

Úlohy k procvičování textu o univerzální algebře

Číslo za pomlčkou v označení úlohy je číslo kapitoly textu, která je úlohou procvičovaná. Každá úloha je vyřešena o několik stránek později.

Kontrolní otázky - zadání

Odpovězte, zda uvedené tvrzení je pravdivé.

- [K1-1] **ano - ne** Obsahuje-li typ Ω alespoň jeden nulární operační symbol, pak je každá Ω -algebra neprázdná.
- [K2-1] **ano - ne** Obsahuje-li typ Ω alespoň jeden unární operační symbol, pak je každá Ω -algebra neprázdná.
- [K3-2] **ano - ne** Množina všech podalgeber dané univerzální algebry A typu Ω uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz.
- [K4-2] **ano - ne** Složením homomorfismů Ω -algeber je opět homomorfismus Ω -algeber.
- [K5-3] **ano - ne** Projekce ze součinu Ω -algeber je surjektivní homomorfismus Ω -algeber.
- [K6-3] **ano - ne** Součin Ω -algeber přes prázdnou množinu indexů je prázdná Ω -algebra.
- [K7-4] **ano - ne** Jádro homomorfismu Ω -algeber $A \rightarrow B$ je podalgebra Ω -algebry A .
- [K8-4] **ano - ne** Projekce z Ω -algebry na faktorovou algebru je surjektivní homomorfismus Ω -algeber.
- [K9-4] **ano - ne** Každá kongruence na Ω -algebře A je jádrem vhodného homomorfismu Ω -algeber vycházejícího z Ω -algebry A .
- [K10-5] **ano - ne** Jestliže typ Ω neobsahuje žádný nulární operační symbol, pak neexistuje žádný nulární term typu Ω .
- [K11-5] **ano - ne** Jestliže typ Ω neobsahuje žádný unární operační symbol, pak neexistuje žádný unární term typu Ω .
- [K12-6] **ano - ne** Každá varieta Ω -algeber je neprázdná. *[Do každé variety Ω -algeber patří všechny jednoprvkové Ω -algebry.]*
- [K13-6] **ano - ne** Pro libovolný typ Ω tvoří třída všech Ω -algeber varietu Ω -algeber.
- [K14-6] **ano - ne** Pro libovolný typ Ω tvoří třída všech jednoprvkových Ω -algeber varietu Ω -algeber.
- [K15-7] **ano - ne** Pro každý typ Ω je volná Ω -algebra generovaná prázdnou množinou konečná Ω -algebra.

[K16-7] **ano - ne** Pro každý typ Ω je volná Ω -algebra generovaná prázdnou množinou nekonečná Ω -algebra.

[K17-8] **ano - ne** Pro každou varietu V typu Ω platí: libovolná rovnost typu Ω platí ve volné algebře $F(V)$ variety V právě tehdy, když tato rovnost platí v každé Ω -algebře variety V .

Úlohy - zadání

[Ú1-2] Je dán typ $\Omega = \{*\}$, kde $*$ je unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^* = \begin{cases} a - 1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a + 1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

- (a) Popište všechny podalgebry Ω -algebry \mathbb{Z} .
- (b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus Ω -algeber.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú2-3] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde \bullet je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = x + 1$.

- (a) Určete všechny podalgebry této Ω -algebry.
- (b) Popište součin dvou kopií této Ω -algebry, tj. Ω -algebry $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (c) Popište všechny homomorfismy Ω -algeber $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú3-4] Je dán typ $\Omega = \{f\}$, kde f je unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace $f_{\mathbb{Z}}$ definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe $f_{\mathbb{Z}}(a) = |a| - 10$, kde $|a|$ značí obvyklou absolutní hodnotu celého čísla a .

- (a) Popište podalgebru $\langle \{-53\} \rangle$ generovanou jednoprvkovou podmnožinou $\{-53\}$ v Ω -algebře \mathbb{Z} .
- (b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x + 1$, kde $+$ značí obvyklé sčítání celých čísel, je homomorfismem Ω -algeber.
- (c) Definujme relaci \sim na \mathbb{Z} takto: pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ klademe $a \sim b$, právě když rozdíl $a - b$ je dělitelný deseti. Rozhodněte, zda \sim je kongruence na Ω -algebře \mathbb{Z} .

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú4-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde \bullet je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$.

- Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x^2$ je homomorfismem Ω -algeber.
- Určete, pro které $M \subseteq \mathbb{Z}$ tvoří M podalgebru Ω -algebry \mathbb{Z} .
- Popište volnou Ω -algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú5-7] Je dán typ $\Omega = \{\ast, '\}$, kde \ast i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = -a, \quad a^{\ast} = \begin{cases} a + 1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a - 1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

- Popište všechny podalgebry Ω -algebry \mathbb{Z} .
- Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = \begin{cases} a - 1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a + 1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a < 0. \end{cases}$$

je homomorfismus Ω -algeber.

- Popište volnou Ω -algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú6-7] Je dán typ $\Omega = \{\ast\}$, kde \ast je unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^{\ast} = a + (-1)^a.$$

- Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus Ω -algeber.
- Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V určené teorií $\{x_1^{\ast\ast} = x_1\}$.
- Popište volnou Ω -algebru $F_3(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú7-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde \bullet je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$.

- (a) Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V typu Ω určené teorií $\{x_1'' = \bullet\}$.
- (b) Popište volnou algebru typu Ω generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.
- (c) Popište volnou algebru variety V generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú8-7] Je dán typ $\Omega = \{\ast, '\}$, kde \ast i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = |a|, \quad a^\ast = (-1)^a \cdot a.$$

- (a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = -a$$

je homomorfismus Ω -algeber.

- (b) Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V určené teorií $\{x_1^{\ast\ast} = x_1, x_1'' = x_1', x_1^{\ast'} = x_1'\}$.
- (c) Určete počet prvků volné Ω -algebry $F_1(V)$ variety V generované množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú9-7] Je dán typ $\Omega = \{n, g\}$, kde n je nulární a g unární operační symbol. Označme množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B = \{6, 7, 8\}$. Položme

$$n_A = g_A(1) = g_A(2) = 3, \quad g_A(3) = g_A(4) = 5, \quad g_A(5) = 4,$$

a

$$n_B = g_B(6) = 7, \quad g_B(7) = g_B(8) = 8.$$

Tím jsme vytvořili Ω -algebry A, B . Uvažme teorii

$$T = \{g(g(g(x_1))) = g(n)\}$$

a varietu V typu Ω určenou teorií T .

- (a) Rozhodněte, zda Ω -algebra A patří do V .
- (b) Rozhodněte, zda Ω -algebra B patří do V .
- (c) Popište volnou algebru $F_0(V)$ variety V generovanou prázdnou množinou.
- (d) Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú10-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde n je unární operační symbol. Je dána Ω -algebra \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a + 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $+$ značí obvyklé sčítání). Dále je dána Ω -algebra $A = \{\Delta, \bigcirc\}$ s unární operací n_A definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \Delta$, $n_A(\Delta) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(n(x_1)))) = x_1\}$ a varietu V typu Ω určenou teorií T .

- (a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus Ω -algebry \mathbb{Z} do Ω -algebry A .
- (b) U obou Ω -algeber A a \mathbb{Z} rozhodněte, zda patří do V .
- (c) Popište volnou algebru $F_0(\Omega)$ typu Ω generovanou prázdnou množinou.
- (d) Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú11-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde n je unární operační symbol. Je dána Ω -algebra \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a - 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $-$ značí obvyklé odčítání). Dále je dána Ω -algebra $A = \{\Delta, \bigcirc\}$ s unární operací n_A definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \Delta$, $n_A(\Delta) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(x_1))) = n(x_1)\}$ a varietu V typu Ω určenou teorií T .

- (a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus Ω -algebry A do Ω -algebry \mathbb{Z} .
- (b) U obou Ω -algeber A a \mathbb{Z} rozhodněte, zda patří do V .
- (c) Popište volnou algebru $F_1(\Omega)$ typu Ω generovanou množinou $\{x_1\}$.
- (d) Popište volnou algebru $F_2(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ú12-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde n je unární operační symbol. Je dána Ω -algebra \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$n_{\mathbb{Z}}(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a > 1, \\ 0 & \text{pro } -1 \leq a \leq 1, \\ -1 & \text{pro } a < -1. \end{cases}$$

Dále jsou dána zobrazení $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ a $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ předpisy $f(a) = 3a$, $g(a) = a^2$ (kde užitá operace ve výrazech značí obvyklé operace s celými čísly). Nechť varieta V_1 typu Ω je určena teorií $T_1 = \{n(n(n(x_1))) = n(n(x_1))\}$ a varieta V_2 typu Ω je určena teorií $T_2 = \{n(n(x_1)) = n(n(x_2))\}$ typu Ω .

- (a) Rozhodněte, zda zobrazení f je homomorfismem Ω -algeber.
- (b) Rozhodněte, zda zobrazení g je homomorfismem Ω -algeber.
- (c) Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V_1 .
- (d) Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V_2 .
- (e) Popište volnou algebru $F_1(V_1)$ variety V_1 generovanou množinou $\{x_1\}$.
- (f) Popište volnou algebru $F_1(V_2)$ variety V_2 generovanou množinou $\{x_1\}$.
- (g) Rozhodněte, zda variety V_1 a V_2 jsou stejné.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Kontrolní otázky - řešení

- [K1-1] **ano** Obsahuje-li typ Ω alespoň jeden nulární operační symbol, pak je každá Ω -algebra neprázdná. *[Plyne přímo z definice.]*
- [K2-1] **ne** Obsahuje-li typ Ω alespoň jeden unární operační symbol, pak je každá Ω -algebra neprázdná. *[Pro každý typ, který neobsahuje žádný nulární operační symbol, existuje prázdná Ω -algebra.]*
- [K3-2] **ano** Množina všech podalgeber dané univerzální algebry A typu Ω uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz. *[Jde o jeden z důsledků věty 2.1.]*
- [K4-2] **ano** Složením homomorfismů Ω -algeber je opět homomorfismus Ω -algeber. *[Jde o větu 2.2.]*
- [K5-3] **ne** Projekce ze součinu Ω -algeber je surjektivní homomorfismus Ω -algeber. *[Protože Ω -algebry mohou být i prázdné, nemusí být obecně projekce ze součinu surjektivní, uvažte součin prázdné Ω -algebry s neprázdnou Ω -algebrou a projekci z tohoto součinu do oné neprázdné Ω -algebry.]*
- [K6-3] **ne** Součin Ω -algeber přes prázdnou množinu indexů je prázdná Ω -algebra. *[Součin Ω -algeber přes prázdnou množinu indexů je vždy jednoprvková Ω -algebra. Toto tvrzení nemohlo být pravdivé i proto, že v případě, kdy typ Ω obsahuje alespoň jeden nulární operační symbol, je každá Ω -algebra neprázdná.]*
- [K7-4] **ne** Jádro homomorfismu Ω -algeber $A \rightarrow B$ je podalgebra Ω -algebry A . *[Podle definice je jádrem homomorfismu Ω -algeber $A \rightarrow B$ kongruence na Ω -algebře A .]*
- [K8-4] **ano** Projekce z Ω -algebry na faktorovou algebru je surjektivní homomorfismus Ω -algeber. *[Plyne z věty 4.3 - viz definici projekce.]*
- [K9-4] **ano** Každá kongruence na Ω -algebře A je jádrem vhodného homomorfismu Ω -algeber vycházejícího z Ω -algebry A . *[Jde o důsledek věty 4.3.]*
- [K10-5] **ano** Jestliže typ Ω neobsahuje žádný nulární operační symbol, pak neexistuje žádný nulární term typu Ω . *[Plyne přímo z definice termu.]*
- [K11-5] **ne** Jestliže typ Ω neobsahuje žádný unární operační symbol, pak neexistuje žádný unární term typu Ω . *[Pro libovolný typ je x_1 unární term.]*
- [K12-6] **ano** Každá varieta Ω -algeber je neprázdná. *[Do každé variety Ω -algeber patří všechny jednoprvkové Ω -algebry.]*
- [K13-6] **ano** Pro libovolný typ Ω tvoří třída všech Ω -algeber varietu Ω -algeber. *[Jde o varietu Ω -algeber určenou prázdnou teorií.]*
- [K14-6] **ne** Pro libovolný typ Ω tvoří třída všech jednoprvkových Ω -algeber varietu Ω -algeber. *[Nesahuje-li typ Ω žádný nulární operační symbol, existuje i prázdná Ω -algebra, ve které platí všechny rovnosti typu Ω , a tedy patří do každé variety Ω -algeber.]*

- [K15-7] **ne** Pro každý typ Ω je volná Ω -algebra generovaná prázdnou množinou konečná Ω -algebra. [Obsahuje-li například typ Ω nekonečně mnoho nulárních operačních symbolů, je volná Ω -algebra generovaná prázdnou množinou nekonečná.]
- [K16-7] **ne** Pro každý typ Ω je volná Ω -algebra generovaná prázdnou množinou nekonečná Ω -algebra. [Obsahuje-li typ Ω jen nulární operační symboly, je nosnou množinou volné Ω -algebry generované prázdnou množinou právě typ Ω .]
- [K17-8] **ano** Pro každou varietu V typu Ω platí: libovolná rovnost typu Ω platí ve volné algebře $F(V)$ variety V právě tehdy, když tato rovnost platí v každé Ω -algebře variety V . [Viz poznámku za větou 8.6 (tj. na konci textu).]

Úlohy - řešení

- [Ú1-2] Je dán typ $\Omega = \{*\}$, kde $*$ je unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^* = \begin{cases} a - 1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a + 1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

- (a) Popište všechny podalgebry Ω -algebry \mathbb{Z} .
- (b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus Ω -algeber.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Podalgebry jsou podmnožiny uzavřené na operaci $*$, je to tedy celé \mathbb{Z} , prázdná množina a pro každá dvě nezáporná celá čísla m, n množiny $\{a \in \mathbb{Z}; -m \leq a \leq n\}$, $\{a \in \mathbb{Z}; a \leq n\}$, $\{a \in \mathbb{Z}; -m \leq a\}$. Platí $\varphi(1)^* = 0^* = 0$, kdežto $\varphi(1^*) = \varphi(0) = 1$, proto φ není homomorfismus Ω -algeber.]

- [Ú2-3] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde \bullet je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = x + 1$.

- (a) Určete všechny podalgebry této Ω -algebry.
- (b) Popište součin dvou kopií této Ω -algebry, tj. Ω -algebru $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (c) Popište všechny homomorfismy Ω -algeber $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Každá podalgebra musí obsahovat $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a s každým svým prvkem i číslo o jedna větší, tedy podalgebry jsou právě množiny $M_n = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq n\}$, kde n probíhá množinu nekladných celých čísel (tj. $n \in \mathbb{Z}, n \leq 0$). Součin dvou kopií Ω -algebry \mathbb{Z} je Ω -algebra $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (tj. na množině všech uspořádaných

dvojic celých čísel), kde jsou operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = (0, 0)$ a pro každé $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je $(x, y)' = (x + 1, y + 1)$. Homomorfismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ je zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ splňující $\varphi(\bullet_{\mathbb{Z}}) = \bullet_{\mathbb{Z}}$, tedy $\varphi(0) = 0$, a také pro každé $x \in \mathbb{Z}$ splňuje $\varphi(x') = \varphi(x)'$, tj. $\varphi(x + 1) = \varphi(x) + 1$. Snadno se dokáže indukcí, že pak $\varphi(x) = x$:

1. Dokazované platí pro $x = 0$.
2. Předpokládejme, že n je přirozené číslo takové, že dokazované platí pro $n - 1$, tj. je $\varphi(n - 1) = n - 1$, a dokažme tvrzení pro n . Pak $\varphi(n) = \varphi((n - 1) + 1) = \varphi(n - 1) + 1 = n - 1 + 1 = n$.
3. Předpokládejme, že n je přirozené číslo takové, že dokazované platí pro $-(n - 1)$, tj. je $\varphi(1 - n) = 1 - n$, a dokažme tvrzení pro $-n$. Pak $1 - n = \varphi(1 - n) = \varphi(-n + 1) = \varphi(-n) + 1$. Odečtením 1 dostaneme potřebné.

Jediným homomorfismem Ω -algeber $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ je tedy identita.]

[Ú3-4] Je dán typ $\Omega = \{f\}$, kde f je unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace $f_{\mathbb{Z}}$ definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe $f_{\mathbb{Z}}(a) = |a| - 10$, kde $|a|$ značí obvyklou absolutní hodnotu celého čísla a .

- (a) Popište podalgebru $\langle \{-53\} \rangle$ generovanou jednoprvkovou podmnožinou $\{-53\}$ v Ω -algebře \mathbb{Z} .
- (b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x + 1$, kde $+$ značí obvyklé sčítání celých čísel, je homomorfismem Ω -algeber.
- (c) Definujme relaci \sim na \mathbb{Z} takto: pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ klademe $a \sim b$, právě když rozdíl $a - b$ je dělitelný deseti. Rozhodněte, zda \sim je kongruence na Ω -algebře \mathbb{Z} .

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Platí $\langle \{-53\} \rangle = \{-53, 43, 33, 23, 13, 3, -7, -3\}$. Zobrazení φ není homomorfismem Ω -algeber, neboť například $\varphi(f_{\mathbb{Z}}(-1)) = \varphi(-9) = -8 \neq -10 = f_{\mathbb{Z}}(0) = f_{\mathbb{Z}}(\varphi(-1))$. Relace \sim není kongruence na Ω -algebře \mathbb{Z} , neboť například $4 \sim -6$, avšak $f_{\mathbb{Z}}(4) = -6 \not\sim -4 = f_{\mathbb{Z}}(-6)$.]

[Ú4-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde \bullet je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$.

- (a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x) = x^2$ je homomorfismem Ω -algeber.
- (b) Určete, pro které $M \subseteq \mathbb{Z}$ tvoří M podalgebru Ω -algebry \mathbb{Z} .
- (c) Popište volnou Ω -algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Platí $\varphi(\bullet_{\mathbb{Z}}) = \varphi(0) = 0^2 = 0 = \bullet_{\mathbb{Z}}$, pro libovolné liché celé číslo a je a^2 liché, tedy $\varphi(a') = \varphi(1) = 1^2 = 1 = (a^2)' = \varphi(a)'$, pro libovolné sudé a je a^2 sudé, a proto $\varphi(a') = \varphi(0) = 0^2 = 0 = (a^2)' = \varphi(a)'$. Je tedy φ homomorfismus Ω -algeber. Podalgebra je libovolná podmnožina M množiny

\mathbb{Z} , která obsahuje $\bullet_{\mathbb{Z}}$ a s každým $a \in M$ též je $a' \in M$. Podalgebry jsou tedy právě všechny podmnožiny množiny všech sudých čísel obsahující 0 a všechny podmnožiny množiny všech celých čísel obsahující 0 i 1. Volná algebra typu Ω generovaná prázdnou množinou je podle definice algebra $F_0(\Omega)$ všech 0-árních termů typu Ω , tj.

$$F_0(\Omega) = \{\bullet, \bullet', \bullet'', \bullet''', \dots\},$$

kde je unární operace $'$ definována takto: k libovolnému termu přiřadí apofrof.]

[Ú5-7] Je dán typ $\Omega = \{\ast, '\}$, kde \ast i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = -a, \quad a^\ast = \begin{cases} a + 1 & \text{pro } a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a - 1 & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

- (a) Popište všechny podalgebry Ω -algebry \mathbb{Z} .
 (b) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = \begin{cases} a - 1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a > 0, \\ 0 & \text{pro } a = 0, \\ a + 1 & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, a < 0. \end{cases}$$

je homomorfismus Ω -algeber.

- (c) Popište volnou Ω -algebru generovanou prázdnou množinou.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Podalgebry jsou podmnožiny uzavřené na obě operace, je to tedy prázdná množina, $\{0\}$, a pro každé přirozené číslo n množiny $\{a \in \mathbb{Z}; |a| \geq n\}$ a $\{a \in \mathbb{Z}; |a| \geq n\} \cup \{0\}$. Platí $\varphi(1)^\ast = 0^\ast = 0$, kdežto $\varphi(1^\ast) = \varphi(2) = 1$, proto φ není homomorfismus Ω -algeber. Protože typ Ω neobsahuje žádný nulární operační symbol, je volná Ω -algebra generovaná prázdnou množinou prázdná Ω -algebra.]

[Ú6-7] Je dán typ $\Omega = \{\ast\}$, kde \ast je unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž je odpovídající operace definována takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a^\ast = a + (-1)^a.$$

- (a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(a) = 1 - a$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ je homomorfismus Ω -algeber.
 (b) Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V určené teorií $\{x_1^\ast = x_1\}$.
 (c) Popište volnou Ω -algebru $F_3(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Zobrazení φ je homomorfismus Ω -algeber, neboť pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned}\varphi(a^*) &= 1 - a^* = 1 - (a + (-1)^a) = 1 - a - (-1)^a, \\ (\varphi(a))^* &= (1 - a)^* = 1 - a + (-1)^{1-a} = 1 - a - (-1)^a.\end{aligned}$$

Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V , protože pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^{**} = (a + (-1)^a)^* = a + (-1)^a + (-1)^{a+(-1)^a} = a + (-1)^a - (-1)^a = a.$$

Volná Ω -algebra $F_3(\Omega)$ generovaná množinou $\{x_1, x_2, x_3\}$ se skládá ze všech 3-árních termů typu Ω , tedy

$$F_3(\Omega) = \{x_1, x_1^*, x_1^{**}, \dots, x_2, x_2^*, x_2^{**}, \dots, x_3, x_3^*, x_3^{**}, \dots\}.$$

Pro každý term $t \in F_3(\Omega)$ platí, že term t^{**} určuje v každé Ω -algebře variety V stejnou operaci jako term t , proto

$$F_3(V) = \{\{x_1, x_1^{**}, \dots\}, \{x_1^*, x_1^{***}, \dots\}, \{x_2, x_2^{**}, \dots\}, \{x_2^*, x_2^{***}, \dots\}, \\ \{x_3, x_3^{**}, \dots\}, \{x_3^*, x_3^{***}, \dots\}\},$$

kde operace $*$ je definována takto: pro libovolné $i = 1, 2, 3$ platí

$$\{x_i, x_i^{**}, \dots\}^* = \{x_i^*, x_i^{***}, \dots\}, \quad \{x_i^*, x_i^{***}, \dots\}^* = \{x_i, x_i^{**}, \dots\}. \quad]$$

[Ú7-7] Je dán typ $\Omega = \{\bullet, '\}$, kde \bullet je nulární a $'$ unární operační symbol. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: $\bullet_{\mathbb{Z}} = 0$ a pro libovolné liché $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 1$ a pro libovolné sudé $x \in \mathbb{Z}$ klademe $x' = 0$.

- Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V typu Ω určené teorií $\{x_1'' = \bullet\}$.
- Popište volnou algebru typu Ω generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.
- Popište volnou algebru variety V generovanou množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ω -algebra \mathbb{Z} nepatří do variety V , neboť například platí $(x_1'')_{\mathbb{Z}}(1) = 1'' = 1 \neq 0 = \bullet_{\mathbb{Z}}(1)$. Volná algebra typu Ω generovaná množinou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ je podle definice algebra $F_4(\Omega)$ všech 4-árních termů typu Ω , tj.

$$F_4(\Omega) = \{\bullet, \bullet', \bullet'', \dots, x_1, x_1', x_1'', \dots, x_2, x_2', x_2'', \dots, x_3, x_3', x_3'', \dots, \\ x_4, x_4', x_4'', \dots\},$$

kde jsou operace definovány takto: unární operace $'$ k libovolenému termu připiše apostrof, výsledkem nulární operace \bullet je prvek \bullet . Hledaná volná algebra variety V je $F_4(V) = F_4(\Omega) / \sim_V$, kde pro $t_1, t_2 \in F_4(\Omega)$ platí $t_1 \sim_V t_2$, právě když pro každou Ω -algebru A variety V oba termy t_1, t_2

určují stejnou operaci, tj. platí $(t_1)_A = (t_2)_A$. Ovšem pro libovolný prvek $a \in A$ je $a'' = \bullet_A$, tedy pro každý term $t \in F_4(\Omega)$ je $t'' \sim_V \bullet$. Protože v Ω -algebře A platí $\bullet''_A = \bullet_A$, plyne odtud aplikací operace $'$, že $\bullet'''_A = \bullet'_A$, ovšem také $\bullet'''_A = (\bullet'_A)'' = \bullet_A$, proto $\bullet'_A = \bullet_A$. Je tedy

$$F_4(V) = \{\{x_1\}, \{x'_1\}, \{x_2\}, \{x'_2\}, \{x_3\}, \{x'_3\}, \{x_4\}, \{x'_4\}, T\},$$

kde třída $T = F_4(\Omega) - \{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, x_4, x'_4\}$. Výsledkem nulární operace \bullet je zde třída T , dále $T' = T$ a pro libovolné $i = 1, 2, 3, 4$ platí

$$\{x_i\}' = \{x'_i\}, \quad \{x'_i\}' = T. \quad]$$

[Ú8-7] Je dán typ $\Omega = \{\ast, '\}$, kde \ast i $'$ jsou unární operační symboly. Uvažme Ω -algebru \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou právě všechna celá čísla), na níž jsou odpovídající operace definovány takto: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$a' = |a|, \quad a^\ast = (-1)^a \cdot a.$$

(a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem

$$\varphi(a) = -a$$

je homomorfismus Ω -algeber.

(b) Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V určené teorií $\{x_1^{\ast\ast} = x_1, x''_1 = x'_1, x^{\ast'}_1 = x'_1\}$.

(c) Určete počet prvků volné Ω -algebry $F_1(V)$ variety V generované množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Zobrazení φ není homomorfismus Ω -algeber, neboť například

$$\varphi((-1)') = \varphi(1) = -1,$$

kdežto

$$(\varphi(-1))' = 1' = 1.$$

Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V , protože pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^{\ast\ast} = ((-1)^a \cdot a)^\ast = (-1)^{(-1)^a \cdot a} \cdot (-1)^a \cdot a = a,$$

$$a'' = ||a| = |a| = a',$$

$$a^{\ast'} = |(-1)^a \cdot a| = |a| = a'.$$

Volná Ω -algebra $F_1(\Omega)$ generovaná množinou $\{x_1\}$ se skládá ze všech unárních termů typu Ω , což jsou termy $x_1, x_1^\ast, x'_1, x_1^{\ast\ast}, x_1^{\ast'}, x_1^{\ast}, x''_1$, atd. Vždy tedy jde o x_1 , na které jsou aplikovány v libovolném (konečném) počtu v libovolném pořadí oba operační symboly. Rovnosti $x''_1 = x'_1$ a $x_1^{\ast'} = x'_1$ způsobují, že každý term, na který je naposledy aplikován symbol $'$, určuje v každé Ω -algebře variety V stejnou operaci jako term x'_1 . Rovnost $x_1^{\ast\ast} = x_1$ způsobuje, že každý term, na který je naposledy aplikován dvakrát symbol \ast , určuje v každé Ω -algebře variety V stejnou operaci jako tento term bez oné aplikace. Proto každý unární term určuje stejnou operaci jako některý z termů $x_1, x_1^\ast, x'_1, x_1^{\ast}$. Žádné dva z těchto čtyř vyjmenovaných termů nemusejí určovat stejné operace, proto volná Ω -algebra $F_1(V)$ variety V generovaná množinou $\{x_1\}$ má čtyři prvky.]

[Ú9-7] Je dán typ $\Omega = \{n, g\}$, kde n je nulární a g unární operační symbol. Označme množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B = \{6, 7, 8\}$. Položme

$$n_A = g_A(1) = g_A(2) = 3, \quad g_A(3) = g_A(4) = 5, \quad g_A(5) = 4,$$

a

$$n_B = g_B(6) = 7, \quad g_B(7) = g_B(8) = 8.$$

Tím jsme vytvořili Ω -algebry A, B . Uvažme teorii

$$T = \{g(g(g(x_1))) = g(n)\}$$

a varietu V typu Ω určenou teorií T .

- Rozhodněte, zda Ω -algebra A patří do V .
- Rozhodněte, zda Ω -algebra B patří do V .
- Popište volnou algebru $F_0(V)$ variety V generovanou prázdnou množinou.
- Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Ω -algebra A nepatří do V , neboť například $g_A(g_A(g_A(1))) = g_A(g_A(3)) = g_A(5) = 4 \neq 5 = g_A(3) = g_A(n_A)$. Naproti tomu Ω -algebra B patří do V , neboť $g_B(g_B(g_B(6))) = g_B(g_B(g_B(7))) = g_B(g_B(g_B(8))) = g_B(n_B) = 8$. Podle definice je $F_0(\Omega)$ množina všech nulárních termů typu Ω , platí tedy $F_0(\Omega) = \{n, g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots\}$. Přitom rovnost $g(g(g(x_1))) = g(n)$ způsobí, že každý z uvedených termů, v němž se vyskytují alespoň tři g , je kongruentní s $g(n)$. Ovšem aplikací g na $g(g(g(n))) \sim g(n)$ dostaneme $g(g(g(g(n)))) \sim g(g(n))$, a tedy volná algebra $C = F_0(V)$ variety V generovaná prázdnou množinou je dvouprvková: $C = \{T_1, T_2\}$, kde $T_1 = \{n\}$, $T_2 = \{g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots\}$, přičemž $n_C = T_1$, $g_C(T_1) = g_C(T_2) = T_2$. Podobně $F_1(\Omega)$ je množina všech unárních termů typu Ω , tedy

$$F_1(\Omega) = \{n, g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots, \\ x_1, g(x_1), g(g(x_1)), g(g(g(x_1))), \dots\}$$

a volná algebra $D = F_1(V)$ variety V generovaná množinou $\{x_1\}$ je pěti-prvková: $D = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, kde $T_1 = \{n\}$,

$$T_2 = \{g(n), g(g(n)), g(g(g(n))), \dots, g(g(g(x_1))), g(g(g(g(x_1))))\},$$

$T_3 = \{x_1\}$, $T_4 = \{g(x_1)\}$, $T_5 = \{g(g(x_1))\}$, přičemž $n_D = T_1$, $g_D(T_1) = g_D(T_2) = T_2$, $g_D(T_3) = T_4$, $g_D(T_4) = T_5$, $g_D(T_5) = T_2$.]

[Ú10-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde n je unární operační symbol. Je dána Ω -algebra \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a + 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $+$ značí obvyklé sčítání). Dále je dána Ω -algebra $A = \{\Delta, \bigcirc\}$ s unární operací n_A definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \Delta$, $n_A(\Delta) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(n(x_1)))) = x_1\}$ a varietu V typu Ω určenou teorií T .

- (a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus Ω -algebry \mathbb{Z} do Ω -algebry A .
- (b) U obou Ω -algeber A a \mathbb{Z} rozhodněte, zda patří do V .
- (c) Popište volnou algebru $F_0(\Omega)$ typu Ω generovanou prázdnou množinou.
- (d) Popište volnou algebru $F_1(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Snadno se ověří, že zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A$, které lichá čísla zobrazí na Δ a sudá čísla na \bigcirc , je homomorfismus Ω -algeber. Dosazením obou prvků Ω -algebry A ověříme, že v ní je identita teorie T splněna, a tedy Ω -algebra A patří do variety V . Naproti tomu Ω -algebra \mathbb{Z} nepatří do variety V , neboť například $n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(0)))) = 4 \neq 0$. Protože typ Ω nemá žádný nulární operační symbol, neexistuje žádný nulární term typu Ω , a tedy volná algebra $F_0(\Omega)$ typu Ω , generovaná prázdnou množinou, je prázdná Ω -algebra. Volnou algebrou $F_1(\Omega)$ typu Ω , generovanou množinou $\{x_1\}$, je množina všech unárních termů typu Ω , tedy

$$F_1(\Omega) = \{x_1, n(x_1), n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), \dots\}.$$

Faktorizací dostaneme volnou algebru $B = F_1(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1\}$. Platí $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, kde

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x_1, n(n(n(n(x_1))))), n(n(n(n(n(n(n(x_1)))))))))\}, \\ M_2 &= \{n(x_1), n(n(n(n(x_1))))), \dots\}, \\ M_3 &= \{n(n(x_1)), n(n(n(n(x_1))))), \dots\}, \\ M_4 &= \{n(n(n(x_1))), n(n(n(n(n(x_1))))))\}, \dots\}. \end{aligned}$$

Přitom $n_B(M_1) = M_2$, $n_B(M_2) = M_3$, $n_B(M_3) = M_4$, $n_B(M_4) = M_1$.

[Ú11-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde n je unární operační symbol. Je dána Ω -algebra \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: $n_{\mathbb{Z}}(a) = a - 1$ pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ (kde $-$ značí obvyklé odčítání). Dále je dána Ω -algebra $A = \{\Delta, \bigcirc\}$ s unární operací n_A definovanou takto: $n_A(\bigcirc) = \Delta$, $n_A(\Delta) = \bigcirc$. Uvažme teorii $T = \{n(n(n(x_1))) = n(x_1)\}$ a varietu V typu Ω určenou teorií T .

- (a) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus Ω -algebry A do Ω -algebry \mathbb{Z} .
- (b) U obou Ω -algeber A a \mathbb{Z} rozhodněte, zda patří do V .
- (c) Popište volnou algebru $F_1(\Omega)$ typu Ω generovanou množinou $\{x_1\}$.
- (d) Popište volnou algebru $F_2(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Dokažme sporem, že žádný homomorfismus Ω -algeber $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}$ neexistuje. Předpokládejme tedy jeho existenci. Pak $\Delta = n_A(\bigcirc) = n_A(n_A(\Delta))$ a tedy z toho, že φ je homomorfismus Ω -algeber, plyne

$$\varphi(\Delta) = \varphi(n_A(n_A(\Delta))) = n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(\varphi(\Delta))) = \varphi(\Delta) - 2,$$

což nesplňuje žádné celé číslo $\varphi(\Delta)$, spor. Dosazením obou prvků Ω -algebry A ověříme, že v ní je identita teorie T splněna, a tedy Ω -algebra A patří do variety V . Naproti tomu Ω -algebra \mathbb{Z} nepatří do variety V , neboť například $n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(n_{\mathbb{Z}}(0))) = -3 \neq -1 = n_{\mathbb{Z}}(0)$. Volnou algebrou $F_1(\Omega)$ typu Ω , generovanou množinou $\{x_1\}$, je množina všech unárních termů typu Ω , tedy $F_1(\Omega) = \{x_1, n(x_1), n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), \dots\}$. Podobně volnou algebrou $F_2(\Omega)$ typu Ω , generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$, je množina všech binárních termů typu Ω , tedy

$$F_2(\Omega) = \{x_1, n(x_1), n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), \dots, \\ x_2, n(x_2), n(n(x_2)), n(n(n(x_2))), \dots\}.$$

Faktorizací dostaneme volnou algebru $B = F_2(V)$ variety V generovanou množinou $\{x_1, x_2\}$. Platí $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$, kde

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x_1\}, \\ M_2 &= \{n(x_1), n(n(n(x_1))), n(n(n(n(n(x_1))))), \dots\}, \\ M_3 &= \{n(n(x_1)), n(n(n(n(x_1))))), \dots\}, \\ M_4 &= \{x_2\}, \\ M_5 &= \{n(x_2), n(n(n(x_2))), n(n(n(n(n(x_2))))), \dots\}, \\ M_6 &= \{n(n(x_2)), n(n(n(n(x_2))))), \dots\}. \end{aligned}$$

Přitom $n_B(M_1) = M_2$, $n_B(M_2) = M_3$, $n_B(M_3) = M_2$, $n_B(M_4) = M_5$, $n_B(M_5) = M_6$, $n_B(M_6) = M_5$.]

[Ú12-7] Je dán typ $\Omega = \{n\}$, kde n je unární operační symbol. Je dána Ω -algebra \mathbb{Z} (tj. jejími prvky jsou tedy právě všechna celá čísla), na níž je unární operace $n_{\mathbb{Z}}$ definována předpisem: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ klademe

$$n_{\mathbb{Z}}(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a > 1, \\ 0 & \text{pro } -1 \leq a \leq 1, \\ -1 & \text{pro } a < -1. \end{cases}$$

Dále jsou dána zobrazení $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ a $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ předpisy $f(a) = 3a$, $g(a) = a^2$ (kde užitá operace ve výrazech značí obvyklé operace s celými čísly). Nechť varieta V_1 typu Ω je určena teorií $T_1 = \{n(n(n(x_1))) = n(n(x_1))\}$ a varieta V_2 typu Ω je určena teorií $T_2 = \{n(n(x_1)) = n(n(x_2))\}$ typu Ω .

- Rozhodněte, zda zobrazení f je homomorfismem Ω -algeber.
- Rozhodněte, zda zobrazení g je homomorfismem Ω -algeber.
- Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V_1 .
- Rozhodněte, zda Ω -algebra \mathbb{Z} patří do variety V_2 .
- Popište volnou algebru $F_1(V_1)$ variety V_1 generovanou množinou $\{x_1\}$.
- Popište volnou algebru $F_1(V_2)$ variety V_2 generovanou množinou $\{x_1\}$.
- Rozhodněte, zda variety V_1 a V_2 jsou stejné.

Svá tvrzení zdůvodněte.

[Zobrazení f není homomorfismem Ω -algeber, neboť například $n_{\mathbb{Z}}(f(1)) = n_{\mathbb{Z}}(3) = 1$, avšak $f(n_{\mathbb{Z}}(1)) = f(0) = 0$. Dokažme, že zobrazení g je homomorfismem Ω -algeber. Pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $a > 1$ platí také $a^2 > 1$, a tedy $n_{\mathbb{Z}}(g(a)) = n_{\mathbb{Z}}(a^2) = 1 = g(1) = g(n_{\mathbb{Z}}(a))$. Máme-li libovolné $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $a < -1$, pak $a^2 > 1$, a tedy $n_{\mathbb{Z}}(g(a)) = n_{\mathbb{Z}}(a^2) = 1 = g(-1) = g(n_{\mathbb{Z}}(a))$. Konečně pro $a \in \{-1, 0, 1\}$ platí $n_{\mathbb{Z}}(g(a)) = n_{\mathbb{Z}}(a^2) = 0 = g(0) = g(n_{\mathbb{Z}}(a))$. Dvojnásobnou aplikací $n_{\mathbb{Z}}$ na libovolný prvek Ω -algebry \mathbb{Z} dostaneme 0, proto jak varieta V_1 určená teorií T_1 tak i varieta V_2 určená teorií T_2 obsahují Ω -algebru \mathbb{Z} . Volnou algebrou $F_1(\Omega)$ typu Ω , generovanou množinou $\{x_1\}$, je množina všech unárních termů typu Ω , tedy $F_1(\Omega) = \{x_1, n(x_1), n(n(x_1)), \dots\}$. Protože rovnost $n(n(n(x_1))) = n(n(x_1))$ znamená, že trojnásobnou aplikací operace n na libovolný prvek dostaneme vždy totéž jako dvojnásobnou aplikací operace n na tento prvek, má volná algebra $A = F_1(V_1)$ variety V_1 generovaná množinou $\{x_1\}$ tři prvky: $A = \{M_1, M_2, M_3\}$, kde $M_1 = \{x_1\}$, $M_2 = \{n(x_1)\}$, $M_3 = \{n(n(x_1)), n(n(n(x_1))), n(n(n(n(x_1))))\}, \dots\}$. Přitom je operace na A definovaná takto: $n_A(M_1) = M_2$, $n_A(M_2) = M_3$, $n_A(M_3) = M_3$. Protože rovnost $n(n(x_1)) = n(n(x_2))$ znamená, že dvojnásobnou aplikací operace n na libovolný prvek dostaneme vždy tentýž prvek, je výše popsaná Ω -algebra A také volnou algebrou $F_1(V_2)$ variety V_2 generovanou množinou $\{x_1\}$. Variety V_1 a V_2 nejsou stejné, uvažte Ω -algebru $B = \{1, 2\}$ s operací $n_B(1) = 1$, $n_B(2) = 2$. Tato Ω -algebra B patří do variety V_1 , ale nepatří do variety V_2 .]