

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

Věta 6.4. Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$a \geq c, a \wedge b = c \wedge b, a \vee b = c \vee b \implies a = c.$$

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Důkaz. „ \implies “ Každý podsvaz libovolného modulárního svazu je modulární, což N_5 není.

„ \impliedby “ Dle věty 6.4. existují $a, b, c \in G$ splňující $a > c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak podmnožina $\{a, b, c, a \wedge b, a \vee b\} \subseteq G$ je podsvaz G , který není modulární podle věty 6.4. Protože každý nejvýše čtyřprvkový svaz modulární je, jsou tyto prvky po dvou různé, proto je b nesrovnatelné s a i c . Tento podsvaz je tedy izomorfní s N_5 .

Důsledek. Duální svaz k modulárnímu svazu je opět modulární.

Distributivní svazy - definice

V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá distributivní, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní rovnost

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

Věta 7.1. *Nechť G je distributivní svaz. Pak pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí i následující distributivní rovnost*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c).$$

Důkaz. Z distributivity a absorpčního zákona dostáváme

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

Distributivní svazy - příklady a základní vlastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. *Každý distributivní svaz je modulární.*

Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Příklad. Svaz N_5 (pětiúhelník) ani svaz M_5 (diamant) nejsou distributivní.

Věta 7.3. *Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.*

Důkaz. V podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu.

Věta 7.4. *Součin distributivních svazů je distributivní svaz.*

Homomorfní obraz distributivního svazu je distributivní svaz.

Důkaz. Vlastnost „být distributivní“ je definována rovností.

Distributivní svazy - ekvivalentní podmínka

Připomeňme:

Věta 6.4. Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$a \geq c, a \wedge b = c \wedge b, a \vee b = c \vee b \implies a = c. \quad (1)$$

Věta 7.5. Svaz G je distributivní, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$a \wedge b = c \wedge b, a \vee b = c \vee b \implies a = c. \quad (2)$$

Důkaz. „ \implies “ Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ splňují $a \wedge b = c \wedge b, a \vee b = c \vee b$. Z absorpčních zákonů a distributivity

$$\begin{aligned} c &= (c \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) = \\ &= (a \vee c) \wedge (a \vee b) = a \vee (c \wedge b) = a \vee (a \wedge b) = a. \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$a = ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge (z \vee (x \wedge y)),$$

$$c = ((y \vee z) \wedge x) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge (x \vee (z \wedge y)),$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$. Protože $x \wedge y \leq y$, máme

$$a \wedge b = y \wedge (y \vee x) \wedge (z \vee (x \wedge y)) = y \wedge (z \vee (x \wedge y)) = (y \wedge z) \vee (x \wedge y) = c \wedge b.$$

Podobně z $y \leq y \vee x$ plyne

$$a \vee b = ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee y = ((y \vee x) \wedge z) \vee y = (y \vee x) \wedge (z \vee y) = c \vee b.$$

Pomocí implikace (2) dostáváme $a = c$. Z $x \wedge y \leq x$ plyne

$$\begin{aligned} x \wedge a &= x \wedge (y \vee x) \wedge (z \vee (x \wedge y)) = x \wedge (z \vee (x \wedge y)) = \\ &= (x \wedge z) \vee (x \wedge y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \wedge c &= x \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee (z \wedge y)) = x \wedge (x \vee (z \wedge y)) \wedge (y \vee z) = \\ &= x \wedge (y \vee z). \end{aligned}$$

Celkem tedy $x \wedge (y \vee z) = x \wedge c = x \wedge a = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Protože $x, y, z \in G$ byly libovolné, je G distributivní svaz.

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Věta 7.6. *Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).*

Důsledek. *Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Důkaz věty 7.6. „ \Rightarrow “ Každý podsvaz libovolného distributivního svazu je distributivní, což M_5 není.

„ \Leftarrow “ Necht' modulární svaz G není distributivní. Podle předchozí věty 7.5 existují $a, b, c \in G$ tak, že $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Podle věty 6.4 jsou a, c nesrovnatelné. Označme

$$m = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Z modularity (díky $a \wedge c \leq a \leq a \vee c$) plyne

$$m = (a \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$,
 $a \vee b = c \vee b$, $m = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c))$.
Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při
záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity

$m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$,
neboť $a \leq a \vee c$. Protože $b \vee a$ je horní závora b, c , je
 $b \vee a \geq a \vee c$, odkud $m \vee a = a \vee c$.

Záměnou $a \leftrightarrow c$ dostáváme, že $m \vee c = a \vee c$.

Dualizací předchozího výpočtu $m \wedge a = a \wedge c = m \wedge c$.

Proto $\{a, c, m, a \vee c, a \wedge c\}$ je podsvaz svazu G , který podle věty
7.5 není distributivní.

Snadno se ověří, že všechny nejvýše pětiprvkové modulární svazy
jsou distributivní s výjimkou těch, které jsou izomorfní s M_5 .

Proto je podsvaz $\{a, c, m, a \vee c, a \wedge c\}$ izomorfní s M_5 .

\vee -nedosažitelnost

Definice. Prvek a svazu G se nazývá \vee -nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

Poznámka. Prvek a svazu G je tedy \vee -nedosažitelný, jestliže neexistují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$.

Ekvivalentně: prvek a svazu G je \vee -nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $b < a$ a současně $c < a$, platí $b \vee c < a$.

Odtud indukcí: \vee -nedosažitelný prvek není supremem ani žádné neprázdné konečné množiny prvků ostře menších než on.

Označení. Množinu všech \vee -nedosažitelných prvků svazu G označíme $J(G)$.

Věta 7.7. V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech \vee -nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a \downarrow \cap J(G)).$$

Věta 7.7. V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech \vee -nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a\downarrow \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a .

I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G , který je \vee -nedosažitelný, proto $\{a\} = a\downarrow \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.

II. krok. Předpokládejme tedy, že $m > 0$ a že pro všechny prvky, které převyšují v G méně než m prvků, byla již věta dokázána.

Nechť $a \in G$ je libovolný. Pokud $a \in J(G)$, zřejmě je a největším prvkem množiny $a\downarrow \cap J(G)$, tedy i supremem.

Nechť tedy $a \notin J(G)$, pak existují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$. Zřejmě oba prvky splňují indukční předpoklad, tedy

$$\begin{aligned} a = b \vee c &= \sup(b\downarrow \cap J(G)) \vee \sup(c\downarrow \cap J(G)) = \\ &= \sup((b\downarrow \cap J(G)) \cup (c\downarrow \cap J(G))) = \sup((b\downarrow \cup c\downarrow) \cap J(G)) \leq \\ &\leq \sup(a\downarrow \cap J(G)), \end{aligned}$$

protože $(b\downarrow \cup c\downarrow) \cap J(G) \subseteq a\downarrow \cap J(G)$. Ovšem $\sup(a\downarrow \cap J(G)) \leq a$, protože a je horní závora množiny $a\downarrow \cap J(G)$. Dohromady rovnost.

Konečné distributivní svazy

Definice. Necht' (A, \leq) je uspořádaná množina. Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá dědičná (někdy pro zdůraznění říkáme *dolů dědičná*), pokud pro každý prvek $b \in B$ a každý $a \in A$, $a \leq b$, platí $a \in B$.

Poznámka. Množina $B \subseteq A$ je tedy dědičná, jestliže s každým svým prvkem obsahuje všechny prvky množiny A , které jsou ještě menší. Pomocí této vlastnosti můžeme charakterizovat ideály svazu: jsou to právě dědičné podsvazy.

Označení. Množinu všech *neprázdných* dědičných podmnožin uspořádané množiny A značíme $D(A)$.

Věta 7.8. Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech \vee -nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním \leq , které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G . Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).

Důkaz. Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí. Dále předpokládejme, že G je neprázdný.

Definujme zobrazení $\eta : G \rightarrow D(J(G))$ předpisem

$\eta(a) = a\downarrow \cap J(G)$ pro libovolné $a \in G$.

Zřejmě $a\downarrow$ je dědičná množina v G , proto její průnik s $J(G)$ je dědičnou množinou v $J(G)$. Navíc $a\downarrow \cap J(G)$ obsahuje nejmenší prvek svazu G , a tedy je prvkem $D(J(G))$.

Ukažme, že η je izotonní zobrazení: necht' $a, b \in G$ splňují $a \leq b$, pak $a\downarrow \subseteq b\downarrow$, tedy $\eta(a) = a\downarrow \cap J(G) \subseteq b\downarrow \cap J(G) = \eta(b)$.

Podle věty 7.7 pro každé $a \in G$ platí $a = \sup \eta(a)$, je tedy η injektivní: jestliže pro $a, b \in G$ platí $\eta(a) = \eta(b)$, pak $a = \sup \eta(a) = \sup \eta(b) = b$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \dots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a \downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \dots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je \vee -nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \dots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$. Ovšem $x_i \in X$, která je dědičná, tedy $y \in X$, tedy $\eta(a) \subseteq X$. Dohromady $\eta(a) = X$.

Je tedy η izotonní bijekce. Zbývá ukázat, že i inverzní zobrazení η^{-1} je izotonní. Necht' $a, b \in G$ jsou takové, že $\eta(a) \subseteq \eta(b)$. Pak podle věty 7.7 platí $a = \sup \eta(a) \leq \sup \eta(b) = b$.

Charakterizace konečných distributivních svazů

Věta 7.8. Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech \vee -nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním \leq , které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G . Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).

Důsledek. Každý konečný distributivní svaz je izomorfní s některým podsvazem svazu všech podmnožin nějaké konečné množiny.

Důkaz. Zřejmě sjednocení i průnik neprázdných dědičných podmnožin je opět neprázdná dědičná podmnožina (průnik je neprázdný, protože obsahuje nejmenší prvek svazu).

Proto jsou operacemi suprema a infima ve svazu $D(J(G))$ právě množinový průnik a sjednocení.

Je tedy $(D(J(G)), \subseteq)$ podsvazem svazu $(\mathcal{P}(J(G)), \subseteq)$ všech podmnožin množiny $J(G)$.

Komplementární svazy

Definice. Necht' G je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1 . Řekneme, že prvek $b \in G$ je komplementem prvku $a \in G$ ve svazu G , jestliže platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Svaz G se nazývá komplementární, jestliže ke každému prvků existuje aspoň jeden komplement.

Poznámka. Z komutativity obou operací plyne, že je-li prvek b komplementem prvku a , pak je prvek a komplementem prvku b .

Příklad. Svazy M_5 (diamant) a N_5 (pětiúhelník) jsou komplementární, avšak k některým prvkům existuje komplementů více než jeden.

Příklad. Řetězec mající aspoň tři prvky není komplementární.

Poznámka. Podsvaz komplementárního svazu nemusí být komplementární: komplementární svaz N_5 (pětiúhelník) obsahuje čtyřprvkový řetězec jako podsvaz.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*

Důkaz. Necht' G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g, h) \wedge (0, 0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0, 0)$, je $(0, 0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1, 1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$. Pak pro libovolný komplement g_1 prvku g ve svazu G a pro libovolný komplement h_1 prvku h ve svazu H platí

$$(g, h) \wedge (g_1, h_1) = (g \wedge g_1, h \wedge h_1) = (0, 0),$$

$$(g, h) \vee (g_1, h_1) = (g \vee g_1, h \vee h_1) = (1, 1),$$

a tedy (g_1, h_1) je komplementem prvku (g, h) ve svazu $G \times H$.

Poznámka. Duální svaz ke komplementárnímu svazu je komplementární (komplementy se zachovávají).

Věta 8.2. *V distributivním svazu je komplement prvku, pokud existuje, určen jednoznačně.*

Důkaz. Necht' a_1, a_2 jsou komplementy prvku b . Pak platí

$$a_1 \wedge b = 0 = a_2 \wedge b, \quad a_1 \vee b = 1 = a_2 \vee b.$$

Podle věty 7.5 odtud plyne $a_1 = a_2$.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1. Komplement prvku $a \in G$ je dle předchozí věty určen jednoznačně, značíme jej a' .

Příklad. V libovolné Booleově algebře platí $0' = 1$, $1' = 0$.

Poznámka. Duální svaz k Booleově algebře je Booleova algebra (komplementy se zachovávají, 0 a 1 se v dualitě vymění).

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ Booleova algebra (uspořádáním je množinová inkluze): nejmenší prvek je \emptyset , největší prvek je X a komplementem prvku $A \subseteq X$ je prvek $X - A$.

Věta 8.3. *Součinem Booleových algeber je Booleova algebra.*

Důkaz. Plyne z vět 7.4 a 8.1.

De Morganovy zákony

Věta 8.4. V libovolné Booleově algebře pro každé prvky a, b platí

1. $a'' = a$,
2. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
3. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

Důkaz. Prvky a'' i a jsou komplementy prvku a' , z jednoznačnosti komplementu $a'' = a$. Druhou rovnost odvodíme z distributivity:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (a' \wedge b') &= ((a \vee b) \vee a') \wedge ((a \vee b) \vee b') = \\ &= ((a \vee a') \vee b) \wedge ((b' \vee b) \vee a) = \\ &= (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1,\end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') &= (a \wedge (a' \wedge b')) \vee (b \wedge (a' \wedge b')) = \\ &= ((a \wedge a') \wedge b') \vee ((b \wedge b') \wedge a') = \\ &= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

Je tedy $a' \wedge b'$ komplementem prvku $a \vee b$, což jsme chtěli ukázat. Třetí rovnost dostaneme z druhé užitím duality.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru. Pro každý $a \in B$ je $\{0, 1, a, a'\}$ Booleova podalgebra.

Příklad. Je-li X nekonečná množina, pak

$Y = \{A \subseteq X; A \text{ je konečná nebo } X - A \text{ je konečná}\}$
je Booleova podalgebra Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Věta 8.5. Libovolná Booleova podalgebra je Booleova algebra.

Důkaz. Jakožto podsvaz distributivního svazu je Booleova podalgebra distributivní svaz. Protože nejmenší (resp. největší) prvek Booleovy podalgebry je nejmenším (resp. největším) prvkem celé Booleovy algebry, z toho, že operace \vee a \wedge se v podsvazu počítají stejně jako v celém svazu, plyne, že komplement daného prvku v Booleově podalgebře je stejný jako komplement tohoto prvku v celé Booleově algebře. Je tedy Booleova podalgebra komplementární svaz, což jsme měli dokázat.

Homomorfismy Booleových algeber

Definice. Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \rightarrow H$.

Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Řekneme, že f je izomorfismus Booleových algeber, je-li f bijektivní homomorfismus Booleových algeber.

Booleovy algebry G a H nazveme izomorfní, jestliže existuje izomorfismus Booleových algeber $f : G \rightarrow H$.

Věta 8.6. *Nechť $f : G \rightarrow H$ je homomorfismus Booleových algeber, $a \in G$. Pak platí $f(a') = f(a)'$.*

Důkaz. Jistě platí

$$f(a') \vee f(a) = f(a' \vee a) = f(1) = 1,$$

$$f(a') \wedge f(a) = f(a' \wedge a) = f(0) = 0.$$

Odtud plyne, že $f(a)$ je komplementem prvku $f(a')$ v Booleově algebře H .

Konečné Booleovy algebry

Definice. Necht' G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G , jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a .

Věta 8.7. Necht' G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Důkaz. Užijeme větu 7.8. Každý atom je \vee -nedosažitelný, stejně jako prvek 0 . Ukážeme, že jiné \vee -nedosažitelné prvky G nemá. Jestliže \vee -nedosažitelný prvek $x \in G$ není atom ani 0 , existuje $y \in G$, že $0 < y < x$. Pak $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$. Ze \vee -nedosažitelnosti x plyne $x = x \wedge y'$, tj. $x \leq y'$, odkud $y < y'$, tedy $y = y \wedge y' = 0$, spor.

Ukázali jsme, že $J(G) = A \cup \{0\}$, a protože libovolné dva různé atomy jsou nesrovnatelné, je $D(J(G)) = \{M \subseteq A \cup \{0\} \mid 0 \in M\}$. Zřejmě zobrazení $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow D(J(G))$ určené předpisem $f(M) = M \cup \{0\}$ je izomorfismus uspořádaných množin, tedy i svazů, a věta plyne z věty 7.8.