\sigma(n)},\\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_n &\longmapsto u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Jednotkou pro tenzorový součin je těleso $\mathbb{K}$, tj. platí

$$\mathbb{K} \otimes U \cong U.$$

Tento izomorfismus je předepsán $k \otimes u \mapsto ku$ (skalární násobení v U).

6.4. Tenzorový součin lineárních zobrazení

Nechť $\varphi_i\colon U_i \to V_i$ jsou lineární zobrazení. Potom zobrazení

$$U_1 \times \cdots \times U_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,$$

definované předpisem $(u_1, \ldots, u_n) \mapsto \varphi_1(u_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(u_n)$, je n-lineární a podle věty o univerzální vlastnosti tenzorového součinu existuje právě jedno lineární zobrazení

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n\colon U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

takové, že

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = \varphi_1(u_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(u_n).$$

Zobrazení $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ nazýváme *tenzorovým součinem* lineárních zobrazení $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

6.5. Tenzorový součin a dualita

Tvrzení 6.7. *Nechť U a V mají konečnou dimenzi. Pak zobrazení*

$$V^* \otimes U^* \to \mathrm{Lin}_2(U, V; \mathbb{K}) \cong (U \otimes V)^*$$

dané předpisem $\theta \otimes \eta \mapsto \eta \odot \theta$ je izomorfismus.

Důkaz. Zobrazení převádí bázi $\widetilde{f}^j \otimes f^i$ na bázi $\widetilde{f}^j \odot f^i$ (ve druhém vyjádření jsou pak obrazy $\widetilde{f}^j \otimes f^i$ duální k $e^i \otimes \widetilde{e}^j$). □

Jakožto zobrazení $U \otimes V \to \mathbb{K}$ je obraz tenzoru $\theta \otimes \eta$ dán předpisem $u \otimes v \mapsto \eta(u) \cdot \theta(v)$ a lze jej tedy popsat jako kompozici

$$U \otimes V \xrightarrow{\eta \otimes \theta} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K},$$

kde přirozený izomorfismus $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}$ je dán předpisem $a \otimes b \mapsto ab$.

6.6. Izomorfismus mezi $\mathrm{Hom}(U, V)$ a $V \otimes U^*$

Uvažujme bilineární zobrazení

$$V \times U^* \to \mathrm{Hom}(U, V)$$

definované předpisem

$$(v, \eta) \longmapsto v \cdot \eta$$

kde $v \cdot \eta$ je lineární zobrazení $u \mapsto v \cdot \eta(u)$ (skalární násobek vektoru v). V souřadnicích je toto zobrazení opět dáno násobením matic, tentokrát v opačném pořadí než u evaluace.

Podle univerzální vlastnosti tenzorového součinu toto zobrazení indukuje lineární zobrazení

$$V \otimes U^* \to \mathrm{Hom}(U, V).$$

Věta 6.8. *Je-li U konečné dimenze, pak je výše uvedené zobrazení izomorfismus.*

Důkaz. Nechť $\alpha = (e_j)$ je báze U s duální bází (f^j) a nechť $\beta = (\widetilde{e}_i)$ je báze prostoru V. Ukážeme, že ke každému $\varphi\colon U \to V$ existuje jediný vzor, ten si označme

$$\sum_{i,j} (\widetilde{e}_i \otimes f^j) a^i_j$$

Jeho obraz je $\sum_{i,j} (\widetilde{e}_i \cdot f^j) a^i_j$ a stačí porovnat hodnoty na bázových vektorech e_s:

$$\varphi(e_s) = \sum_{i,j} \widetilde{e}_i \cdot f^j(e_s) a^i_j = \sum_i \widetilde{e}_i \cdot a^i_s.$$

Dostáváme tak jediné řešení: a^i_s musí být i-tá souřadnice $\varphi(e_s)$. Zejména je tedy a^i_s rovno prvku matice zobrazení φ, $a^i_s = ((\varphi)_{\beta\alpha})_{is}$. □

Poznámka. V souřadnicích lze identifikovat $\mathrm{Hom}(U, V)$ s prostorem matic $m \times n$. Zobrazení z předchozí věty pak posílá $\widetilde{e}_i \otimes f^j$ na matici E^j_i, která má jediný nenulový prvek na místě (i, j) roven 1. Zjevně matice E^j_i tvoří bázi prostoru všech matic, což dává alternativní důkaz předchozí věty.

Z předchozí věty je dobře vidět, že většina tenzorů není „jednoduchých“, tj. tvaru $v \otimes \eta$. Takovým nenulovým tenzorům totiž odpovídají přesně zobrazení $U \to V$ hodnosti 1, neboť jejich obraz je právě podprostor generovaný v. Ve skutečnosti má ale většina zobrazení maximální hodnost $\min\{\dim U, \dim V\}$.

cv **Cvičení.** Jaký je vzor $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(U, U)$?

6.7. Tenzorová algebra vektorového prostoru

Definice 6.9. *Algebrou* rozumíme vektorový prostor A, který je současně okruhem a to takovým způsobem, že násobení $A \times A \to A$ je bilineární. Alternativně tedy můžeme psát násobení jako lineární zobrazení $A \otimes A \to A$.

Známe již poměrně dost příkladů algeber – algebru čtvercových matic, algebru komplexních čísel (obecněji libovolné rozšíření těles), za chvíli poznáme algebru kvaternionů.

Tenzorový součin p kopií duálního prostoru U^* a q kopií prostoru U se označuje

$$T^q_p U = \underbrace{U \otimes \cdots \otimes U}_{q} \otimes \underbrace{U^* \otimes \cdots \otimes U^*}_{p}.$$

Jeho prvky se nazývají *tenzory typu* (p, q). Díky Větě 6.8 je $T^q_p U \cong \mathrm{Hom}(U^{\otimes p}, U^{\otimes q})$. Naším dalším cílem bude z těchto prostorů vyrobit tzv. tenzorovou algebru vektorového prostoru U.

Prvně definujeme násobení

$$\underbrace{U^{\otimes q_1} \otimes (U^*)^{\otimes p_1}}_{T^{q_1}_{p_1} U} \otimes \underbrace{U^{\otimes q_2} \otimes (U^*)^{\otimes p_2}}_{T^{q_2}_{p_2} U} \xrightarrow{\rho(23)} \underbrace{U^{\otimes q_1} \otimes U^{\otimes q_2} \otimes (U^*)^{\otimes p_1} \otimes (U^*)^{\otimes p_2}}_{T^{q_1+q_2}_{p_1+p_2} U},$$

tj. součinem tenzoru typu (p_1, q_1) a tenzoru typu (p_2, q_2) je tenzor typu $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$, konkrétně

$$((u_1 \otimes \cdots \otimes u_{q_1}) \otimes (\eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^{p_1})) \otimes ((v_1 \otimes \cdots \otimes v_{q_2}) \otimes (\theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^{p_2})) \mapsto$$
$$\mapsto (u_1 \otimes \cdots \otimes u_{q_1} \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{q_2}) \otimes (\eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^{p_1} \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^{p_2})$$

∗ Abychom z jednotlivých prostorů $T_p^q U$ a násobení mezi nimi vyrobili jedinou algebru, je nutné tyto prostory dát nějakým způsobem dohromady. K tomu nám poslouží pojem direktního součtu, tentokráte ovšem pro nekonečný počet sčítanců (sjednocení vektorových prostorů není vektorový prostor). Pro vektorové prostory V_i, $i \in I$, položme

$$\bigoplus_{i\in I} V_i = \Big\{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \;\Big|\; v_i \text{ je nenulové pouze pro konečně mnoho } i \in I \Big\}.$$

Budeme identifikovat $v \in V_j$ s prvkem $(v_i)_{i\in I}$ takovým, že $v_j = v$ a ostatní komponenty jsou nulové. Pro $v = (v_i)_{i\in I}$ s nenulovými složkami $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ platí $v = v_{i_1} + \cdots + v_{i_n}$ a je tedy direktní součet generován jednotlivými sčítanci V_i. Zřejmě je toto vyjádření navíc jednoznačné a tedy lineární zobrazení $\bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ je jednoznačně určeno svými zúženími $V_i \to W$, kterážto mohou být libovolná lineární zobrazení.

∗ Položme $T_0^0 U = \mathbb{K}$. Potom *tenzorová algebra* vektorového prostoru U je direktní součet vektorových prostorů

$$T_*^* U = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T_p^q U$$

To je opět vektorový prostor, i když nekonečné dimenze. Násobení na $T_*^* U$ je jednoznačně určeno tím, že má být bilineární a svým chováním na jednotlivých $T_p^q U$.

Příklad. Součinem tenzorů

$$2f^1 \otimes u_1 \otimes u_2 - 3f^2 \otimes u_3 \otimes u_3, \qquad 4f^3 \otimes u_3 - f^2 \otimes u_1$$

je tenzor

$$\begin{aligned}(2f^1 \otimes u_1 \otimes u_2 - 3f^2 \otimes u_3 \otimes u_3) \otimes (4f^3 \otimes u_3 - f^2 \otimes u_1) = \\ = 8f^1 \otimes f^3 \otimes u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 - 2f^1 \otimes f^2 \otimes u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 \\ -12f^2 \otimes f^3 \otimes u_3 \otimes u_3 \otimes u_3 + 3f^2 \otimes f^2 \otimes u_3 \otimes u_3 \otimes u_1.\end{aligned}$$

6.8. Souřadnice tenzorů

Nechť $\alpha = \{e_i\}$ je báze prostoru U a $\alpha^* = \{f^j\}$ duální báze prostoru U^*. Potom všechny tenzory tvaru

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_p}$$

tvoří bázi prostoru $T_p^q(U)$ a každý tenzor $t \in T_p^q(U)$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_q \\ j_1,\dots,j_p}} t^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_p}.$$

Čísla $t^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} \in \mathbb{K}$ nazýváme souřadnicemi tenzoru $t \in T_p^q(U)$ v bázi α. Všimněte si, že dolní index p značí počet dolních indexů, zatímco horní index q značí počet horních indexů u souřadnic.

Každý vektor $u \in U$ je tenzorem typu $(0,1)$, neboť

$$T_0^1(U) = U.$$

Jeho souřadnice v bázi α budeme zapisovat pomocí horních indexů

$$u = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i.$$

Každá lineární forma $\eta \in U^*$ je tenzorem typu $(1, 0)$, neboť

$$T_1^0(U) = U^*.$$

Její souřadnice v bázi α budeme zapisovat pomocí dolních indexů

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} a_j f^j.$$

Každá bilineární forma g na U je tenzorem typu $(2, 0)$, neboť

$$T_2^0(U) = U^* \otimes U^* \simeq \mathrm{Lin}_2(U \times U, \mathbb{K}).$$

Její souřadnice v bázi α budeme zapisovat pomocí dolních indexů

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} f^i \otimes f^j.$$

Každé lineární zobrazení $\varphi\colon U \to U$ je tenzorem typu $(1, 1)$, neboť

$$T_1^1(U) = U \otimes U^* \simeq \mathrm{Hom}(U, U).$$

Jeho souřadnice v bázi α budeme zapisovat takto:

$$\varphi = \sum_{i,j} a^i_j e_i \otimes f^j.$$

Ukážeme, že matice lineárního zobrazení $\varphi\colon U \to U$ v bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (a^i_j)^n_{i,j=1},$$

kde i označuje řádek a j sloupec. Platí totiž, že v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je i-tá souřadnice vektoru $\varphi(e_j)$, tj.

$$\begin{aligned} f^i(\varphi(e_j)) &= f^i\left(\sum_{r,s} a^r_s e_r \otimes f^s\right)(e_j) \\ &= f^i\left(\sum_{r,s} a^r_s e_r f^s(r_j)\right) \\ &= \sum_{r,s} a^r_s f^s(e_j) f^i(e_r) = a^i_j \end{aligned}$$

Od této chvíle budeme tedy v kapitole o multilineární algebře značit matice zobrazení jako (a^i_j), kde i značí řádek a j sloupec.

Násobení tenzorů lze v souřadnicích popsat takto:

$$(t \otimes s)^{i_1 \dots i_{q_1+q_2}}_{j_1 \dots j_{p_1+p_2}} = t^{i_1 \dots i_{q_1}}_{j_1 \dots j_{p_1}} s^{i_{q_1+1} \dots i_{q_1+q_2}}_{j_{p_1+1} \dots j_{p_1+p_2}}.$$

Vyčíslení bilineárního zobrazení $g\colon U \times U \to \mathbb{K}$ na dvojici vektorů u a v je postupně součin tenzorů $g \otimes u \otimes v$ a následná kontrakce prvních a druhých složek (tj. složení s evaluací $U \otimes U^* \to \mathbb{K}$). V souřadnicích

$$\begin{aligned} g(u,v) &= \left(\sum g_{ij} f^i \otimes f^j\right)\left(\sum a^s e_s, \sum b^t e_t\right) \\ &= \sum_{i,j,t,s} g_{ij} a^s b^t f^i(e_s) f^j(e_t) = \sum_{i,j} g_{ij} a^i b^j. \end{aligned}$$

Vyčíslení lineárního zobrazení $\varphi\colon U \to U$ na vektoru $u \in U$ je postupně součin tenzorů $\varphi \otimes u \in U \otimes U^* \otimes U$ a kontrakce mezi druhou a první složkou. V souřadnicích

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \left(\sum_{i,j} a^i_j e_i \otimes f^j\right)\left(\sum_s x^s e_s\right) \\ &= \sum_{i,j,s} a^i_j x^s f^j(e_s) e_i = \sum_i \left(\sum_j a^i_j x^j\right) e_i \end{aligned}$$

Souřadnice výsledného vektoru jsou tedy $\sum_j a^i_j x^j$.

Kroneckerův tenzor δ je prvkem $U \otimes U^*$, který odpovídá identickému zobrazení z $\mathrm{Hom}(U,U)$. Jeho souřadnice v libovolné bázi jsou

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

tj. $\delta = \sum_i e_i \otimes f^i$.

cv 6.9. Grafický kalkulus

Ve cvičení jsme reprezentovali tenzory pomocí obrázků, dále pak jejich tenzorový součin, identitu, evaluaci, skládání, atd.

Základní identity jsou

$$U \xrightarrow{\delta \otimes \mathrm{id}} U \otimes U^* \otimes U \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \varepsilon} U$$
$$U^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \delta} U^* \otimes U \otimes U^* \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}} U^*$$

Díky nim lze přecházet mezi zobrazeními $U^{\otimes p} \to U^{\otimes q}$ a tenzory z $T^q_p U$. Dále jsme definovali stopu zobrazení, tj. prvku $T^1_1 U$ jako napojení výstupu do vstupu (kontrakce).

6.10. Souřadnice tenzorů při změně báze

Nechť $\alpha = \{e_i\}$ je báze prostoru U s duální bází $\alpha^* = \{f^j\}$ prostoru U^* a nechť $\beta = \{\widetilde{e}_i\}$ je jiná báze prostoru U s duální bází $\beta^* = \{\widetilde{f^j}\}$. Nechť $A = (a^i_j)$, i značí řádky, j značí sloupce, je matice přechodu od báze α k bázi β, tj. $A = (\mathrm{id})_{\beta\alpha}$,

$$(e_1, \dots, e_n) = (\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n) A.$$

Dále nechť

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \widetilde{f}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}^n \end{pmatrix}.$$

Dualita potom říká

$$E = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = B \underbrace{\begin{pmatrix} \widetilde{f}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}^n \end{pmatrix} (\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n)}_{E} A,$$

díky čemuž $B = A^{-1}$. Označíme-li $B = (b^i_j)$, pak dostáváme vztahy

$$e_k = \sum_i \widetilde{e}_i a^i_k, \qquad f^l = \sum_j b^l_j \widetilde{f}^j,$$

jejichž dosazením do vztahu definicujícího souřadnice tenzoru dostaneme následující větu.

Věta 6.10. *Nechť $t \in T^q_p(U)$ je tenzor o souřadnicích $t^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}$ v bázi α. Jeho souřadnice v bázi β jsou při použití sumační konvence*

$$\widetilde{t}^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p} = a^{i_1}_{k_1} a^{i_2}_{k_2} \ldots a^{i_q}_{k_q} t^{k_1 k_2 \ldots k_q}_{l_1 l_2 \ldots l_p} b^{l_1}_{j_1} b^{l_2}_{j_2} \ldots b^{l_p}_{j_p}$$

(Sčítáme tedy přes všechny indexy $k_1, \ldots, k_q, l_1, \ldots, l_p$.) □

Příklad. Nechť u je vektor se souřadnicemi x^i v bázi α a $\widetilde{x}^i$ v bázi β. Podle předchozí věty

$$\widetilde{x}^i = \sum_k a^i_k x^k$$

Tedy

$$(u)_\beta = A(u)_\alpha = (\mathrm{id})_{\beta\alpha}(u)_\alpha,$$

což je nám známo již z dřívějška.

Příklad. Nechť f je lineární forma se souřadnicemi y_j v bázi α^* a souřadnicemi $\widetilde{y}_j$ v bázi β^*. Podle předchozí věty

$$\widetilde{y}_j = \sum_l y_l b^l_j$$

Tedy

$$(f)_{\beta^*} = (f)_{\alpha^*} B = (f)_{\alpha^*} (\mathrm{id})_{\alpha\beta},$$

kde jsou ale souřadnice forem brány jako řádky jako obvykle.

Příklad. Lineární zobrazení $\varphi\colon U \to U$ je tenzor typu (1,1). Jeho matice $(\varphi)_{\alpha\alpha} = (t^i_j)$ je zadána souřadnicemi tohoto tenzoru. Podle předchozí věty jsou jeho souřadnice v bázi β

$$\widetilde{t}^i_j = \sum_{i,j} a^i_k t^k_l b^l_j = \sum_k a^i_k \Bigg(\sum_l t^k_l b^l_j \Bigg),$$

maticově

$$(\varphi)_{\beta\beta} = A(\varphi)_{\alpha\alpha} B = A(\varphi)_{\alpha\alpha} A^{-1} = (\mathrm{id})_{\beta\alpha}(\varphi)_{\alpha\alpha}(\mathrm{id})_{\alpha\beta},$$

což je nám již známý vztah pro transformaci matice zobrazení.

Příklad. Bilineární forma na U je tenzor typu (2,0). Matice této formy je dána souřadnicemi tenzoru (t_{ij}) (i značí řádek, j sloupec). Podle předchozí věty

$$\widetilde{t}_{ij} = \sum_{k,l} t_{kl} b_i^k b_j^l = \sum_k b_i^k \Big(\sum_l t_{kl} b_j^l \Big),$$

maticově

$$\widetilde{T} = B^{\mathrm{T}} T B = (\mathrm{id})_{\alpha\beta}^{\mathrm{T}} T (\mathrm{id})_{\alpha\beta},$$

což je nám již z dřívějška známý vztah pro transformaci matice bilineární formy.

Poznámka. Pořadí má být opačné.

Příklad. Nechť V je vektorový prostor s bází (e_1, e_2) a duální bází (f^1, f^2). Vyjádřete tenzor

$$f^1 \otimes (e_1 + e_2) \in T_1^1(V)$$

v bázi $(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2})$ a duální bázi $(\widetilde{f^1}, \widetilde{f^2})$, jestliže

$$(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení. Platí

$$(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}) = (e_1, e_2) A.$$

Chceme vyjádřit e_1, e_2 pomocí $\widetilde{e_1}$, $\widetilde{e_2}$ a f^1, f^2 pomocí $\widetilde{f^1}$, $\widetilde{f^2}$. Z předchozí rovnice okamžitě dostáváme

$$(e_1, e_2) = (\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}) A^{-1} = (\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dále hledáme vyjádření ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \widetilde{f^1} \\ \widetilde{f^2} \end{pmatrix}.$$

Platí

$$E = \big(f^i(e_j)\big) = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} (e_1, e_2) = B \begin{pmatrix} \widetilde{f^1} \\ \widetilde{f^2} \end{pmatrix} (\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}) A^{-1} = B \cdot E A^{-1} = B \cdot A^{-1}.$$

Tedy musí být $B = A^{-1}$, proto

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{f^1} \\ \widetilde{f^2} \end{pmatrix}.$$

Odtud dosadíme do našeho tenzoru

$$\begin{aligned} f^1 \otimes (e_1 + e_2) &= (\widetilde{f^1} + \widetilde{f^2}) \otimes (-2\widetilde{e_1} + 3\widetilde{e_2} + \widetilde{e_1} - \widetilde{e_2}) \\ &= (\widetilde{f^1} + \widetilde{f^2}) \otimes (-\widetilde{e_1} + 2\widetilde{e_2}) \\ &= -\widetilde{f^1} \otimes \widetilde{e_1} - \widetilde{f^2} \otimes \widetilde{e_1} + 2\widetilde{f^1} \otimes \widetilde{e_2} + 2\widetilde{f^2} \otimes \widetilde{e_2}. \end{aligned}$$ ◇

6.11. Tenzory ve fyzice, jiná definice tenzoru

Předchozí věta o transformaci souřadnic tenzoru při změně báze nám umožňuje porozumět tomu, jak jsou tenzory chápány ve fyzice.

Tenzor typu (p, q) nad vektorovým prostorem U každé bázi α v U přiřazuje n^{p+q}-tici čísel $t^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \in \mathbb{K}$, přičemž při změně báze probíhá transformace těchto čísel podle věty z předchozího paragrafu.

7. Symetrické a antisymetrické tenzory

7.1. Symetrická mocnina

Od této chvíle nechť $\mathbb{K}$ je těleso charakteristiky 0. Grupu permutací množiny $\{1, \dots, q\}$ označme Σ_q.

Definice 7.1. Definujme *symetrickou mocninu* S^qU jako kvocient $\bigotimes^q U$ podle vektorového podprostoru generovaného tenzory tvaru

$$u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)} - u_1 \otimes \cdots \otimes u_q.$$

Třídu prvku $u_1 \otimes \cdots \otimes u_q$ budeme značit $u_1 \cdots u_q$; platí tedy $u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(q)} = u_1 \cdots u_q$.

Symetrická mocnina S^qU má opět jistou univerzální vlastnost, demonstrovanou následujícím diagramem:

$$\begin{tikzcd}
\prod^q U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"'] & V \\
\bigotimes^q U \arrow[d, "p"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & \\
S^qU \arrow[uur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Je-li $\Phi\colon \prod^q U \to V$ multilineární zobrazení, pak existuje jediné lineární zobrazení $G\colon \bigotimes^q U \to V$ díky univerzální vlastnosti tenzorového součinu. Je-li navíc Φ symetrické, pak

$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}) = \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}) = \Phi(u_1, \dots, u_q) = G(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q).$$

Proto G indukuje jediné lineární zobrazení F, pro které zjevně platí

$$F(u_1 \cdots u_q) = \Phi(u_1, \dots, u_q).$$

Naopak, pokud je F lineární zobrazení, pak kompozice $F \circ p \circ t$ je symetrické q-lineární zobrazení.

Věta 7.2. *Platí* $\mathrm{Hom}(S^qU, V) \cong \mathrm{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\mathrm{sym}}$. □

Ukážeme nyní, že S^qU je ve skutečnosti kvocientem podle ideálu, takže se jedná opět o algebru. Protože je $\bigotimes^q U$ generovaný jednoduchými tenzory, stačí ukázat, že

$$(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)} - u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) \otimes (u_{q+1} \otimes \cdots \otimes u_{q+r})$$

opět leží v jádře projekce p a podobnou symetrickou vlastnost. To je ale jasné, neboť se jedná o generující tenzor pro permutaci $\sigma + \mathrm{id}$, která je σ na prvních q prvcích a identita na posledních r prvcích. Násobení $S^qU \otimes S^rU \to S^{q+r}U$ má tvar $(u_1 \cdots u_q) \cdot (u_{q+1} \cdots u_{q+r}) = u_1 \cdots u_q u_{q+1} \cdots u_{q+r}$.

** 7.2. Symetrické tenzory

Uvedeme nyní alternativní definici S^qU, konkrétně jako podprostoru $\bigotimes^q U$. K tomu budeme potřebovat několik definic. Pro permutaci $\sigma \in \Sigma_q$ máme lineární zobrazení

$$\rho_\sigma\colon \bigotimes^q U \to \bigotimes^q U, \quad u_1 \otimes \cdots \otimes u_q \mapsto u_{\sigma(q)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}.$$

cv Platí $\rho_\tau \circ \rho_\sigma = \rho_{\sigma\circ\tau}$; to je proto, že $\rho_\tau\rho_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$ vznikne z výše uvedeného vztahu pro $\rho_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$ tím, že na i-té místo napíšeme člen na $\tau(i)$-tém místě, tj. $u_{\sigma(\tau(i))}$. Výsledkem tak bude

$$u_{\sigma(\tau(1))} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(\tau(q))} = \rho_{\sigma\tau}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q).$$

Konkrétně si lze předchozí důkaz demonstrovat na příkladu

$$\rho_{(23)}\rho_{(12)}(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) = \rho_{(23)}(u_2 \otimes u_1 \otimes u_3) = u_2 \otimes u_3 \otimes u_1 = \rho_{(123)}(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3),$$

přičemž $(12)(23) = (123) \neq (23)(12)$.

Definice 7.3. Řekneme, že tenzor $t \in \bigotimes^q U$ je *symetrický*, jestliže $\rho_\sigma t = t$ pro každou permutaci σ.

Definice 7.4. *Symetrizace* tenzoru t je tenzor $\mathrm{Sym}(t) = \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q}\rho_\tau t$.

V předchozí definici používáme nulovou charakteristiku $\mathbb{K}$ k tomu, abychom mohli dělit *nenulovým* číslem $q! \neq 0$.

Příklad. Symetrizací tenzoru $u_1 \otimes u_1 \otimes u_2$ dostaneme tenzor (sčítance odpovídají postupně permutacím id, (12), (23), (13), (231) a (321))

$$\frac{1}{6}(u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 + u_2 \otimes u_1 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 +$$

$$+ u_2 \otimes u_1 \otimes u_1) = \frac{1}{3}u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 + \frac{1}{3}u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 + \frac{1}{3}u_2 \otimes u_1 \otimes u_1$$

Symetrizace zjevně zadává lineární zobrazení $\mathrm{Sym}\colon \bigotimes^q U \to \bigotimes^q U$.

Lemma 7.5. *Platí* $\rho_\sigma \circ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym} \circ \rho_\sigma$.

Důkaz. Dokážeme první rovnost, druhá se dostane podobně. Platí

$$\rho_\sigma(\mathrm{Sym}(t)) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q}\rho_\sigma(\rho_\tau(t)) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q}\rho_{\tau\circ\sigma}t = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q}\rho_\tau t = \mathrm{Sym}(t)$$

(pro $\tau \in \Sigma_q$ zjevně probíhají permutace $\tau \circ \sigma$ přes každý prvek Σ_q právě jednou). □

Důsledek 7.6. *Obraz* $\mathrm{Sym}(\bigotimes^q U)$ *sestává právě ze symetrických tenzorů.*

Důkaz. Podle lemmatu je $\rho_\sigma(\mathrm{Sym}(t)) = \mathrm{Sym}(t)$, takže $\mathrm{Sym}(t)$ je vždy symetrický. Na druhou stranu každý symetrický tenzor t leží v obraze Sym, neboť

$$\mathrm{Sym}(t) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q}\rho_\tau t = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} t = t. \qquad \square$$

Ve skutečnosti z důkazu jednoduše plyne $\mathrm{Sym}\circ\mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$, takže Sym je projekce na prostor symetrických tenzorů.

Druhá rovnost z lemmatu říká $\mathrm{Sym}(u_1\otimes\cdots\otimes u_q) = \mathrm{Sym}(u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(q)})$, tj. Sym faktorizuje přes S^qU, takže dostáváme indukované zobrazení $s\colon S^qU\to\bigotimes^q U$. Platí

$$s(u_1\cdots u_q) = \mathrm{Sym}(u_1\otimes\cdots\otimes u_q) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(q)},$$

z čehož dostáváme

$$p(s(u_1\cdots u_q)) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} u_{\sigma(1)}\cdots u_{\sigma(q)} = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} u_1\cdots u_q = u_1\cdots u_q$$

a tím pádem $p\circ s = \mathrm{id}$. Názorně to znamená, že s vybírá z každé třídy rozkladu $S^qU = \bigotimes^q U/\ker p$ nějakého reprezenta této třídy; proto p indukuje izomorfismus $\mathrm{im}\, s \xrightarrow{\cong} S^qU$. Přitom zjevně $\mathrm{im}\, s = \mathrm{im}\,\mathrm{Sym}$ a podle důsledku se jedná o prostor symetrických tenzorů.

7.3. Báze prostoru symetrických tenzorů

Budeme používat zkrácené značení $u_1^{a_1}\dots u_k^{a_k}$, pokud se vektor u_j vyskytuje v součinu a_j-krát.

Věta 7.7. *Nechť $(e_1,\dots,e_n)$ je báze prostoru U. Potom $\{e_1^{a_1}\dots e_n^{a_n} \mid a_1+\cdots+a_n = q\}$ je báze $S^q(U)$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme s pomocí Lemmatu 5.1, budou nás tedy zajímat lineární zobrazení $S^q(U)\to V$ nebo ekvivalentně symetrická q-lineární zobrazení $\Phi\colon \prod^q U\to V$. To je jednoznačně určeno svými hodnotami na q-ticích bázových vektorů s tím, že tyto hodnoty mohou být libovolné, ale symetrické, tj. jsou jednoznačně určeny (libovolnými) hodnotami na $(e_{i_1},\dots,e_{i_q})$, kde $i_1\le\cdots\le i_q$. Při izomorfismu

$$\mathrm{Lin}_q(U,\dots,U;V)_{\mathrm{sym}} \cong \mathrm{Hom}(S^qU,V)$$

odpovídá Φ lineárnímu zobrazení $F\colon S^qU\to V$ a platí tedy, že toto je jednoznačně určené svými (libovolnými) hodnotami

$$F(e_{i_1}\cdots e_{i_q}) = \Phi(e_{i_1},\dots,e_{i_q}),$$

kde $i_1\le\cdots\le i_q$, jak jsme chtěli dokázat. □

Důsledek 7.8. *Dimenze prostoru $S^q(U)$ je $\binom{n+q-1}{q}$.*

Důkaz. Spočítejte, kolik existuje n-tic $(a_1,\dots,a_n)$ nezáporných celých čísel takových, že $a_1+\cdots+a_n = q$. (Je jich stejně, jako je různých posloupností q znaků $\bullet$ a $n-1$ znaků $|$, například $(1,0,2,1)$ odpovídá $\bullet\mid\ \mid\bullet\bullet\mid\bullet$.) □

Speciálně pro $U = (\mathbb{K}^n)^*$ můžeme chápat formy f^i z duální standardní báze jako proměnné x^i (jsou to zobrazení $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ jejichž hodnota na $(x^1,\dots,x^n)$ je právě x^i). Potom lze symetrickou algebru $S(\mathbb{K}^n)^*$ ztotožnit s algebrou $\mathbb{K}[x^1,\dots,x^n]$ polynomů nad tělesem $\mathbb{K}$ v proměnných $x^1,\dots,x^n$ a prvky této algebry pak interpretovat jako polynomiální funkce na $\mathbb{K}^n$.

7.4. Antisymetrická mocnina

Označme $\operatorname{sign}\sigma$ znaménko permutace σ. Zopakujeme předchozí výklad pro antisymetrická (nebo též alternující) q-lineární zobrazení, tj. zobrazení $\Phi\colon \prod^q U \to V$ splňující

$$\Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \Phi(u_1, \dots, u_q)$$

pro libovolnou permutaci (zjevně stačí zkontrolovat pro transpozice, které generují Σ_q). Vektorový prostor antisymetrických q-lineárních zobrazení budeme značit $\operatorname{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\mathrm{alt}}$.

Definice 7.9. Definujme *antisymetrickou mocninu* $\Lambda^q U$ jako kvocient $\bigotimes^q U$ podle vektorového podprostoru generovaného tenzory tvaru

$$u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(q)} - \operatorname{sign}\sigma \cdot u_1 \otimes \dots \otimes u_q.$$

Třídu prvku $u_1 \otimes \dots \otimes u_q$ budeme značit $u_1 \wedge \dots \wedge u_q$; platí tedy $u_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(q)} = \operatorname{sign}\sigma \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_q$.

Zejména platí $u_1 \wedge \dots \wedge u_q = 0$, kdykoliv $u_i = u_j$ (prohozením u_i, u_j se výraz jednak nezmění a podle definice změní znaménko; v nulové charakteristice to znamená, že je tento výraz nulový).

Antisymetrická mocnina $\Lambda^q U$ má opět jistou univerzální vlastnost:

$$\begin{tikzcd}
\prod^q U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"'] & V \\
\bigotimes^q U \arrow[ur, dashed, "G"] \arrow[d, "p"'] & \\
\Lambda^q U \arrow[uur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Je-li Φ multilineární zobrazení, pak existuje jediné lineární zobrazení $G\colon \bigotimes^q U \to V$ díky univerzální vlastnosti tenzorového součinu. Je-li navíc Φ antisymetrické, pak

$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(q)}) = \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \Phi(u_1, \dots, u_q) = \operatorname{sign}\sigma \cdot G(u_1 \otimes \dots \otimes u_q).$$

Proto G indukuje jediné lineární zobrazení F, pro které zjevně platí

$$F(u_1 \wedge \dots \wedge u_q) = \Phi(u_1, \dots, u_q).$$

Naopak, pokud je F lineární zobrazení, pak kompozice $F \circ p \circ t$ je antisymetrické q-lineární zobrazení.

Věta 7.10. *Platí* $\operatorname{Hom}(\Lambda^q U, V) \cong \operatorname{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\mathrm{alt}}$. $\square$

Ukážeme nyní, že $\Lambda^q U$ je ve skutečnosti kvocientem podle ideálu, takže se jedná opět o algebru. Protože je $\bigotimes^q U$ generovaný jednoduchými tenzory, stačí ukázat, že

$$(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(q)} - \operatorname{sign}\sigma \cdot u_1 \otimes \dots \otimes u_q) \otimes (u_{q+1} \otimes \dots \otimes u_{q+r})$$

opět leží v jádře projekce a podobnou symetrickou vlastnost. To je ale jasné, neboť se jedná o generující tenzor pro permutaci $\sigma + \mathrm{id}$, která je σ na prvních q prvcích a identita na posledních r prvcích. Násobení $\Lambda^q U \otimes \Lambda^r U \to \Lambda^{q+r} U$ má tvar $(u_1 \wedge \dots \wedge u_q) \cdot (u_{q+1} \wedge \dots \wedge u_{q+r}) = u_1 \wedge \dots \wedge u_q \wedge u_{q+1} \wedge \dots \wedge u_{q+r}$.

** 7.5. Antisymetrické tenzory

Uvedeme nyní alternativní definici $\Lambda^q U$, konkrétně jako podprostoru $\bigotimes^q U$. K tomu budeme potřebovat několik definic.

Definice 7.11. Řekneme, že tenzor $t \in \bigotimes^q U$ je *antisymetrický*, jestliže $\rho_\sigma t = \operatorname{sign}\sigma \cdot t$ pro každou permutaci σ.

Definice 7.12. *Antisymetrizace* tenzoru t je tenzor $\operatorname{Alt}(t) = \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} \operatorname{sign}\sigma \cdot \rho_\tau t$.

V předchozí definici používáme nulovou charakteristiku $\mathbb{K}$ k tomu, abychom mohli dělit *nenulovým* číslem $q! \neq 0$.

Příklad. Antisymetrizací tenzoru $u_1 \otimes u_1 \otimes u_2$ dostaneme tenzor (sčítance odpovídají postupně permutacím id, (12), (23), (13), (231) a (321))

$$\frac{1}{6}(u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 - u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 - u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 - u_2 \otimes u_1 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 + u_2 \otimes u_1 \otimes u_1) = 0$$

Antisymetrizace zjevně zadává lineární zobrazení $\operatorname{Alt}\colon \bigotimes^q U \to \bigotimes^q U$.

Lemma 7.13. *Platí* $\rho_\sigma \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt} \circ \rho_\sigma$.

Důkaz. Dokážeme první rovnost, druhá se dostane podobně. Platí

$$\begin{aligned}\rho_\sigma(\operatorname{Alt}(t)) &= \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} \operatorname{sign}\tau \cdot \rho_\sigma(\rho_\tau(t)) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}(\tau\circ\sigma) \cdot \rho_{\tau\circ\sigma} t \\ &= \operatorname{sign}\sigma \cdot \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} \operatorname{sign}\tau \cdot \rho_\tau t = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{Alt}(t)\end{aligned}$$

(pro $\tau \in \Sigma_q$ zjevně probíhají permutace $\tau \circ \sigma$ přes každý prvek Σ_q právě jednou). □

Důsledek 7.14. *Obraz* $\operatorname{Alt}(\bigotimes^q U)$ *sestává právě ze symetrických tenzorů.*

Důkaz. Podle lemmatu je $\rho_\sigma(\operatorname{Alt}(t)) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{Alt}(t)$, takže $\operatorname{Alt}(t)$ je vždy antisymetrický. Na druhou stranu každý antisymetrický tenzor t leží v obraze Alt, neboť

$$\operatorname{Alt}(t) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} \operatorname{sign}\tau \cdot \rho_\tau t = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} t = t.$$ □

Ve skutečnosti z důkazu jednoduše plyne $\operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}$, takže Alt je projekce na prostor antisymetrických tenzorů.

Druhá rovnost z lemmatu říká $\operatorname{Alt}(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{Alt}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$, tj. Alt faktorizuje přes $\Lambda^q U$, takže dostáváme indukované zobrazení $s\colon \Lambda^q U \to \bigotimes^q U$. Platí

$$s(u_1 \wedge \cdots \wedge u_q) = \operatorname{Alt}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} \operatorname{sign}\sigma \cdot u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)},$$

z čehož dostáváme

$$p(s(u_1 \wedge \cdots \wedge u_q)) = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} \operatorname{sign}\sigma \cdot u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(q)} = \tfrac{1}{q!}\sum_{\tau\in\Sigma_q} u_1 \wedge \cdots \wedge u_q = u_1 \wedge \cdots \wedge u_q$$

a tím pádem $p \circ s = \mathrm{id}$. Názorně to znamená, že s vybírá z každé třídy rozkladu $\Lambda^q U = \bigotimes^q U/\ker p$ nějakého reprezenta této třídy; proto p indukuje izomorfismus $\operatorname{im} s \xrightarrow{\cong} \Lambda^q U$. Přitom zjevně $\operatorname{im} s = \operatorname{im} \operatorname{Alt}$ a podle důsledku se jedná o prostor antisymetrických tenzorů.

7.6. Báze prostoru antisymetrických tenzorů

Věta 7.15. *Nechť* $(e_1,\dots,e_n)$ *je báze prostoru* U. *Potom* $\{e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_q}\mid i_1<\dots<i_q\}$ *je báze* $\Lambda^q(U)$.

Důkaz. Důkaz je analogický symetrickému případu s tím, že antisymetrická q-lineární forma $\Phi\colon \prod^q U\to\mathbb{K}$ je jednoznačně určena svými hodnotami na q-ticích bázových vektorů s tím, že tyto hodnoty mohou být libovolné, ale antisymetrické, tj. jsou jednoznačně určeny (libovolnými) hodnotami na $(e_{i_1},\dots,e_{i_q})$, kde $i_1<\dots<i_q$. Při izomorfismu

$$\mathrm{Lin}_q(U,\dots,U;V)_{\mathrm{alt}}\cong\mathrm{Hom}(\Lambda^qU,V)$$

odpovídá Φ lineárnímu zobrazení $F\colon\Lambda^qU\to\mathbb{K}$ a platí tedy, že toto je jednoznačně určená svými (libovolnými) hodnotami

$$F(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_q})=\Phi(e_{i_1},\dots,e_{i_q}),$$

kde $i_1<\dots<i_q$. □

Důsledek 7.16. *Platí*

$$\dim\Lambda^q(U)=\binom{n}{q},$$

kde $n=\dim U$.

Věta 7.17 (Lineární nezávislost a vnější součin)**.** *Vektory* $u_1,\dots,u_q\in U$ *jsou lineárně závislé právě tehdy, když*

$$u_1\wedge\dots\wedge u_q=0.$$

Důkaz. Jsou-li $u_1,\dots,u_q$ lineárně nezávislé, lze je doplnit na bázi $(u_1,\dots,u_q,u_{q+1},\dots,u_n)$ prostoru U. Potom $u_1\wedge\dots\wedge u_q$ je jeden z prvků báze $\lambda^q(U)$, tudíž je různý od nuly.

Jsou-li $u_1,\dots,u_q$ lineárně závislé, pak jeden z nich je lineární kombinací ostatních, nechť je to

$$u_q=\sum_{i=1}^{q-1}a^iu_i.$$

Potom

$$\begin{aligned}u_1\wedge\dots\wedge u_q&=u_1\wedge\dots\wedge u_{q-1}\wedge\left(\sum_{i=1}^{q-1}a^iu_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{q-1}a^iu_1\wedge\dots\wedge u_{q-1}\wedge u_i=0.\end{aligned}$$

□

7.7. Vnější mocnina lineárního zobrazení

Nechť $\varphi\colon U\to V$ je lineární zobrazení. Již dříve jsme ukázali, že existuje lineární zobrazení

$$\varphi^{\otimes q}=\varphi\otimes\dots\otimes\varphi\colon\ \bigotimes^q U\to\bigotimes^q V$$

takové, že

$$\varphi^{\otimes q}(u_1\otimes\dots\otimes u_q)=\varphi(u_1)\otimes\dots\otimes\varphi(u_q).$$

Nyní ukážeme, že existuje zobrazení na kvocientech

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes^q U \arrow[r, "\varphi^{\otimes q}"] \arrow[d, "p"'] & \bigotimes^q V \arrow[d, "p"] \\
\Lambda^q U \arrow[r, dashed, "\varphi^{\wedge q}"'] & \Lambda^q V
\end{tikzcd}$$

K tomu zjevně stačí

$$p \circ \varphi^{\otimes q}(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign} \sigma \cdot p \circ \varphi^{\otimes q}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$$

neboli

$$\varphi(u_{\sigma(1)}) \wedge \cdots \wedge \varphi(u_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign} \sigma \cdot \varphi(u_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(u_q),$$

což ale platí. Indukované zobrazení značíme $\varphi^{\wedge q} \colon \Lambda^q U \to \Lambda^q V$.

7.8. Vnější mocniny a determinanty

Věta 7.18. *Nechť $\varphi \colon U \to U$ je lineární zobrazení, které má v bázi $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ prostoru U matici $A = (a^i_j)$. Potom platí*

$$\varphi^{\wedge n}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \det A \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned}
\varphi^{\wedge n}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= \varphi(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_n) \\
&= \left(\sum_{j_1} a^{j_1}_1 e_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n} a^{j_n}_n e_{j_n} \right) \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_n} a^{j_1}_1 \dots a^{j_n}_n \cdot e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_q} a^{\sigma(1)}_1 \dots a^{\sigma(n)}_n \cdot e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_q} a^{\sigma(1)}_1 \dots a^{\sigma(n)}_n \operatorname{sign} \sigma \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\
&= \det A \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned}$$

□

Důsledek 7.19. *Nechť $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je báze U a uvažme $\alpha \cdot P = (v_1, \dots, v_n)$ pro libovolnou matici P. Potom platí $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det P \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$.*

Důkaz. Obě α, $\beta = \alpha \cdot P$ lze chápat jako zobrazení $\mathbb{K}^n \to U$ posílající standardní bázi $(e_1, \dots, e_n)$ na danou n-tici vektorů, pro tato zobrazení pak platí $\beta = \alpha \circ P$ a dostáváme komutativní diagram

$$\begin{tikzcd}
e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \arrow[dr, mapsto] \arrow[rrrr, bend left, mapsto] & \Lambda^n \mathbb{K}^n \arrow[rr, "P^{\wedge n}"] \arrow[dr, "\beta^{\wedge n}"'] & & \Lambda^n \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\alpha^{\wedge n}"] & \det P \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \arrow[dl, mapsto] \\
& v_1 \wedge \cdots \wedge v_n & \Lambda^n U & \det P \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_n &
\end{tikzcd}$$

Tvrzení jednoduše plyne z komutativity. □

Příklad. Nechť matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ reprezentuje lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Čemu se rovná $A^{\wedge 2}$?

Řešení. $A^{\wedge 2}\colon \Lambda^2\mathbb{R} = \mathbb{R} \to \Lambda^2\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Podle předchozí věty je matice tohoto zobrazení rovna

$$\det A = -1.$$

◇

Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte kanonický tvar matice $A^{\wedge 3}$.

Matice A má vlastní čísla 1, 0, 2, 3 a příslušné vlastní vektory u_1, u_2, u_3, u_4 tvoří bázi $\mathbb{R}^4$. Potom $u_i \wedge u_j \wedge u_k$ tvoří bázi $\Lambda^3\mathbb{R}^4$.

Protože

$$A^{\wedge 3}(u_i \wedge u_j \wedge u_k) = Au_i \wedge Au_j \wedge Au_k = \lambda_i\lambda_j\lambda_k u_i \wedge u_j \wedge u_k,$$

má matice $A^{\wedge 3}$ vlastní vektory, které tvoří bázi $\Lambda^3\mathbb{R}^4$ s vlastními čísly 0, 0, 0, 6. Tedy Jordanův kanonický tvar matice $A^{\wedge 3}$ bude

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Kontrolní otázky

1. Nechť lineární transformace $\varphi\colon U \to U$ má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$. Jaká vlastní čísla má duální zobrazení $\varphi^*\colon U^* \to U^*$?
2. Nechť $\mathbb{R}_3[x]$ je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 3. Udejte příklad nenulové lineární formy $\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$, nenulové bilineární formy $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, nenulové 3-lineární formy $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$.
3. Vyslovte definici tenzorového součinu $U \otimes V$ a vysvětlete, co je tenzor $u \otimes v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.
4. Ukažte, jak se použije univerzální vlastnost tenzorového součinu pro definici zobrazení $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, kde $\varphi_1\colon U_1 \to V_1$, $\varphi_2\colon U_2 \to V_2$ jsou lineární zobrazení. Nechť φ_1 je dáno maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, φ_2 je dáno maticí $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Vypočtěte $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ na $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
5. Udejte příklad nenulového symetrického tenzoru $S^3(\mathbb{R}^2)$.
6. Vysvětlete, co znamená symbol $i_v\omega$, kde $v \in U$, $\omega \in \Lambda^k(U^*)$. Vyjádřete pro $U = \mathbb{R}^3$, $\omega(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$ a $v = (1, 2, 3)$.

Příklady k procvičení

1. Vyčíslete tenzory:

(a) $t = f^1 \otimes e_2 + f^2 \otimes (e_1 + 3e_3) \in T^1_1(\mathbb{R}^3)$ na vektoru $v = e_1 + 5e_2 + 4e_3$ a formě $f = f^1 + f^2 + f^3$.

(b) $t \in T^2_3(\mathbb{R}^4)$ se všemi souřadnicemi rovnými 3 na pětici (v, v, v, f, f), kde $f = f^1 - f^4$ a $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$.

(c) $r = 2 \cdot t \otimes s + s \otimes t$, kde $t = 2 \cdot f^1 \otimes e_1$, $s = f^2 \otimes (2e_1 - e_2)$, na čtveřici $(e_1, 3e_1 - e_2, 2f^1 + f^2, f^1)$.

[Řešení: (a) $t(v, f) = 21$; (b) $t(v, v, v, f, f) = 0$; (c) $r(e_1, 3e_1 - e_2, 2f^1 + f^2, f^1) = -16$.]

2. Spočtěte souřadnice

(a) $\bar{t}^{12}_1$ tenzoru $t \in T^2_1(\mathbb{R}^2)$, jehož souřadnice jsou v bázi (e_1, e_2) všechny rovny 1, v nové bázi

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) $\bar{t}^1_{12}$ tenzoru $t = f^1 \otimes f^2 \otimes (e_1 + e_2) \in T^1_2(\mathbb{R}^2)$ v nové bázi

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) $\bar{t}^{12}_{31}$ tenzoru $f^2 \otimes f^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes e_1 \otimes e_2 \in T^2_2(\mathbb{R}^3)$ v nové bázi

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $\bar{t}^{12}_{123}$ tenzoru $t \in T^2_3(\mathbb{R}^3)$ se všemi souřadnicemi rovnými dvěma v bázi (e_1, e_2, e_3) v nové bázi

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Řešení: (a) $\bar{t}^{12}_1 = -9$; (b) $\bar{t}^1_{12} = 4$; (c) $\bar{t}^{12}_{31} = 3$; (d) $\bar{t}^{12}_{123} = 0$.]

3. Spočtěte kontrakci tenzoru

(a) $3 \cdot f^1 \otimes e_1 \otimes e_2 - 2 \cdot f^2 \otimes e_2 \otimes e_2$ podle 1. a 2. složky.

(b) $(f^1 - 2f^3 + 3f^4) \otimes (e_1 + 3e_2 - e_3)$

(c) $(f^1 + f^2 + f^3 + f^4) \otimes e_1 + (f^1 + 2f^2 + 2f^3 + 4f^4) \otimes e_2 + 2(f^1 - f^2 - f^4) \otimes e_3$

(d) $f^2 \otimes f^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes e_1 \otimes e_2$ podle druhých složek.

[Řešení: (a) $-2e_2$; (b) 3; (c) 3; (d) $f^2 \otimes e_3$.]

4. Pomocí matice
$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
proveďte snížení a povýšení tenzoru $(f^1 + f^2) \otimes (e_3 + e_4) - (f^1 + f^3) \otimes e_3$

   [Řešení: Snížení $(3e_1 + 2e_2) \otimes (e_3 + e_4) - (2e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \otimes e_2$, povýšení $(f^1 + f^2) \otimes f^3 + (f^1 + f^3) \otimes (f^4 - 2f^3)$.]

5. Nechť $t \in T^2_0(U)$ je symetrický a $s \in T^0_2(U)$ antisymetrický tenzor. Dokažte, že tenzor vzniklý násobením a následnou kontrakcí v obou složkách $t_{ij}s^{ij}$ je roven nule.
6. Dokažte, že pro operátory symetrizace $S\colon T^q_0(U) \to S^q(U)$ a antisymetrizace $A\colon T^q_0(U) \to \Lambda^q(U)$ platí
$$S \circ A = A \circ S = 0.$$
7. Dokažte, že pro $\dim U > 2$ nejsou prostory $\Lambda^2\big(\Lambda^2(U)\big)$ a $\Lambda^4(U)$ izomorfní.
8. Dokažte, že tenzor $t_{ijk} \in T^3_0(U)$ symetrický vzhledem k i, j a antisymetrický vzhledem k j, k je roven nule.

8. Determinanty, objemy a orientace

8.1. Objemová forma a determinant

Objemová forma na U je libovolná nenulová antisymetrická n-lineární forma $\mathrm{Vol}\colon \prod^n U \to \mathbb{K}$, kde $n = \dim U$, tj.

$$\mathrm{Vol} \in \mathrm{Lin}_n(U, \ldots, U; \mathbb{K})_{\mathrm{alt}} \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^n U, \mathbb{K}) \ni \mathrm{vol};$$

odpovídající lineární formu budeme značit $\mathrm{vol}\colon \Lambda^n U \to \mathbb{K}$. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je libovolná báze U. Nenulovost Vol je ekvivalentní tomu, že $\mathrm{vol}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \mathrm{Vol}(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$, neboť $\Lambda^n U$ je generovaný $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

Hodnotu $\mathrm{Vol}(u_1, \ldots, u_n)$ nazýváme *orientovaným objemem* rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory. Díky objemové formě můžeme interpretovat determinant operátoru $\varphi\colon U \to U$. Platí totiž

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)) &= \mathrm{vol}(\varphi(u_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(u_n)) \\ &= \det \varphi \cdot \mathrm{vol}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) \\ &= \det \varphi \cdot \mathrm{Vol}(u_1, \ldots, u_n), \end{aligned}$$

tedy zobrazení φ zvětší objem $(\det \varphi)$-krát. Tato vlastnost nezávisí na volbě objemové formy – podstatné je, že se jedná o „relativní tvrzení“, tedy neříkáme nic o tom, jaký je výsledný objem, ale pouze ho porovnáváme s původním. Pokud bychom však chtěli definovat determinant lineárního zobrazení mezi dvěma různými vektorovými prostory (stejné dimenze), museli bychom na nich zafixovat objemové formy.

Je-li $(v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n) \cdot P$, pak platí

$$\mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \mathrm{vol}(\det P \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) = \det P \cdot \mathrm{Vol}(u_1, \ldots, u_n).$$

Příklad. Na $\mathbb{K}^n$ máme *standardní* objemovou formu, jejíž hodnota na standardní bázi je

$$\mathrm{Vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

Pro libovolnou n-tici vektorů $(u_1, \ldots, u_n)$ pak lze psát

$$(u_1, \ldots, u_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot P,$$

kde matice přechodu P je tvořena právě vektory $u_1, \ldots, u_n$, a potom

$$\mathrm{Vol}(u_1, \ldots, u_n) = \det P \cdot \mathrm{Vol}(e_1, \ldots, e_n) = \det P.$$

Dohromady $\mathrm{Vol}(u_1, \ldots, u_n)$ je determinant matice, jejíž sloupce jsou tvořeny těmito vektory.

8.2. Orientace

Naším dalším cílem bude definovat orientovaný objem v Eukleidovském prostoru – protože máme velikosti a úhly, je víceméně jasné jak objem definovat; pro orientovaný objem budeme ale potřebovat ještě orientaci *reálného* vektorového prostoru U. Řekneme, že dvě báze $(e_1, \ldots, e_n)$ a $(\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n)$ jsou *shodně orientované*, jestliže platí

$$\widetilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{e}_n = c \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$$

pro nějaké kladné $c \in \mathbb{R}$. Konstanta c je tímto vztahem samozřejmě jednoznačně určena – jedná se o determinant matice přechodu od první báze k druhé – a je tedy nenulová. Pro c záporné mluvíme o *opačně orientovaných* bázích. Takto nám na množině všech bází vzniká relace ekvivalence mající právě dvě třídy, které nazýváme *orientace* U. Pokud je na U zvolena orientace, říkáme, že je U *orientovaný* a prvky vybrané orientace nazýváme *kladné báze*, zatímco zbylé jsou *záporné báze*.

Příklad. Na $\mathbb{R}^n$ definujme standardní orientaci jako třídu bází obsahující standardní bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Příklad. Nechť V je komplexní vektorový prostor a $V^{\mathbb{R}}$ značí reálný vektorový prostor s touž nosnou množinou, týmž sčítáním, ale s násobením skaláry zúženém na reálná čísla; mluvíme o realifikaci V. Na $V^{\mathbb{R}}$ existuje kanonická orientace (závisející samozřejmě na komplexní struktuře), kterou nyní popíšeme. Zvolme libovolnou bázi $(e_1, \dots, e_n)$ komplexního prostoru V. Potom

$$(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$$

je báze reálného prostoru $V^{\mathbb{R}}$ a prohlásíme ji za kladnou bázi. Je potřeba ukázat, že pro jinou volbu komplexní báze bude vzniklá reálná báze shodně orientovaná a tím pádem dostáváme opravdu dobře definovanou orientaci.

Matice přechodu mezi dvěma komplexními bázemi je však libovolná invertibilní komplexní matice a musíme tedy ukázat, že reálná matice příslušná libovolné invertibilní matici má kladný determinant. Rozložme komplexní matici přechodu na součin elementárních matic. Příslušná matice přechodu mezi reálnými bázemi je tak opět součinem jistých „elementárních“ matic. Přičítání (komplexního) násobku dá matici determinantu 1, prohození dvou řádků taktéž (příslušná reálná matice odpovídá prohození dvou dvojic řádků). Násobení komplexním číslem má příslušnou reálnou matici vzniklou z jednotkové výměnou dvou jedniček za blok

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

který má determinant $a^2 + b^2 > 0$.

Vraťme se nyní k obecné situaci reálného vektorového prostoru U.

Věta 8.1. *Dvě báze α, β jsou shodně orientované, právě když je lze spojit cestou, tj. právě když existuje spojité zobrazení*

$$\gamma\colon [0,1] \to U \times \cdots \times U = U^n$$

splňující následující

- *$\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \beta$ a*
- *pro každé $t \in [0,1]$ je n-tice $\gamma(t)$ bází U.*

Poznámka. Spojitost jistě dává smysl pro $U = \mathbb{R}^n$. Avšak libovolný (konečně rozměrný) reálný vektorový prostor je izomorfní $\mathbb{R}^n$ a spojitost lze definovat ve smyslu tohoto izomorfismu – hlavně na volbě takového izomorfismu nezávisí.

Důkaz. Není těžké se přesvědčit, že každou čtvercovou matici s *kladným* determinantem lze napsat jako součin elementárních s kladným determinantem. Prohození dvou sloupců lze nahradit kompozicí operací $I \to I+II$, $II \to II-I$, $I \to I+II$, která samozřejmě zároveň s prohozením sloupců také jeden z nich vynásobí číslem -1, ale Gaussova eliminace lze provádět i s touto operací. Vynásobení dvou sloupců číslem -1 lze nahradit provedením dvou předchozích složených operací za sebou.

Dále není těžké se přesvědčit, že každá z elementárních matic T_i s kladným determinantem lze spojit s jednotkovou maticí E cestou Γ_i procházející pouze maticemi s kladným determinantem. Jejich součin $T = T_1 \cdots T_k$ pak lze spojit s jednotkovou maticí jednoduše pomocí cesty

$$t \mapsto \Gamma_1(t) \cdots \Gamma_k(t).$$

Jelikož však platí

$$\alpha = \beta \cdot T,$$

hledaná cesta mezi bázemi α, β lze volit například jako

$$t \mapsto \beta \cdot \Gamma_1(t) \cdots \Gamma_k(t).$$

V opačném směru veličina $(\det \mathrm{id}_{\gamma(t)\alpha}) \in \mathbb{R}^\times$ závisí spojitě na t a její hodnota pro $t = 0$ je 1. Proto i její hodnota pro $t = 1$ musí být kladná, tj. $(\det \mathrm{id}_{\beta\alpha}) > 0$ a báze α, β jsou shodně orientované. $\square$

Důležitým příkladem objemové formy je objemová forma vzniklá ze skalárního součinu na *orientovaném* Eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. To by nemělo být překvapující – skalární součin na $\mathcal{E}$ udává smysl velikosti vektorů a úhlů mezi nimi; z těchto údajů lze objem spočítat. Objemová forma však udává orientovaný objem, proto je navíc potřeba ještě volba orientace. Z jiného úhlu pohledu na Eukleidovském prostoru jsou dvě objemové formy a není žádný důvod preferovat jednu z nich; ten nastává až při zafixování orientace. Pro neorientovaný Eukleidovský prostor bychom mohli nadefinovat pouze neorientovanou objemovou „formu“ $|\operatorname{Vol}|$; k ní se vrátíme za chvíli.

Nechť $\alpha = (e_1, \ldots, e_n)$ je libovolná kladně orientovaná ortonormální báze. Kanonickou objemovou formu zafixujeme požadavkem

$$\operatorname{Vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

Je-li $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ jiná kladně orientovaná ortonormální báze, pak matice přechodu má kladný determinant a je ortogonální, takže tento determinant musí být roven 1, a proto

$$\operatorname{Vol}(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n) = 1 \cdot \operatorname{Vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

a požadavek na Vol tedy nezávisí na volbě báze α.

Nechť nyní $\beta = (u_1, \ldots, u_n)$ je libovolná n-tice vektorů a pišme $\beta = \alpha \cdot P$, kde „transformační matice“ P má prvky souřadnice vektorů u_j v bázi α, tj. $p^i_j = f^i(u_j)$. Potom

$$\operatorname{Vol}(u_1, \ldots, u_n) = \det P \cdot \operatorname{Vol}(e_1, \ldots, e_n) = \det P.$$

Jelikož je báze α kladná, má β stejné znaménko jako $\det P$, tedy jako $\operatorname{Vol}(u_1, \ldots, u_n)$.

Tvrzení 8.2. *Orientovaný objem* $\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)$ *lze spočítat jako determinant matice, jejíž* j*-tý sloupec je tvořen souřadnicemi vektoru* u_j *v libovolné kladné ortonormální bázi (ta však musí být stejná pro všechny sloupce). Zejména*

$$\operatorname{sign} \mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \operatorname{sign}(u_1, \dots, u_n).$$

Jeho druhou mocninu lze spočítat jako Gramův determinant

$$(\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n))^2 = \det(\langle u_i, u_j \rangle)$$

z matice, jejíž prvek na pozici (i, j) *je skalární součin* $\langle u_i, u_j \rangle$.

Důkaz. Druhé tvrzení plyne z prvního uvážením $\det(P^{\mathrm{T}}P)$. Na pozici (i, j) dostaneme součin i-tého a j-tého sloupce P, tedy

$$\sum_k f^k(u_i) f^k(u_j) = \langle u_i, u_j \rangle$$

(jedná se o vzorec pro skalární součin v ortonormálních souřadnicích). □

Jako důsledek dostáváme vzorec pro neorientovaný objem na Eukleidovském prostoru jako odmocninu z Gramova determinantu – ten závisí pouze na skalárním součinu a nikoliv na orientaci. Z tohoto pohledu lze interpretovat Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jako vzorec pro objem. Během něj totiž měníme každý vektor pouze přičítáním násobků předchozích vektorů a nemění se tedy orientovaný objem. Přitom po provedení celého procesu a pro vzniklý ortogonální systém $(v_1, \dots, v_n)$ je Gramova matice diagonální a neorientovaný objem je tak roven

$$|\mathrm{Vol}(u_1, \dots, u_n)| = |v_1| \cdots |v_n|,$$

tedy součinu velikostí vektorů $v_1, \dots, v_n$. Znaménko je též jako u původního orientovaného objemu a je tedy určeno tím, zda je $(u_1, \dots, u_n)$ báze kladná či záporná (v případě, že se nejedná vůbec o bázi, je objem beztak nulový). Přitom velikost vektoru v_i je rovna výšce rovnoběžnostěnu určeného $u_1, \dots, u_i$ s podstavou danou prvními $i - 1$ vektory. Jedná se tedy o vzorec

$$\text{objem rovnoběžnostěnu} = \text{objem podstavy} \times \text{výška}$$

Hlavní význam této formulky je pro nás v tom, že po několika stránkách je snad konečně zřejmé, proč tomuto objektu říkáme orientovaný objem.

8.3. Geometrie v rovině a prostoru

Prvně se zabývejme rovinou $\mathcal{E}_2$, kterou budeme chápat jako $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem a standardní orientací. Ta je mimochodem totožná s tou vzniklou z komplexní struktury na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Pro vektory $u, v \in \mathcal{E}_2$ počítejme neorientovaný objem z Gramova determinantu

$$(\mathrm{Vol}(u, v))^2 = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{vmatrix} = |u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle^2 = |u|^2|v|^2 \sin^2 \alpha,$$

kde α je úhel mezi vektory u, v a rovnost plyne z $\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \alpha$. Odmocněním dostáváme vztah

$$|\mathrm{Vol}(u, v)| = |u||v||\sin \alpha|.$$

Standardně bereme $\alpha \in [0, \pi]$, díky orientaci můžeme nyní rozšířit definiční obor na $\alpha \in (-\pi, \pi]$ a zvolit znaménko podle orientace (u, v). Mluvíme pak o *orientovaném úhlu* od vektoru u k vektoru v a můžeme psát

$$\begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} = \mathrm{Vol}(u, v) = |u||v| \sin \alpha.$$

Budeme psát $\alpha = \sphericalangle(u, v)$. (Lépe je samozřejmě brát $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.)

Orientovaný úhel se hodí v úlohách, ve kterých je potřeba (zejména algoritmicky) rozhodnout o viditelnosti objektů v rovině. Dalším případem je úloha rozhodnout, zda mnohoúhelník $A_1 \cdots A_n$ zadaný posloupností vrcholů je kladně či záporně orientovaný (v případě, že nevíme, zda je konvexní). Velice jednoduchým způsobem (alespoň z teoretického pohledu) je spočítat všechny orientované úhly

$$\sphericalangle(A_nA_1, A_1A_2), \sphericalangle(A_1A_2, A_2A_3), \dots, \sphericalangle(A_{n-1}A_n, A_nA_1)$$

podél mnohoúhelníka a sečíst je. Pokud je součet roven 2π, je mnohoúhelník kladně orientovaný, pokud -2π, je záporně orientovaný. Ostatní případy nemohou pro mnohoúhelník nastat a lze takto i detekovat některé případy, kdy se nejedná o mnohoúhelník (zdaleka ne však všechny). V případě, kdy je mnohoúhelník konvexní, budou mít všechny úhly stejné znaménko a to lze spočítat pomocí orientovaného objemu (u čtyřúhelníku stačí spočítat znaménka i v nekonvexním případě). Jiným řešením je sečíst orientované objemy

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Vol}(A_1A_2, A_1A_3) + \cdots + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Vol}(A_1A_{n-1}, A_1A_n).$$

Pokud je výsledek kladný, je mnohoúhelník kladně orientovaný a naopak.

Příklad. Ukažme nyní, že výše uvedený součet vyjadřuje obsah mnohoúhelníku $A_1 \cdots A_n$. V prvním kroku dokážeme o něco obecněji, že součet

$$\mathrm{Vol}(XA_1, XA_2) + \cdots + \mathrm{Vol}(XA_{n-1}, XA_n) + \mathrm{Vol}(XA_n, XA_1)$$

nezávisí na volbě bodu X. To je tím, že

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(YA_i, YA_{i+1}) &= \mathrm{Vol}(YX + XA_i, YX + XA_{i+1}) \\ &= \mathrm{Vol}(XA_i, XA_{i+1}) + \mathrm{Vol}(YX, XA_{i+1}) + \mathrm{Vol}(XA_i, YX), \end{aligned}$$

kde členy $\mathrm{Vol}(YX, XA_{i+1})$ se při sečtení vyruší se členy $\mathrm{Vol}(XA_i, YX) = -\mathrm{Vol}(YX, XA_i)$.

V dalším kroku ukážeme, že existuje vnitřní diagonála A_iA_j, která protíná mnohoúhelník pouze v koncových bodech. Pak lze induktivně předpokládat, že vzorec pro obsah funguje pro oba mnohoúhelníky vzniklé rozdělením podél A_iA_j a jejich sečtením dokázat, že tento vzorec funguje také pro původní mnohoúhelník (členy obsahující diagonálu se vyruší). Nechť A_i je bod s nejmenší x-ovou souřadnicí. Pokud leží uvnitř trojúhelníku $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ nějaký další vrchol mnohoúhelníku, zvolíme za A_j ten s nejmenší x-ovou souřadnicí. Pokud ne, zvolíme za dělící diagonálu $A_{i-1}A_{i+1}$.

Poznámka. Orientovaná Eukleidovská rovina[4] je kanonicky (jednorozměrným) komplexním vektorovým prostorem: násobení i je rotace o $90°$ v kladném směru. Tím lze také definovat

[4] Ve skutečnosti stačí mít skalární součin zadán až na násobek – takové struktuře se říká konformní; lze v ní měřit úhly a porovnávat velikosti. Typickým příkladem konformního zobrazení, které není ortogonální, je stejnolehlost.

orientovaný úhel mezi nenulovými vektory u, v jako $\sphericalangle(u, v) = \arg(v/u)$ – je totiž $v = z \cdot u$ pro jediné komplexní číslo z, jehož argument je přesně onen orientovaný úhel.

Neorientovaná rovina má dvě komplexní struktury, které se navzájem liší o komplexní konjugaci. Ve výsledku je tak úhel jednoznačný až na znaménko.

Přejděme nyní ke standardnímu orientovanému Eukleidovskému třírozměrnému prostoru $\mathcal{E}_3$. Krom skalárního součinu lze na $\mathcal{E}_3$ definovat vektorový součin pomocí objemové formy. Po dosazení dvou vektorů $u, v \in \mathcal{E}_3$ se z objemové formy stane lineární forma

$$\mathrm{Vol}(u, v, -)\colon \mathcal{E}_3 \to \mathbb{R}.$$

Každá lineární forma je rovna skalárnímu součinu s jednoznačně určeným vektorem, který v tomto případě značíme $u \times v$. Je tedy definován vztahem

$$\mathrm{Vol}(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle.$$

V kladné ortonormální bázi lze vektorový součin spočítat jako

$$\begin{aligned} u \times v &= \langle u \times v, e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle u \times v, e_2 \rangle \cdot e_2 + \langle u \times v, e_3 \rangle \cdot e_3 \\ &= \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & 1 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 1 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 1 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & e_1 \\ u^2 & v^2 & e_2 \\ u^3 & v^3 & e_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

kde výsledný determinant dává smysl pouze, pokud jej rozvineme podle třetího sloupce; dostaneme pak korektní vzorec

$$u \times v = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u^3 & v^3 \\ u^1 & v^1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} e_3.$$

Zabývejme se nyní abstraktními vlastnostmi vektorového součinu. Z antisymetrie platí

$$\langle u \times v, u \rangle = \mathrm{Vol}(u, v, u) = 0,$$

a proto je $u \times v$ kolmý na u a analogicky také na v. Tím je určen jeho směr, nyní určíme orientaci a na závěr jeho velikost. Orientace je dána tím, že

$$\mathrm{Vol}(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle \geq 0$$

a je tedy $(u, v, u \times v)$ kladně orientovaná (za předpokladu, že se jedná o bázi; v opačném případě však $u \times v = 0$ a jeho orientaci není potřeba určovat).

Zbývá spočítat velikost $u \times v$. Pomocí Gramova determinantu

$$\begin{aligned} |u \times v|^2 = \langle u \times v, u \times v \rangle = \mathrm{Vol}(u, v, u \times v) &= \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle & 0 \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle u \times v, u \times v \rangle \end{vmatrix}^{1/2} \\ &= \big(|u|^2 |v|^2 - \langle u, v \rangle^2\big)^{1/2} \cdot |u \times v| \end{aligned}$$

Pomocí úhlu α mezi vektory u, v dostáváme finální vztah

$$|u \times v| = |u||v| \sin \alpha.$$

Tentokrát není možné přiřadit úhlu α orientaci jako v rovinném případě.

Věta 8.3. *Vektorový součin má následující vlastnosti (které ho jednoznačně určují)*

- *Vektorový součin* $- \times -$ *je antisymetrické bilineární zobrazení.*
- *Vektor* $u \times v$ *je kolmý na* u *a* v.
- *Vektor* $u \times v$ *je nenulový, právě když jsou* u, v *lineárně nezávislé a pak*
- *báze* $(u, v, u \times v)$ *je kladně orientovaná.*
- *Platí* $|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$.

nd 8.4. Vztah kvaternionů a orientovaného objemu

Obecně můžeme říct, že objemová forma je *kompatibilní* se skalárním součinem, jestliže $|\operatorname{Vol}(u_1, \ldots, u_n)| = |u_1| \cdots |u_n|$ kdykoliv $u_1, \ldots, u_n$ tvoří ortonormální systém vektorů. Nad $\mathbb{R}$ je pak objemová forma Vol určena jednoznačně až na znaménko (orientaci), nad $\mathbb{C}$ jednoznačně až na násobek komplexní jednotkou. Jednoduchou modifikací ortonormální báze lze najít takovou ortonormální bázi, jejíž objem je roven 1. Standardní báze $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ jsou příklady takových bází.

Zabývejme se prvně krátce situací v reálné Eukleidovské rovině $\mathcal{E}_2$. Objemová forma je

$$\operatorname{Vol}\colon \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R},$$

kterou můžeme díky skalárnímu součinu přepsat jako

$$\operatorname{Vol}(u, v) = \langle Iu, v \rangle.$$

Protože je objemová forma kompatibilní se skalárním součinem, máme

$$\operatorname{Vol}(e_1, e_1) = 0, \qquad \operatorname{Vol}(e_1, e_2) = 1, \qquad \operatorname{Vol}(e_2, e_1) = -1, \qquad \operatorname{Vol}(e_2, e_2) = 0$$

a tedy $Ie_1 = e_2$, $Ie_2 = -e_1$. Díky tomu $I^2 = -\operatorname{id}$ a zobrazení I zadává na V strukturu komplexního vektorového prostoru: $v(a + bi) = va + I(vb)$ (samozřejmě, I je rotace o 90° v kladném směru).

Nyní se zabývejme stejnou situací v „komplexní Eukleidovské rovině“ $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$. Předpokládejme, že skalární součin je lineární v druhé složce a tzv. „konjugovaně lineární“ v první složce, tj. platí $\langle \alpha u, v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$. Objemová forma je $\operatorname{Vol}\colon \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}} \times \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, kterou můžeme díky skalárnímu součinu přepsat jako

$$\operatorname{Vol}(u, v) = \langle Ju, v \rangle.$$

Tentokrát je $J\colon \overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}} \to \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$ konjugovaně lineární,

$$\langle J(u\alpha), v \rangle = \operatorname{Vol}(u\alpha, v) = \alpha \operatorname{Vol}(u, v) = \alpha \langle Ju, v \rangle = \langle (Ju)\overline{\alpha}, v \rangle,$$

tj. $J(u\alpha) = (Ju)\overline{\alpha}$. Z kompatibility se skalárním součinem $Je_1 = e_2$, $Je_2 = -e_1$ a proto $J^2 = -\operatorname{id}$ (druhá iterace už je lineární) a zobrazení J zadává na $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$ strukturu kvaternionického vektorového prostoru: definujme kvaternionickou algebru $\mathbb{H}$ jako podalgebru generovanou I, $J \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$, kde $I = iE$ je násobení imaginární jednotkou i. Ukážeme, že jako vektorový prostor je generovaná E, I, J, $K = IJ$: už víme, že platí $I^2 = J^2 = -E$, $IJ = -JI = K$, počítejme nyní $K^2 = -JIIJ = J^2 = -E$ a obdobně $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$. Platí

$$Ee_1 = e_1, \qquad Ie_1 = e_1 i, \qquad Je_1 = e_2, \qquad Ke_1 = e_2 i$$

a tedy zobrazení $\mathbb{H} \to \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$, $Q \mapsto Qe_1$ je izomorfismus. Obrazy E, I, J, K značíme postupně 1, i, j, k a v dalším budeme o $\mathbb{H}$ uvažovat jako o prostoru $\mathbb{R}^4 = [1, i, j, k]$ společně s násobením daným výše uvedenými vztahy.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

8.5. Dodatek ke geometrii v prostoru

V této části dáme do souvislosti geometrii v prostoru s kvaterniony. Připomeňme, že kvaterniony vzniknou z komplexních čísel přidáním jednotky j, která antikomutuje s komplexní jednotkou i, tj. platí $ij = -ji$, a splňuje $i^2 = j^2 = -1$. Označme $k = ij$. Potom máme následující

$$q = (a + xi) + (y + zi)j = a + (xi + yj + zk).$$

Číslo a nazveme *reálnou částí* kvaternionu q a $v = xi + yj + zk$ jeho *vektorovou částí*; lze totiž tuto část ztotožnit s vektorem $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Chápeme proto komplexní jednotky i, j, k jako vektory standardní báze. Pro jejich součin platí výše uvedená tabulka, díky níž se snadno ověří, že

$$v \cdot w = -\langle v, w\rangle + v \times w.$$

Jelikož je skalární součin komutativní a vektorový součin antikomutativní, dostáváme snadno vztahy

$$\langle v, w\rangle = -\tfrac{1}{2}(vw + wv) = -\operatorname{Re}(uv), \quad v \times w = \tfrac{1}{2}(vw - wv) = \operatorname{Im}(uv).$$

Orientovaný objem $\operatorname{Vol}(u, v, w)$ získáme jako reálnou část

$$\operatorname{Vol}(u, v, w) = -\tfrac{1}{4}(uvw - vuw + wuv - wvu) = -\operatorname{Re}(uvw).$$

Zabývejme se nyní inverzí kvaternionu $q = a+v$. K tomu nám poslouží konjugovaný kvaternion $q^* = a - v$. Platí

$$q^*q = (a - v)(a + v) = aa - vv = aa + \langle v, v\rangle = |a|^2 + |v|^2 = |q|^2$$

a tedy $q^{-1} = |q|^{-2}q^*$. Zejména, pokud je q jednotkový kvaternion, tj. $|q| = 1$, dostáváme $q^{-1} = q^*$. Kvaterniony mají také goniometrický tvar; my si vystačíme s jednotkovými kvaterniony, pro něž platí

$$q = \cos\varphi + v \sin\varphi,$$

kde $\varphi \in [0, \pi]$ a $v \in \mathbb{R}^3$ je jednoznačně určený jednotkový vektor s vyjímkou $q = \pm 1$, tj. $\varphi \in \{0, \pi\}$, kdy není určený vůbec. Občas je také výhodné zapisovat

$$e^{\varphi v} = \cos\varphi + v \sin\varphi.$$

Tento vztah dává smysl zejména, když výraz vlevo rozvineme do Taylorovy řady a využijeme vztahu $v^2 = -|v|^2 = -1$. Pro inverzní kvaternion platí $(e^{\varphi v})^{-1} = e^{-\varphi v}$.

Poznámka. Obecně pak platí vztah

$$\log(e^v e^w) = v + w + v \times w + \cdots$$

a známé pravidlo pro násobení mocnin v kvaternionech neplatí – důvodem je, že nejsou komutativní.

Dva ryze imaginární kvaterniony komutují, $vw = wv$, právě když $v \parallel w$ a antikomutují, $vw = -wv$, právě když $v \perp w$. Lze proto spočítat pro $v \parallel w$

$$e^{\varphi v} w e^{-\varphi v} = e^{\varphi v} e^{-\varphi v} w = w,$$

což znamená, že vektor w se touto konjugací zachovává. Naopak pro $v \perp w$ platí

$$we^{-\varphi v} = w(\cos\varphi - v\sin\varphi) = (\cos\varphi + v\sin\varphi)w = e^{\varphi v} w$$

a proto

$$e^{\varphi v} w e^{-\varphi v} = e^{\varphi v} e^{\varphi v} w = e^{2\varphi v} w = (\cos 2\varphi)w + (\sin 2\varphi) v \times w.$$

Vektor $v \times w$ je kolmý jak na v, tak na w a má stejnou velikost jako w. Leží tedy $e^{\varphi v} w e^{-\varphi v}$ na kružnici procházející w a $v \times w$ a nachází se od w vzdálen o úhel 2φ. Ve výsledku tak konjugace $e^{\varphi v}$ geometricky odpovídá rotaci o úhel 2φ okolo osy dané vektorem v. Z těchto úvah plyne poměrně praktický popis toho, jak spočítat složení dvou rotací.

Příklad. Nechť například R je rotace okolo osy x o úhel $60°$ a S je rotace okolo osy z o úhel $90°$. Potom R odpovídá konjugaci kvaternionem $e^{\pi/6 \cdot i}$ a S konjugaci $e^{\pi/4 \cdot k}$. Jejich složení SR je potom dané kvaternionem

$$\begin{aligned} e^{\pi/4\cdot k} e^{\pi/6 \cdot i} &= (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot k)(\sqrt{3}/2 + 1/2 \cdot i) \\ &= \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 \cdot i + \sqrt{2}/4 \cdot j + \sqrt{6}/4 \cdot k. \end{aligned}$$

Ve výsledku se tak jedná o rotaci okolo osy dané vektorem $(1, 1, \sqrt{3})$ o úhel $2\arccos(\sqrt{6}/4)$.

Poznamenejme, že tento příklad lze počítat také pomocí matic. Složení dvou zadaných rotací má matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je $(1, 1, \sqrt{3})$, jak se snadno spočítá, a stopa této matice je

$$\tfrac{1}{2} = 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1 + 2\cos\varphi,$$

z čehož vychází $\varphi = \arccos(-\frac{1}{4})$. Těžší je zjistit, jestli se jedná o rotaci v kladném či záporném směru.

Podobně se dají reprezentovat reflexe. Zobrazení $w \mapsto vwv$ je na vektorech $v \parallel w$ rovno

$$vwv = vvw = -w$$

a na vektorech $v \perp w$ rovno

$$vwv = -vvw = w.$$

Jedná se tedy o reflexi vzhledem k rovině kolmé na vektor v (opět předpokládáme, že $|v| = 1$). Zabývejme se nyní tím, co se stane při složení dvou reflexí, prvně podle roviny kolmé na v a poté podle roviny kolmé na v'. Dostaneme

$$w \mapsto v'vwvv' = (-v'v)w(-vv') = (\langle v', v\rangle - v' \times v)w(\langle v, v'\rangle - v \times v'),$$

tj. rotaci okolo vektoru $v \times v' = -v' \times v$ o úhel $2 \arccos\langle v, v'\rangle$.

9. Smithův normální tvar celočíselných matic

9.1. Celočíselné matice

Celočíselná matice tvaru $n \times m$ je kolekce celých čísel $A = (a^i_j)$ indexovaná dvojicemi $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$. Píšeme $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{Z}$. Celočíselné matice odpovídají homomorfismům grup:

Lemma 9.1. *Homomorfismy grup $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ odpovídají přesně celočíselným maticím typu $m \times n$. Homomorfismus příslušný matici $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{Z}$ je $x \mapsto Ax$.*

Důkaz. Každý homomorfismus grup $\varphi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ je jednoznačně určen obrazy $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)$, které ale můžou být libovolné:

$$\begin{aligned}\varphi(x^1, \dots, x^m) &= \varphi(e_1 x^1 + \dots + e_m x^m) = \varphi(e_1)x^1 + \dots + \varphi(e_m)x^m \\ &= (\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_m)) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Naším cílem bude nyní každý takový homomorfismus reprezentovat „ve vhodných bázích" co nejjednodušší maticí. Bude nás tedy zajímat nalezení invertibilních matic P a Q takových, že PAQ^{-1} je co nejjednodušší. Stejně jako v případě vektorových prostorů jsou invertibilní matice součinem „elementárních matic", tj. matic odpovídajícím řádkovým/sloupcovým operacím, jen musíme dávat pozor na násobení řádků a sloupců. Jediné operace tohoto typu, které jsou invertibilní, jsou totiž násobení ± 1.

V dalším proto budeme za řádkové operace považovat pouze: přičtení násobku jednoho řádku k druhému, prohození dvou řádků a vynásobení řádku číslem -1. To samé samozřejmě platí pro sloupcové operace.

Obecně máme následující charakterizaci:

Lemma 9.2. *Celočíselná matice A je invertibilní, právě když je čtvercová a její determinant je roven ± 1.*

Důkaz. Prvně si uvědomme, že libovolná celočíselná inverze je zároveň inverzí nad $\mathbb{Q}$ a proto musí být matice A čtvercová (s nenulovým determinantem). Zároveň

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

a, jelikož A^{-1} je celočíselná, musí být také celočíselný její determinant, $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$. Proto $\det A = \pm 1$.

Nechť naopak A je čtvercová, jejíž determinant je ± 1. Potom inverzní matici můžeme spočítat pomocí matice algebraických doplňků:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det A} \cdot A_{\mathrm{adj}}$$

a je celočíselná. □

Poznámka. Podobný důkaz funguje nad libovolným komutativním okruhem R (to by mělo být zřejmé alespoň pro obor integrity, kde $\mathbb{Q}$ je nahrazeno podílovým tělesem): matice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,R$ je invertibilní, právě když je čtvercová a $\det A \in R^\times$ je invertibilní. Komutativita okruhu R je důležitá – bez ní by jednak nebylo možné definovat determinant a navíc existují okruhy s invertibilními obdelníkovými maticemi!

Věta 9.3 (o Smithově normálním tvaru)**.** *Pro libovolnou celočíselnou matici A existují invertibilní celočíselné matice P a Q takové, že*

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & q_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $q_1 \mid q_2 \mid \cdots \mid q_r$ se postupně dělí. Čísla q_i se nazývají invariantní faktory*, pravá strana se nazývá* Smithův normální tvar *celočíselné matice A. Každý jiný takový se liší pouze znaménky q_i. Konkrétněji platí $q_i = d_i/d_{i-1}$, kde*

$$d_i = \gcd\{\det S \mid S \textit{ je submatice } A \textit{ tvaru } i \times i\}$$

Poznámka. Je tedy vhodné vyžadovat $q_i > 0$ a tyto jsou potom určené zcela jednoznačně. V dalším budeme vždy tuto volbu preferovat.

Důkaz. Hlavním krokem je pomocí řádkových a sloupcových operací vyrobit v levém horním rohu největší společný dělitel všech prvků matice, dále pomocí něj vyeliminovat všechny prvky pod ním a vpravo od něj a následně použít indukci.

Základním krokem je vytvoření největšího společného dělitele prvků ležících v témž řádku nebo sloupci. K tomu budeme využívat Eukleidův algoritmus, který spočítá největšího společného dělitele následujícím způsobem: jsou-li a, b nenulová celá čísla taková, že $|a| > |b|$, vydělíme číslo a číslem b se zbytkem, $a = qb + r$. Potom

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r).$$

Nahrazením dvojice (a, b) dvojicí (b, r) se tedy největší společný dělitel nezmění. Navíc po konečném (ve skutečnosti velmi malém) počtu kroků vyjde $r = 0$; potom příslušné b v tomto kroku je hledaný největší společný dělitel. Pokud se vyskytují a, b v jednom sloupci, můžeme výše popsaný algoritmus realizovat pomocí řádkových operací a nahradit tak tyto dva prvky dvojicí $(d, 0)$, kde d je největší společný dělitel a, b. To samé lze aplikovat na výskyt a, b v témže řádku pomocí sloupcových operací.

1. Vraťme se nyní k naší matici A. Prvně přesuňme na pozici $(1, 1)$ pomoci operací libovolný nenulový prvek matice A (rozmyslete si zvlášť případ $A = 0$). V dalších krocích se bude vždy prvek na této pozici zmenšovat, díky čemuž bude náš algoritmus konečný.

2. Pomocí Eukleidova algoritmu a jeho implementace pomocí řádkových a sloupcových operací můžeme dosáhnout toho, že prvek v levém horním rohu je jediný nenulový prvek v prvním řádku a prvním sloupci, tj. dostaneme matici tvaru

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

3. Pokud by nyní prvek $\widetilde{a}_1^1$ nedělil nějaký prvek $\widetilde{a}_j^i$ matice $\widetilde{A}$, můžeme jej pomocí přičtení řádku dostat do prvního řádku a pomocí kroku 2. opět na pozici $(1,1)$ vyrobit menší prvek. Po konečném počtu kroku tak vznikne matice blokového tvaru

$$\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$

v níž bude prvek q_1 v levém horním rohu dělit všechny prvky matice A'.

4. Na submatici A' můžeme použít indukční předpoklad a převést ji na Smithův normální tvar s invariantními faktory $q_2, \ldots, q_r$. Protože q_1 dělil všechny prvky A', dělí i q_2 (podle indukčního předpokladu je to největší společný dělitel všech prvků A') a tím pádem $q_1 \mid q_2 \mid \cdots \mid q_r$ tak, jak požadujeme.

Zbývá dokázat jednoznačnost; ta bude plynout z invariantnosti d_i vůči řádkovým/sloupcovým operacím a z jednoduchého výpočtu největších společných dělitelů d_i pro matici ve Smithově normálním tvaru, kterým začneme.

Zřejmě, pokud submatice obsahuje k-tý řádek, nikoliv však k-tý sloupec matice ve Smithově normálním tvaru, pak její determinant je nulový (jelikož obsahuje nulový řádek). Proto stačí uvažovat submatice složené z nějakých řádků a týchž sloupců. Ty jsou diagonální a jejich determinant je roven součinu prvků na diagonále – libovolných i prvků diagonály. Tedy největší společný dělitel je

$$d_i = \gcd\{q_{k_1} \cdots q_{k_i} \mid 1 \le k_1 < \cdots < k_i \le r\} = q_1 \cdots q_i$$

a vskutku platí $q_i = d_i / d_{i-1}$ pro matici ve Smithově normálním tvaru.

Zbývá dokázat invarianci největšího společného dělitele d_i vzhledem ke sloupcovým operacím. Uvažujme tedy „starou" a „novou" matici, kde nová vznikne ze staré pomocí sloupcových operací (zatím ne nutně invertibilních). Zřejmě každý sloupec každé nové submatice je celočíselnou kombinací starých sloupců a její determinant je tedy celočíselnou kombinací starých subdeterminantů; zejména je každý nový subdeterminant dělitelný největším společným dělitelem d_i starých subdeterminantů a zejména je nové d_i dělitelné starým d_i. Pokud byly operace invertibilní, lze také starou matici vyrobit z nové a proto je i staré d_i dělitelné novým d_i a tudíž se rovnají. $\square$

Poznámka. Není špatné si povšimnout, že z existenční části plyne, že každá invertibilní matice je součinem elementárních matic, neboť jediná invertibilní matice ve Smithově normálním tvaru je jednotková matice, tedy $P^{-1}AQ = E$ a $A = PQ^{-1}$, a v převodu na Smithův normální tvar jsme používali pouze elementární matice.

Smithův normální tvar je vhodný k algoritmickým výpočtům s komutativními grupami. Platí totiž následující vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{im} A &= [q_1 \cdot Pe_1, \ldots, q_r \cdot Pe_r] \\ \ker A &= [Qe_{r+1}, \ldots, Qe_m], \end{aligned}$$

tedy obraz i jádro homomorfismu A lze jednoduchým způsobem získat ze sloupců matic P a Q a z invariantních faktorů q_i.

9.2. Prezentace konečně generovaných komutativních grup

Nechť M je komutativní grupa. V následujícím budeme komutativní grupy uvažovat vždy aditivně, tj. grupovou operaci budeme značit $+$, jednotku 0 a inverzi prvku a značíme $-a$.

Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a $a \in M$. Definujme $a \cdot k$ jako 0, pokud $k = 0$, jako

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{k\times}$$

pokud $k > 0$ a jako $(-k) \cdot (-a)$, pokud $k < 0$. Toto označení by čtenáři mělo být známe z multiplikativního zápisu a^k, kde značí přesně to stejné. Výhodou tohoto zápisu je, že v každé (komutativní) grupě umíme automaticky násobit celými čísly, můžeme se tedy bavit o celočíselných kombinacích a používat okamžitě některé další pojmy z vektorových prostorů.

Nechť $a_1, \ldots, a_n \in M$ jsou libovolné prvky komutativní grupy M. Uvažujme následující homomorfismus grup

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^n \to M, \quad (x^1, \ldots, x^n) \mapsto a_1x^1 + \cdots a_nx^n.$$

Lemma 9.4. *Zobrazení φ je skutečně homomorfismus grup. Navíc platí*

1. *φ je surjektivní, právě když prvky $a_1, \ldots, a_n$ generují M.*
2. *φ je injektivní, právě když jsou prvky $a_1, \ldots, a_n$ „lineárně nezávislé nad $\mathbb{Z}$“.* □

Omezme se nyní na situaci, kdy prvky $a_1, \ldots, a_n$ generují M. Potom je φ podle předchozího surjektivní a z algebry známe následující fakt,

$$M \cong \mathbb{Z}^n / \ker \varphi,$$

nazývaný první věta o izomorfismu. K pochopení konečně generovaných komutativních grup bude tedy dobré zkoumat grupu $\mathbb{Z}^n$ a její podgrupy.

Věta 9.5. *Každá podgrupa $\mathbb{Z}^n$ je opět konečně generovaná a ve skutečnosti izomorfní $\mathbb{Z}^m$ pro nějaké $m \leq n$.*

Důkaz. Budeme postupovat induktivně. Pro $n = 1$ máme $M \subseteq \mathbb{Z}$ a víme, že vždy $M = t \cdot \mathbb{Z}$. Máme tedy dvě možnosti. Pokud $t = 0$, je $M \cong \mathbb{Z}^0$, v opačném případě $M \cong \mathbb{Z}^1$.

Nechť nyní $M \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ a uvažme projekci

$$p\colon \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}, \quad (x^0, x^1, \ldots, x^n) \mapsto x^0$$

Opět $p(M) \subseteq \mathbb{Z}$ je podgrupa a tedy $p(M) = t \cdot \mathbb{Z}$. Nechť $y_0 \in M$ je nějaké takové, že $t = p(y_0)$. Dále uvažme podgrupu $\ker p \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$, která je zřejmě izomorfní $\mathbb{Z}^n$ a můžeme tedy na ní aplikovat indukční předpoklad. Nechť tedy

$$M \cap \ker p = [y_1, \ldots, y_m]$$

Tvrdíme nyní, že $M = [y_0, y_1, \ldots, y_m]$. Uvažme proto libovolné $x \in M$. Podle konstrukce máme $p(x) = tk_0$ pro nějaké $k_0 \in \mathbb{Z}$ a

$$x = y_0k_0 + (x - y_0k_0),$$

kde $x - y_0k_0 \in M \cap \ker p$ a tedy

$$x = y_0k_0 + y_1k_1 + \cdots + y_mk_m$$

pro nějaká $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$. Podrobnějším prozkoumáním důkazu lze též dokázat induktivně, že prvky $y_0, y_1, \ldots, y_m$ jsou lineárně nezávislé nad $\mathbb{Z}$, pokud jsou lineárně nezávislé $y_1, \ldots, y_m$ a $t \neq 0$ (případ $t = 0$ je triviální a vyřeší se zvlášť). $\square$

Poznámka. Podobné tvrzení pro nekomutativní grupy neplatí. Existuje grupa, která je generována dvěma prvky (jedná se o volnou grupu na dvou generátorech), která obsahuje podgrupu, která je generovaná třemi, čtyřmi, ... prvky a dokonce i podgrupu, která není konečně generovaná.

Přejděme nyní k hlavnímu konceptu této části – prezentacím. Nechť M je komutativní grupa generovaná prvky $a_1, \ldots, a_n$ a uvažme surjektivní homomorfismus

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow M, \quad \varphi(x^1, \ldots, x^n) = a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$$

jako předtím. Podle předchozí věty je $\ker\varphi$ opět konečně generovaná komutativní grupa a můžeme tedy najít další surjektivní homomorfismus

$$\psi\colon \mathbb{Z}^m \twoheadrightarrow \ker\varphi.$$

Zavedeme-li pro složení $\mathbb{Z}^m \to \ker\varphi \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ označení R, budeme vzniklou situaci zapisovat

$$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} M.$$

V každé takové posloupnosti budeme vyžadovat, aby φ byl surjektivní homomorfismus grup a $\ker\varphi = \operatorname{im} R$. Potom dostáváme izomorfismus

$$M \cong \mathbb{Z}^n/\ker\varphi = \mathbb{Z}^n/\operatorname{im} R.$$

Všimněme si, že pravá strana $\mathbb{Z}^n/\operatorname{im} R$ závisí pouze na homomorfismu (matici) R. Říkáme proto, že R prezentuje komutativní grupu M.

Poznámka. Prezentace grupy M lze definovat konkrétněji pomocí generátorů M a relací mezi nimi. Generátory $e_1, \ldots, e_n$ grupy $\mathbb{Z}^n$ odpovídají (zvoleným) generátorům $a_1, \ldots, a_n$ grupy M a generátory grupy $\mathbb{Z}^m$ budou odpovídat relacím mezi $a_1, \ldots, a_n$. Obrazy generátorů $e_j \in \mathbb{Z}^m$ jsou nějaké celočíselné kombinace

$$R(e_j) = e_1r_j^1 + \cdots + e_nr_j^n.$$

Z podmínky $\ker\varphi = \operatorname{im} R$ plyne, že analogické kombinace

$$a_1r_j^1 + \cdots + a_nr_j^n = 0$$

jsou nulové. To jsou přesně ony zmiňované relace mezi generátory M a M je v jistém smyslu „nejobecnější“ komutativní grupa s generátory $a_1, \ldots, a_n$ splňujícími tento systém relací. Přesněji, je-li N jiná komutativní grupa s prvky $b_1, \ldots, b_n$ splňujícími tytéž relace

$$b_1r_j^1 + \cdots + b_nr_j^n = 0,$$

existuje jediný homomorfismus grup $M \to N$ posílajíci a_i na b_i. Tento fakt nebudeme dokazovat, poznamenejme ale, že plyne (celkem snadno) z univerzální vlastnosti kvocientu $\mathbb{Z}^n/\operatorname{im} R$.

Konečně generované komutativní grupy jsou ve výsledku prezentovány celočíselnými maticemi. Nyní ukážeme, že ze znalosti Smithova normálního tvaru lze prezentovanou grupu zcela zrekonstruovat, samozřejmě až na izomorfismus. Obecněji se zabývejme případem ekvivalentních matic a jimi prezentovaných komutativních grup

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^m \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\cong"', "Q"] & \mathbb{Z}^n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "P"] & M \arrow[d, dashed] \\
\mathbb{Z}^m \arrow[r, "S"'] & \mathbb{Z}^n \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

Tvrdíme, že naznačený homomorfismus $M \to N$ existuje a je to navíc izomorfismus. Prezentované grupy můžeme ztotožnit s kvocienty podle obrazů a hledáme tedy homomorfismus

$$\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} R \to \mathbb{Z}^n / \operatorname{im} S.$$

Ten lze jednoduše definovat předpisem

$$x + \operatorname{im} R \mapsto Px + \operatorname{im} S.$$

Jelikož se každý jiný reprezentant třídy $x + \operatorname{im} R$ liší od x o prvek tvaru Ry, příslušná pravá strana se změní o třídu prvku $PRy = SQy \in \operatorname{im} S$ a zůstane proto stejná – zobrazení je dobře definované. Inverzní zobrazení je určené týmž předpisem s P nahrazeným P^{-1}. Tento výsledek lze vyjádřit heslem: izomorfní prezentace určují izomorfní grupy.

Zabývejme se nyní tím, jakou grupu prezentuje matice ve Smithově normálním tvaru.

Lemma 9.6. *Je-li S ve Smithově normálním tvaru s nenulovými prvky $q_1 | \cdots | q_r$ na diagonále, pak*

$$\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} S \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/q_1 \times \cdots \mathbb{Z}/q_r \times \mathbb{Z}^{n-r}$$

Důkaz. Potřebné zobrazení se definuje snadno

$$(x^1, \ldots, x^n) + \operatorname{im} S \mapsto ([x^1], \ldots, [x^r], x^{r+1}, \ldots, x^n)$$

a je jednoduché ověřit, že se jedná o dobře definovaný homomorfismus grup. Stejně snadno se definuje i inverzní zobrazení. □

V kombinaci s předchozími úvahami dostáváme první část následující věty.

Věta 9.7. *Každá konečně generovaná komutativní grupa je izomorfní součinu cyklických grup*

$$\mathbb{Z}/q_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/q_r \times \mathbb{Z}^k, \tag{1}$$

kde $1 \neq q_1 | \cdots | q_r$. Dvě takové grupy jsou izomorfní, právě když se rovnají odpovídající řády $q_1, \ldots, q_r$ konečných cyklických faktorů a exponenty k beztorzních částí.

Důkaz. Existenční část plyne z toho, že každá konečně generovaná komutativní grupa má prezentaci a ta je ekvivalentní prezentaci ve Smithově normálním tvaru. Činitele tvaru $\mathbb{Z}/1 = 0$ můžeme vynechat.

nd Jednoznačnost se dokáže následovně. Jsou-li dvě grupy tvaru (1) izomorfní, musí být izomorfní i jejich torzní části $\mathbb{Z}/q_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/q_r$. Přitom q_r je řád největší konečné cyklické podgrupy a musí být tedy stejný pro obě grupy. Součin zbylých konečných cyklických grup je kvocient torzní části podle její největší cyklické podgrupy a musí být tedy opět izomorfní pro obě grupy. Podle indukčního předpokladu se musí rovnat všechna odpovídající $q_1, \ldots, q_{r-1}$. Kvocient podle torzní části je roven $\mathbb{Z}^k$ a opět musí být tato grupa izomorfní odpovídající grupě $\mathbb{Z}^{k'}$. Tento izomorfismus je zprostředkován invertibilní maticí. Jelikož každá taková musí být nutně čtvercová, dostáváme $k = k'$. □

Poznámka. V tom důkazu jednoznačnosti je díra (největší cyklická podgrupa není jednoznačná a není jasné, proč by měl existovat izomorfismus velkých grup převádějící jednu na druhou), asi to chce fakt dělat přes vnější mocniny, viz níže.

Alternativní věta dává rozklad každé konečně generované komutativní groupy na součin cyklických grup, jejichž řád je mocninou prvočísla. To snadno plyne opět ze Smithova normálního tvaru: jelikož je grupa $\mathbb{Z}/p_1^{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{k_r}$ prezentována diagonální maticí s čísly $p_1^{k_1}, \ldots, p_r^{k_r}$ na diagonále a tato má invariantní faktory $1, \ldots, 1, p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ (jelikož $d_{r-1} = 1$), platí

$$\mathbb{Z}/p_1^{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{k_r} \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

(tomuto tvrzení se také říká Čínská zbytková věta). V opačném směru pak lze každou cyklickou grupu rozložit na součin cyklických grup, jejichž řád je mocninou prvočísla. Tento rozklad je také jednoznačný.

** 9.3. Poznámky

Je-li M konečná, lze dát invariantnímu faktoru q_n následující význam. Jedná se o nejmenší číslo t, pro které $M \cdot t = 0$, tedy nejmenší číslo dělitelné řádem každého prvku. Poněkud abstraktněji definujme $\mathrm{Ann}(M) = \{t \in \mathbb{Z} \mid M \cdot t = 0\}$, anihilátor komutativní grupy M. Jedná se vždy o podgrupu a platí $\mathrm{Ann}(M) = q_n \cdot \mathbb{Z}$.

Podobnou iterpretaci lze dát s trochou práce i zbývajícím invariantním faktorům, konkrétně

$$\mathrm{Ann}(\Lambda^{n+1-i} M) = q_i \cdot \mathbb{Z},$$

k tomu je však potřeba definovat vnější mocniny komutativních grup, což značně přesahuje obsah kurzu.

Vzhledem k jednoznačnosti z předchozí věty můžeme zformulovat jednoznačnost prezentace konečně generované komutativní grupy. Pro každé dvě prezentace musí jejich Smithovy normální tvary být shodné až na jedničky na diagonále (ty zhruba řečeno odpovídají přidání nového generátoru x společně s relací $x = 0$) a nadbytečné nulové sloupce (ty zase odpovídají relacím, které lze odvodit z ostatních relací).

Mají-li matice R, S stejné rozměry, pak prezentují stejnou grupu, právě když jsou ekvivalentní (ve smyslu, že je lze na sebe převést řádkovými a sloupcovými úpravami).

* 10. Smithův normální tvar polynomiálních matic

* 10.1. Polynomiální matice

Polynomiální matice tvaru $n \times m$ je kolekce polynomů $A = (a^i_j)$ indexovaná dvojicemi $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Tedy a^i_j je polynom, přesněji polynom s koeficienty v tělese $\mathbb{K}$ a v proměnné λ. Píšeme $A \in \operatorname{Mat}_{n\times m} \mathbb{K}[\lambda]$.

Lemma 10.1. *Polynomiální matice A je invertibilní, právě když je čtvercová a její determinant je nenulový konstantní.*

Důkaz. Důkaz se provede stejně jako pro celočíselné matice. □

Věta 10.2 (o Smithově normálním tvaru)**.** *Pro libovolnou polynomiální matici A existují invertibilní polynomiální matice P a Q takové, že*

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & q_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $q_1|q_2|\cdots|q_r$ se postupně dělí. Polynomy q_i se nazývají invariantní faktory*, pravá strana se nazývá* Smithův normální tvar *polynomiálni matice A. Každý jiný takový se liší pouze vynásobením q_i nenulovou konstantou. Konkrétněji platí $q_i = d_i/d_{i-1}$, kde*

$$d_i = \gcd\{\det S \mid S \textit{ je submatice } A \textit{ tvaru } i \times i\}$$

Důkaz. Důkaz se provede stejně jako pro celočíselné matice; jeho základem byl Eukleidův algoritmus, který funguje i pro $\mathbb{K}[\lambda]$. □

Opět můžeme vyžadovat polynomy q_i normované, dostaneme pak Smithův normální tvar zcela jednoznačně.

Poznámka. Je zajímavé se zamyslet nad tím, které (komutativní) okruhy umožňují Smithův normální tvar. Potřebujeme nějakou formu Eukleidova algoritmu a pro tzv. Eukleidovské obory (obory integrity s Eukleidovým algoritmem) není naprosto žádný problém. Ve skutečnosti lze tuto větu zobecnit na obory hlavních ideálů (obory integrity, kde každý ideál je hlavní), nevystačíme si však již s elementárními operacemi: k vyrobení největšího společného dělitele nestačí odčítat násobky, ale jsou potřeba obecnější (invertibilní) lineární kombinace. Ve výsledku se dá ukázat, že nad obory hlavních ideálů již není každá invertibilní matice součinem elementárních. Rozdíl mezi invertibilními maticemi a součiny elementárních matic je jedním z důležitých aspektů studovaných algebraickou K-teorií okruhu R. Ta je velmi důležitá v rozličných odvětvích matematiky – od geometrie, přes algebru až k teorii čísel.

Stejně jako celočíselné matice měly vztah ke konečně generovaným komutativním grupám a jejich prezentacím, mají také polynomiální matice vztah k nějakým matematickým objektům a jejich prezentacím. Pokusme se jejich definici motivovat následujícím porovnáním

$$\begin{array}{rl} \text{číselné matice } A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{K} & \text{lineární zobrazení } \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n \\ \text{celočíselné matice } A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{Z} & \text{homomorfismy grup } \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \\ \text{polynomiální matice } A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}\,\mathbb{K}[\lambda] & \text{homomorfismy ??? } \mathbb{K}[\lambda]^m \to \mathbb{K}[\lambda]^n \end{array}$$

Definice 10.3. Nechť M je komutativní grupa. Řekneme, že M je $\mathbb{K}[\lambda]$-*modul*, jestliže je zadáno zobrazení

$$\mathbb{K}[\lambda] \times M \to M, \qquad (p, x) \mapsto p \cdot x,$$

nazývané „násobení skaláry“, splňující obvyklé axiomy vektorového prostoru

$$\begin{aligned} p \cdot (q \cdot x) &= (p \cdot q) \cdot x \\ 1 \cdot x &= x \\ p \cdot (x + y) &= p \cdot x + p \cdot y \\ (p + q) \cdot x &= p \cdot x + q \cdot x \end{aligned}$$

Příklad. Důležitým $\mathbb{K}[\lambda]$-modulem je $\mathbb{K}[\lambda]^n$, tj. množina všech n-tic polynomů společně se sčítáním po složkách a násobením po složkách

$$p \cdot (q_1, \ldots, q_n) = (pq_1, \ldots, pq_n)$$

Každý $\mathbb{K}[\lambda]$-modul M je automaticky vektorovým prostorem nad $\mathbb{K}$: když umíme prvky M násobit polynomy, umíme je zejména násobit konstantními polynomy, které lze jednoduše ztotožnit s prvky tělesa $\mathbb{K}$, lze psát

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[\lambda].$$

Zároveň násobení lineárním polynomem λ je zobrazení

$$m_\lambda \colon M \to M, \qquad x \mapsto \lambda \cdot x,$$

o kterém ověříme, že se jedná o lineární zobrazení:

$$m_\lambda(ax + by) = \lambda \cdot ax + \lambda \cdot by = (a\lambda) \cdot x + (b\lambda) \cdot y = a(m_\lambda x) + b(m_\lambda y)$$

Věta 10.4. *Předchozí konstrukce zadává bijektivní korespondenci*

$$\begin{array}{rcl} \{\mathbb{K}[\lambda]\text{-}moduly\ M\} & \rightleftarrows & \left\{\begin{array}{l} dvojice\ (V, T),\ kde\ V\ je\ vektorový \\ prostor\ a\ T \colon V \to V\ je\ operátor \end{array}\right\} \\ M & \longmapsto & (M, m_\lambda) \\ V & \longleftarrow\!\shortmid & (V, T) \end{array}$$

V dalším budeme pro operátor T na vektorovém prostoru V používat pro odpovídající $\mathbb{K}[\lambda]$-modul označení (V, T).

Důkaz. Zbývá ukázat, jak se pro operátor $T\colon V \to V$ na vektorovém prostoru V definuje násobení skaláry z $\mathbb{K}[\lambda]$. Má-li se jednat o inverzi ke konstrukci (M, m_λ), jsme nuceni položit

$$px = (p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_k\lambda^k)x = p_0x + p_1Tx + \cdots + p_kT^kx,$$

kde T^ix značí i-násobnou iteraci operátoru T, tj.

$$T^ix = (T \circ \cdots \circ T)x = T(\cdots T(Tx)\cdots);$$

je totiž $\lambda^ix = \lambda(\cdots\lambda(\lambda x)\cdots) = T(\cdots T(Tx)\cdots)$. □

Z předchozího důkazu si zapamatujme vztah pro násobení polynomem p na $\mathbb{K}[\lambda]$-modulu (V, T). Budeme ho zapisovat ve tvaru

$$p \cdot x = p(T)x,$$

kde $p(T)$ značí, tak jako v důkazu, výsledek formálního dosazení operátoru T do polynomu p, tj. $p(T) = p_0\operatorname{Id} + p_1T + \cdots + p_kT^k$.

Poznámka. Výhodou uvažování $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů namísto operátorů je to, že základním stavebním kamenem (konečně generovaných) $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů je $\mathbb{K}[\lambda]^n$ (jak za chvíli uvidíme), který je jako vektorový prostor s operátorem nekonečně rozměrný a tedy z pohledu lineární algebry dost netypický. Konkrétně $\mathbb{K}[\lambda]$ jako vektorový prostor je

$$\mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}_0} = \{(a_0, a_1, \ldots) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0\colon \forall l \geq k\colon a_l = 0\},$$

množina posloupností čísel (odpovídajících posloupnostem koeficientů polynomů), která jsou od jistého indexu počínaje všechna nulová. Operátor je pak dán

$$(a_0, a_1, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$$

Dalším přirozeným pojmem je homomorfismus $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů, který je přímou analogií lineárního zobrazení.

Definice 10.5. Nechť M, N jsou dva $\mathbb{K}[\lambda]$-moduly. Zobrazení $\varphi\colon M \to N$ se nazývá *homomorfismem* $\mathbb{K}[\lambda]$*-modulů*, jestliže platí

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(px) = p\varphi(x).$$

pro libovolná $x, y \in M$ a $p \in \mathbb{K}[\lambda]$.

Opět převedeme tento pojem do řeči operátorů. Je zřejmé zúžením definiční podmínky na konstantní polynomy, že každý homomorfismus $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů je lineární zobrazení.

Tvrzení 10.6. *Nechť jsou dány operátory T na V a S na U. Lineární zobrazení $\varphi\colon V \to U$ je homomorfismus $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů, právě když komutuje následující diagram.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "T"'] & U \arrow[d, "S"] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] & U \end{tikzcd}$$

Důkaz. Jelikož je φ lineární, zachovává násobení všemi konstantními polynomy. Zbývá tedy zkontrolovat zachovávání násobení polynomem λ, ale to jsou přesně operátory v diagramu. $\square$

V případě, že je φ invertibilní, lze předchozí diagram přepsat jako $S = \varphi T \varphi^{-1}$, tj. operátory S, T jsou podobné.

Vraťme se k naší původní motivaci s polynomiálními maticemi.

Lemma 10.7. *Nechť $a_1, \dots, a_n \in M$ jsou libovolné prvky $\mathbb{K}[\lambda]$-modulu M. Pak existuje jediný homomorfismus $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů $\varphi\colon \mathbb{K}[\lambda]^n \to M$ splňující $\varphi(e_i) = a_i$, kde e_i je opět n-tice polynomů $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ s konstantním polynomem 1 na i-tém místě.*

Speciálně homomorfismy $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů $\mathbb{K}[\lambda]^m \to \mathbb{K}[\lambda]^n$ jsou v bijekci s polynomiálními maticemi $A \in \operatorname{Mat}_{n\times m} \mathbb{K}[\lambda]$, jejímž i-tým sloupcem je právě obraz e_i. Příslušný homomorfismus je dán $x \mapsto Ax$.

Důkaz. Vše je jasné z rovnosti

$$\begin{aligned}\varphi(p^1, \dots, p^n) = \varphi(e_1 p^1 + \cdots e_n p^n) &= \varphi(e_1)p^1 + \cdots + \varphi(e_n)p^n \\ &= a_1 p^1 + \cdots + a_n p^n.\end{aligned}$$

Naopak výsledný vzorec je homomorfismus $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů pro libovolné $a_1, \dots, a_n \in M$. $\square$

V dalším se nám ještě budou hodit kvocienty $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů. Nechť M je $\mathbb{K}[\lambda]$-modul. Podmodul $N \subseteq M$ je podmnožina uzavřená na nulu, sčítání a násobení skaláry. Zejména je N podgrupa vzhledem ke sčítání. Na kvocientu grup M/N definujeme strukturu $\mathbb{K}[\lambda]$-modulu následovně:

$$(x + N) \cdot p \overset{\text{def}}{=} xp + N$$

Je jednoduché ověřit, že se jedná o dobře definované zobrazení, které splňuje všechny axiomy $\mathbb{K}[\lambda]$-modulu.

* 10.2. Kanonická prezentace operátoru na $\mathbb{K}^n$

Nechť $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ je operátor na $\mathbb{K}^n$ a uvažujme příslušný $\mathbb{K}[\lambda]$-modul $(\mathbb{K}^n, T)$. Narozdíl od situace pro konečně generované komutativní grupy existuje kanonická prezentace (tj. taková, která nezávisí na žádných volbách). Uvažujme homomorfismus $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů

$$\varphi\colon \mathbb{K}[\lambda]^n \to \mathbb{K}^n$$

jednoznačně určený tím, že posílá $e_i \mapsto e_i$, kde na levé straně je e_i interpretováno jako n-tice polynomů, zatímco na pravé straně jako n-tice čísel[5]. V obou případech se jedná o n-tici složenou z 1 na i-tém místě a z 0 na zbylých místech. Zřejmě je φ surjektivní zobrazení, popíšeme nyní jeho jádro a dostaneme tím prezentaci pro $(\mathbb{K}^n, T)$.

Tvrzení 10.8. *Nechť T je operátor na $\mathbb{K}^n$. Potom*

$$\mathbb{K}[\lambda]^n \xrightarrow{T-\lambda E} \mathbb{K}[\lambda]^n \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{K}^n, T)$$

je prezentace příslušného $\mathbb{K}[\lambda]$-modulu.

[5]Alternativní pohled na prvky $\mathbb{K}[\lambda]^n$ je jako polynomy s koeficienty v $\mathbb{K}^n$. Zobrazení je pak dáno předpisem $v_0 + \lambda v_1 + \cdots + \lambda^k v_k \mapsto v_0 + Tv_1 + \cdots + T^k v_k$.

Důkaz. Zbývá ukázat, že
$$\operatorname{im}(T - \lambda E) = \ker \varphi.$$
Zaprvé platí $\varphi \circ (T - \lambda E) = 0$, neboť pro generátory $e_i \in \mathbb{K}[\lambda]^n$ platí
$$\varphi \circ (T - \lambda E)(e_i) = \varphi(Te_i - \lambda e_i) = Te_i - Te_i = 0.$$
Proto $\operatorname{im}(T - \lambda E) \subseteq \ker \varphi$. K opačné implikaci pišme pro $v \in \mathbb{K}[\lambda]^n$
$$v = v_0 + \lambda v_1 + \cdots + \lambda^k v_k,$$
kde $v_0, v_1, \ldots, v_k$ jsou n-tice konstantních polynomů. Zjevně platí
$$v \equiv v_0 + Tv_1 + \cdots + T^k v_k \pmod{\operatorname{im}(T - \lambda E)},$$
což je n-tice konstantních polynomů, která při ztotožnění s $\mathbb{K}^n$ přesně odpovídá $\varphi(v)$. Pokud tedy předpokládáme $v \in \ker \varphi$, dostáváme $v \equiv 0$ modulo $\operatorname{im}(T - \lambda E)$ a tedy $v \in \operatorname{im}(T - \lambda E)$. Platí proto i opačná inkluze $\ker \varphi \subseteq \operatorname{im}(T - \lambda E)$. □

Poznámka. Poslední tvrzení dává velice uspokojivé zdůvodnění, proč v matici $T - \lambda E$ je obsaženo vše podstatné týkající se operátoru T. To se tradičně vysvětluje přes kořenové podprostory. Předchozí tvrzení však platí nezávisle na tom, zda těleso $\mathbb{K}$ je algebraicky uzavřené a hodí se ke zkoumání operátoru i nad obecnými tělesy.

Nyní dáme dohromady kanonickou prezentaci se Smithovým normálním tvarem tak, jak jsme učinili pro konečně generované komutativní grupy. Nechť Smithův normální tvar $T - \lambda E$ je polynomiální matice $S(\lambda)$. Její vztah ke kanonické prezentaci je vyjádřen v následujícím diagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r, "T-\lambda E"] \arrow[d, "Q(\lambda)"', "\cong"] & \mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "P(\lambda)"] & (\mathbb{K}^n, T) \arrow[d, dashed, "\cong"] \\
\mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r, "S(\lambda)"'] & \mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r] & \mathbb{K}[\lambda]^n / \operatorname{im} S(\lambda)
\end{tikzcd}$$

Opět se jednoduše přesvědčíme, že
$$\mathbb{K}[\lambda]^n / \operatorname{im} S(\lambda) \cong \mathbb{K}[\lambda]/(q_1) \times \cdots \times \mathbb{K}[\lambda]/(q_n),$$
kde $q_1 | \cdots | q_n$ jsou polynomy vyskytující se na diagonále Smithova normálního tvaru $S(\lambda)$.

Věta 10.9. *Dva operátory T, T' jsou podobné, právě když polynomiální matice $T - \lambda E$, $T' - \lambda E$ mají týž Smithův normální tvar. Zejména lze problém podobnosti řešit algoritmicky.*

Poznámka. Nad algebraicky uzavřeným tělesem lze problém podobnosti „řešit“ s pomocí Jordanova kanonického tvaru. Algoritmicky je však tento přístup nevhodný, protože obecně nelze spočítat vlastní čísla a tím pádem ani Jordanův kanonický tvar. Na druhou stranu Smithův normální tvar je zcela algoritmický.

Důkaz. Jsou-li operátory T a T' podobné, $T' = PTP^{-1}$, budou podobné i
$$T' - \lambda E = P(T - \lambda E)P^{-1}.$$
Tím spíš budou ekvivalentní a proto budou mít týž Smithův normální tvar.

Nechť naopak $T - \lambda E$, $T' - \lambda E$ mají týž Smithův normální tvar. Potom jsou ekvivalentní a podle předchozího diagramu jsou izomorfní prezentované moduly $(\mathbb{K}^n, T) \cong (\mathbb{K}^n, T')$. To ale přesně znamená, že operátory jsou podobné podle Tvrzení 10.6. □

Poznámka. Výhodou oproti případu komutativních grup je existence kanonické prezentace. O něco obtížněji lze také dokázat, že dva $\mathbb{K}[\lambda]$-moduly prezentované libovolnými (v kontrastu s kanonickými) polynomiálními maticemi týchž rozměrů jsou izomorfní, právě když mají tyto matice týž Smithův normální tvar; viz případ komutativních grup.

Místo Jordanova kanonického tvaru je možné popsat jiný kanonický tvar, který nevyžaduje nalezení kořenů charakteristického polynomu a lze jej spočítat algoritmicky. Jelikož je

$$(\mathbb{K}^n, T) \cong \mathbb{K}[\lambda]/(q_1) \times \cdots \times \mathbb{K}[\lambda]/(q_n),$$

stačí popsat $\mathbb{K}[\lambda]$-modul $\mathbb{K}[\lambda]/(q)$ jako vektorový prostor společně s operátorem. Nalezneme vhodnou (kanonickou) bázi a v ní matici příslušného operátoru m_λ. Nechť $q = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k$. Potom takovou bází je $\alpha = ([1], [\lambda], \cdots, [\lambda^{k-1}])$ a jednoduše

$$(m_\lambda)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Tedy $(\mathbb{K}^n, T)$ má ve vhodné bázi blokově diagonální tvar s bloky výše uvedeného tvaru na diagonále. Tento tvar se nazývá *racionální kanonický tvar* operátoru – pro jeho kanoničnost je však nutno vyžadovat, aby se polynomy příslušné jednotlivým blokům postupně dělily tak jako ve Smithově normálním tvaru.

Invariantní faktor q_n má poměrně jednoduchou interpretaci v řeči $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů, z níž lze jednoduše dokázat následující větu.

Tvrzení 10.10 (Cayleyho–Hamiltonova věta)**.** *Nechť $\chi(\lambda) = \det(T - \lambda E)$ značí charakteristický polynom T. Potom platí $\chi(T) = 0$.*

Důkaz. Z věty o Smithově normálním tvaru platí $\chi = q_1 \cdots q_n$. Přitom pro libovolné

$$x \in \mathbb{K}[\lambda]/(q_1) \times \cdots \times \mathbb{K}[\lambda]/(q_n)$$

zjevně platí $q_n x = 0$. Protože je však tento $\mathbb{K}[\lambda]$-modul izomorfní $(\mathbb{K}^n, T)$, platí to samé i pro $\mathbb{K}[\lambda]$-modul $(\mathbb{K}^n, T)$. Pro libovolné $v \in \mathbb{K}^n$ tak máme $q_n(T)v = 0$. Protože ale toto platí pro libovolné v, musí být $q_n(T) = 0$ jakožto operátory na $\mathbb{K}^n$. Tím spíš tedy $\chi(T) = 0$. □

Definice 10.11. Z důkazu předchozí věty plyne, že ve skutečnosti platí již $q_n(T) = 0$ a není těžké se přesvědčit, že q_n je nejmenší polynom (vzhledem k dělitelnosti), pro který tento vztah platí. Nazývá se *minimální polynom* operátoru T.

Poznámka. Opět poněkud abstraktněji lze minimální polynom popsat následovně. Definujme anihilátor $\mathbb{K}[\lambda]$-modulu M jako

$$\mathrm{Ann}(M) = \{p \in \mathbb{K}[\lambda] \mid p \cdot M = 0\}.$$

Není těžké se přesvědčit, že se vždy jedná o ideál a v našem případě je $\mathrm{Ann}(M) = (q_n)$. Opět s trochou práce lze dát význam i zbylým invariantním faktorům,

$$\mathrm{Ann}(\Lambda^{n-i+1}_{\mathbb{K}[\lambda]} M) = (q_i),$$

kde například $\Lambda^2_{\mathbb{K}[\lambda]}M$ je kvocient $\Lambda^2 M$ podle podprostoru generovaného rozdíly $Tx\wedge y - x\wedge Ty$. Operátor na tomto kvocientu je zadán předpisem

$$T[x\wedge y] \overset{\text{def}}{=} [Tx\wedge y] = [x\wedge Ty].$$

* 10.3. Jordanův kanonický tvar

Jelikož Smithův normální tvar $T-\lambda E$ zcela určuje operátor T až na podobnost, nemělo by být překvapením, že z něj lze spočítat Jordanův kanonický tvar T. Nechť proto nyní $\mathbb{K}$ je algebraicky uzavřené těleso. Potom každý cyklický modul $\mathbb{K}[\lambda]/(q)$ lze psát s využitím rozkladu $q=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$ ve tvaru[6]

$$\mathbb{K}[\lambda]/(q)\cong \mathbb{K}[\lambda]/((\lambda-\lambda_1)^{r_1})\times\cdots\times\mathbb{K}[\lambda]/((\lambda-\lambda_k)^{r_k})$$

(formální podobnost s rozkladem na prvočinitele není vůbec náhodná). Zbývá tedy popsat $\mathbb{K}[\lambda]$-modul tvaru

$$\mathbb{K}[\lambda]/((\lambda-\lambda_0)^r).$$

Tvrzení 10.12. *Cyklický $\mathbb{K}[\lambda]$-modul $\mathbb{K}[\lambda]/((\lambda-\lambda_0)^r)$ je izomorfní operátoru na $\mathbb{K}^r$ s maticí*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Důkaz. Jakožto vektorový prostor má $\mathbb{K}[\lambda]/((\lambda-\lambda_0)^r)$ bázi

$$([(\lambda-\lambda_0)^{r-1}],\dots,[\lambda-\lambda_0],[1])$$

Počítejme matici operátoru m_λ (násobení polynomem λ) vzhledem k této bázi. Zjevně platí

$$\lambda[(\lambda-\lambda_0)^{i-1}] = \big((\lambda-\lambda_0)+\lambda_0\big)[(\lambda-\lambda_0)^{i-1}] = [(\lambda-\lambda_0)^i]+\lambda_0[(\lambda-\lambda_0)^{i-1}].$$

V případě $i=r$ pak $[(\lambda-\lambda_0)^r]=0$ a dostáváme přesně matici z tvrzení. $\square$

Věta 10.13. *Je-li těleso $\mathbb{K}$ algebraicky uzavřené, je každý operátor podobný operátoru v Jordanově kanonickém tvaru. Obecněji tvrzení platí pro operátor T nad libovolným tělesem, nad kterým se charakteristický polynom T zcela rozkládá.* $\square$

** Je-li $T-\lambda E$ ekvivalentní $J-\lambda E$, řekněme

$$J-\lambda E = P(\lambda)(T-\lambda E)Q(\lambda)$$

[6] Jednoduchý důkaz tohoto faktu využívá Smithův normální tvar – $\mathbb{K}[\lambda]$-modul napravo je prezentován diagonální maticí s mocninami $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ na diagonále; její Smithův normální tvar má na diagonále $1,\dots,1,q$.

(nyní u $P(\lambda)$ nebudeme psát inverzi, protože v tomto tvaru dostaneme výsledek z algoritmu počítajícího Smithův normální tvar), lze spočítat matice přechodu mezi oběma operátory. Začněme s maticí přechodu od T k J. Tu dostaneme z následujícího diagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r, "T-\lambda E"] & \mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[d, "\cong"', "P(\lambda)"] \arrow[r, "\leftarrow - -"] & (\mathbb{K}^n, T) \arrow[d, dashed, "\cong"', "R"] \\
\mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[u, "\cong", "Q(\lambda)"'] \arrow[r, "J-\lambda E"'] & \mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r, "\mathrm{ev}_J"'] & (\mathbb{K}^n, J)
\end{tikzcd}$$

naznačené zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}[\lambda]^n$ zobrazí n-tici čísel na n-tici příslušných konstantních polynomů (a nejedná se o homomorfismus $\mathbb{K}[\lambda]$-modulů). Složením dostaneme pro

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \cdots + \lambda^k P_k$$

následující vyjádření pro matici přechodu R:

$$v \mapsto \mathrm{ev}_J(P(\lambda)v) = P_0 v + J P_1 v + \cdots + J^k P_k v = P^{\mathrm{left}}(J)v,$$

kde poslední zápis značí dosazení matice J do polynomiální matice $P(\lambda)$ zleva.

** Matice přechodu v opačném směru lze získat buď jako inverzní matici k $P^{\mathrm{left}}(J)$ nebo pomocí transponování všech matic (formálně přechodu k duálním prostorům). Konkrétně dostáváme diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r, "T^*-\lambda E"] & \mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[d, "\cong"', "Q^*(\lambda)"] \arrow[r, "\leftarrow - -"] & (\mathbb{K}^n, T^*) \arrow[d, dashed, "\cong"', "S^*"] \\
\mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[u, "\cong", "P^*(\lambda)"'] \arrow[r, "J^*-\lambda E"'] & \mathbb{K}[\lambda]^n \arrow[r] & (\mathbb{K}^n, J^*)
\end{tikzcd}$$

nebo jednodušeji rovnici

$$J^* - \lambda E = Q^*(\lambda)(T^* - \lambda E)P^*(\lambda)$$

Podle předchozího dostáváme $S^* = (Q^*)^{\mathrm{left}}(J^*)$ a zpětným transponováním

$$\begin{aligned}
S &= ((Q^*)^{\mathrm{left}}(J^*))^* = (Q_0^* + J^* Q_1^* + \cdots + (J^*)^k Q_k^*)^* \\
&= Q_0 + Q_1 J + \cdots + Q_k J^k = Q^{\mathrm{right}}(J).
\end{aligned}$$

Jelikož je S matice přechodu od J k T, skládají se její sloupce z vektorů báze, v níž T nabývá Jordanova kanonického tvaru J. Matici $Q(\lambda)$ lze získat tak, že veškeré sloupcové operace provádíme zároveň na matici $T - \lambda E$ a na jednotkové matici (řádkové operace však pouze na $T - \lambda E$). Pokud takto převedeme $T - \lambda E$ na $J - \lambda E$, vytvoří sloupcové operace přesně matici $Q(\lambda)$. Dosadíme-li pak do ní matici J zprava, získáme hledanou matici přechodu S.

** Vhodnou adaptací lze výpočet zjednodušit. Není potřeba pomocí dalších operací převádět Smithův normální tvar na $J - \lambda E$, neboť lze využít bázi $\mathbb{K}[\lambda]^n / \operatorname{im} B$ z důkazu Tvrzení 10.12, kde B je Smithův normální tvar $T - \lambda E$. Uveďme si to na zásadním příkladu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\lambda - \lambda_0)^r \end{pmatrix}$$

Potom forma f^i na prostoru $\mathbb{K}^n$ vpravo nahoře se zobrazí na formu na $\mathbb{K}[\lambda]^n$ s týmž názvem, dále pak pomocí $Q^*(\lambda)$ na $f^iQ(\lambda)$, tj. na i-tý řádek matice $Q(\lambda)$. Na závěr je potřeba spočítat, jakou formu na $\mathbb{K}^n$ v pravém dolním rohu tato reprezentuje. Vyjádříme ji proto ve tvaru[7]

$$f^iQ(\lambda) \equiv \sum_j f^r(\lambda-\lambda_0)^j a^i_j$$

modulo $\operatorname{im} B = (f^1,\dots,f^{r-1},f^r(\lambda-\lambda_0)^r)$. Matice a^i_j je hledanou maticí přechodu (v případě $B = J-\lambda E$ se výpočet zjednodušil tím, že počítání modulo $\operatorname{im} B$ je dosazování J).

** O něco složitější, ale stále zvládnutelný, je případ, kdy $q = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$. Pak za bázi kvocientu $\mathbb{K}[\lambda]/(q)$ lze vzít polynomy

$$\left(\frac{q}{\lambda-\lambda_1},\dots,\frac{q}{(\lambda-\lambda_1)^{r_1}},\dots,\frac{q}{\lambda-\lambda_k},\dots,\frac{q}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}}\right)$$

(Žádnou jejich číselnou lineární kombinací nemůžeme získat nenulový násobek q. Budeme-li psát $a_{r_\ell-1}\frac{q}{\lambda-\lambda_\ell}+\dots+a_0\frac{q}{(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell}} = (a_{r_\ell-1}(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell-1}+\dots+a_0)\frac{q}{(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell}} = p_\ell\frac{q}{(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell}}$, lze lineární kombinaci přepsat do tvaru $p_1\frac{q}{(\lambda-\lambda_1)^{r_1}}+\dots+p_k\frac{q}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}}$ a její nulovost dává $(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell} \mid p_\ell$, protože ostatní členy jsou $(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell}$ dělitelné a naopak $\frac{q}{(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell}}$ je s ním nesoudělné. Protože je ale stupeň p_ℓ menší než r_ℓ, musí být $p_\ell = 0$.)

** Matice m_λ je v této bázi v Jordanově kanonickém tvaru postupně s bloky příslušnými $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ rozměrů $r_1,\dots,r_k$. Položíme-li $r = r_1+\dots+r_k$, je pro výpočet i-tého řádku potřeba vyjádřit

$$f^iQ(\lambda) \equiv \sum_{\ell,j} f^r\frac{q}{(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell-j}}a(\ell)^i_j$$

modulo $\operatorname{im} B = (f^1,\dots,f^{r-1},f^rq)$, kde $a(\ell)$ značí ℓ-tý sloupcový blok matice přechodu, tj. $a(\ell)_j$ je j-tý bázový vektor ℓ-tého bloku Jordanovy báze.[8]

Kontrolní otázky

1. Jak se mění determinant polynomiální matice při provádění jednotlivých elementárních řádkových operací?
2. Napište dva maticové polynomy stupně 1, jejichž součin je polynom stupně 1.
3. Vysvětlete, jaký je vztah mezi podobností matic a ekvivalencí jejich charakteristických matic.
4. Vyslovte definici kanonického tvaru polynomiální matice. Proč je tento kanonický tvar určen jednoznačně?
5. Jaký je vztah mezi maticí J v Jordanově kanonickém tvaru a kanonickým tvarem její charakteristické matice $J-\lambda E$? Napište několik matic v Jordanově kanonickém tvaru s více buňkami různých velikostí a s několika vlastními čísly a k nim najděte příslušný kanonický tvar charakteristické matice.
6. Vyslovte definici minimálního polynomu matice $A \neq 0$. Jak najdeme minimální polynom matice pomocí kanonického tvaru její charakteristické matice? Najděte matice 4×4 s minimálním polynomem stupně 1, 2, 3 a 4.

[7] Koeficienty a^i_j jsou až na faktor $\frac{1}{(r-j)!}$ členy Taylorova rozvoje polynomu $(f^iQ(\lambda))_r$ (tj. prvku $Q(\lambda)^i_r$ matice $Q(\lambda)$) v bodě λ_0.

[8] Opět lze koeficienty $a(\ell)^i_j$ získat z Taylorových polynomů $Q(\lambda)^i_r$ a $\frac{q}{(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell}}$ v bodech $\lambda_1,\dots,\lambda_k$.

Příklady k procvičení.

1. Najděte Jordanův kanonický tvar následujících matic A_i a matice podobnosti P_i takové, že $J = P_i^{-1} \cdot A_i \cdot P_i$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 4 \\ 7 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -9 \\ 9 & -3 & -1 & -9 \\ 9 & 0 & -3 & -9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Které z následujících matic jsou navzájem podobné?

$$B_1 = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[Řešení: B_1 je podobná B_3, B_2, B_4 a B_5 jsou si navzájem podobné.]

3. Určete kanonické tvary charakteristických matic příslušných maticím

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

[Řešení:

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2)^3 \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

4. Určete minimální polynom následujících matic

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

[Řešení: $m_1 = (\lambda-3)^2(\lambda-4)$; $m_2 = (\lambda-3)^2$; $m_3 = (\lambda-3)^3$;
$m_4 = (\lambda-3)^2(\lambda+1)$.]

5. Najděte matici, jejíž minimální polynom je
   (a) polynom λ^2 a matice má rozměry 3×3
   (b) polynom prvního řádu a matice má rozměry 2×2

[Řešení: např. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.]

Rejstřík

Další literatura

[D] M. Doupovec, Diferenciální geometrie a tenzorový počet, VUT Brno, 1999.

[JS] J. Janyška, A. Sekaninová, Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik, MU Brno, 1996.

[K] A. I. Kostrikin, Exercises in algebra: A collection of exercises in algebra, linear algebra and geometry, Gordon and Breach Publishers, 1996.

[KM] A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin, Linear algebra and geometry, Gordon and Breach Publishers, 1997.

[S] J. Slovák, Lineární algebra, elektronický učební text, `www.math.muni.cz/~slovak`.

Ke kapitolám 1, 2 a 3 lze doporučit [JS], [K] a [KM], ke kapitolám 5, 6 a 7 [D], [K], [KM] a [S] a ke kapitole 10 [S]. Mnohé příklady v tomto textu pocházejí z [JS] a [K].