Variety Ω-algeber zpravidla obsahují nekonečné Ω-algebry

Poznámka. Je jasné, že pro libovolný typ Ω platí, že pokud varieta Ω-algeber obsahuje alespoň jednu alespoň dvojprvkovou Ω-algebru, musí obsahovat také nekonečné Ω-algebry (například součin nekonečně mnoha kopií této Ω-algebry). Proto s výjimkou variety všech nejvýše jednoprvkových Ω-algeber, tedy variety dané teorií $\{x_1 = x_2\}$, každá varieta obsahuje také nekonečné Ω-algebry.
Připomeňme si Birkhoffovu větu charakterizující variety:

Věta (Birkhoff). Nechť Ω je typ. Třída Ω-algeber V je varieta, právě když splňuje všechny tři následující podmínky:

- *obsahuje všechny podalgebry všech svých Ω-algeber;*
- *obsahuje obrazy všech svých Ω-algeber ve všech surjektivních homomorfismech;*
- *obsahuje součin libovolného (i prázdného) systému svých Ω-algeber.*

Poznámka. Třetí podmínku Birkhoffovy věty je možné ekvivalentně formulovat takto: „obsahuje součin libovolného neprázdného systému svých Ω-algeber a současně $V \neq \emptyset$, $V \neq \{\emptyset\}$."

Pojem pseudovariety

Poznámka. Vhodnou modifikaci pojmu varieta pro třídy *konečných* Ω-algeber podává následující definice:

Definice. Nechť Ω je typ. Třída Ω-algeber V se nazývá pseudovarieta, jestliže obsahuje pouze konečné Ω-algebry, obsahuje alespoň jednu neprázdnou Ω-algebru a splňuje všechny tři následující podmínky:

- obsahuje všechny podalgebry všech svých Ω-algeber;
- obsahuje obrazy všech svých Ω-algeber ve všech surjektivních homomorfismech;
- pro libovolné $A, B \in V$ platí $A \times B \in V$.

Příklad. Je-li W libovolná varieta Ω-algeber, pak třída $W^{\mathcal{F}}$ všech konečných Ω-algeber patřících do W tvoří pseudovarietu.

Definice. Pseudovariety Ω-algeber, které jsou rovny třídě $W^{\mathcal{F}}$ všech konečných Ω-algeber vhodné variety Ω-algeber W, se nazývají ekvacionální.

Poznámka. Existují pseudovariety, které ekvacionální nejsou.

Příklad pseudovariety, která není ekvacionální

__Příklad.__ Nechť $\Omega = \{\cdot\}$, kde $\cdot$ je binární operační symbol, Ω-algebry jsou tedy grupoidy. Označme V třídu všech Ω-algeber, které jsou konečné grupy, spolu s prázdným grupoidem. Protože libovolný prvek a konečné grupy má konečný řád, mezi mocninami prvku a s přirozeným exponentem najdeme a^{-1} i 1. Proto každý neprázdný podgrupoid konečné grupy je konečná grupa. Zřejmě také každý homomorfní obraz konečné grupy je konečná grupa, součinem dvou konečných grup je konečná grupa. Tedy V je pseudovarieta.

Ukažme sporem, že V není třídou $W^{\mathcal{F}}$ všech konečných Ω-algeber žádné variety W. Předpokládejme, že varieta Ω-algeber $W \supseteq V$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ obsahuje V cyklickou grupu řádu n, proto W obsahuje jejich součin přes všechna $n \in \mathbb{N}$, což je grupa obsahující prvky nekonečného řádu, například prvek g mající v každé složce generátor příslušné grupy. Pak ale W obsahuje i podgrupoid G tohoto součinu, generovaný prvkem g, totiž $G = \{g^n;\, n \in \mathbb{N}\}$. Rozklad $\big\{\{g\}, \{g^2, g^3, \dots\}\big\}$ zadává kongruenci $\sim$ na grupoidu G, proto W obsahuje konečný grupoid $G/\sim$ nepatřící do V.

Některé vlastnosti variet a pseudovariet

Věta. *Nechť Ω je typ, I neprázdná množina taková, že pro každé $i \in I$ je dána varieta Ω-algeber V_i. Pak $\bigcap_{i\in I} V_i$ je varieta Ω-algeber.*

Důkaz. Je-li T_i teorie určující varietu V_i, pak sjednocení $\bigcup_{i\in I} T_i$ je teorie určující $\bigcap_{i\in I} V_i$.

Věta. *Nechť Ω je typ, I neprázdná množina taková, že pro každé $i \in I$ je dána pseudovarieta Ω-algeber V_i.*

- *Pak $\bigcap_{i\in I} V_i$ je pseudovarieta Ω-algeber.*
- *Předpokládejme navíc, že náš systém pseudovariet je usměrněný, tj. pro každé $i, j \in I$ existuje $k \in I$ tak, že $V_i \cup V_j \subseteq V_k$. Pak $\bigcup_{i\in I} V_i$ je pseudovarieta Ω-algeber.*

Důkaz je zřejmý, stačí užít definici pseudovariety; pro důkaz toho, že $\bigcup_{i\in I} V_i$ s každými svými dvěma Ω-algebrami obsahuje i jejich součin, je třeba využít usměrněnost systému V_i, $i \in I$.

Varieta a pseudovarieta generované množinou Ω-algeber

Poznámka. Vzhledem k tomu, že systém všech Ω-algeber tvoří varietu a systém všech konečných Ω-algeber tvoří pseudovarietu, předchozí věty umožňují následující definice.

Definice. Je-li M libovolná množina Ω-algeber, varietu $\mathrm{Var}(M)$ generovanou množinou M definujeme jako průnik všech variet Ω-algeber obsahujících každou Ω-algebru z množiny M. Je-li $M = \{A\}$ jednoprvková, píšeme $\mathrm{Var}(A)$ místo $\mathrm{Var}(\{A\})$.

Definice. Je-li M libovolná množina konečných Ω-algeber, pseudovarietu $\mathrm{Psvar}(M)$ generovanou množinou M definujeme jako průnik všech pseudovariet Ω-algeber obsahujících každou Ω-algebru z množiny M. Je-li $M = \{A\}$ jednoprvková, píšeme $\mathrm{Psvar}(A)$ místo $\mathrm{Psvar}(\{A\})$.

Poznámka. Za chvíli ukážeme, že pseudovarieta $\mathrm{Psvar}(A)$ generovaná jedinou konečnou Ω-algebrou A je vždy ekvacionální. Za tím účelem však budeme nejprve zkoumat varietu $\mathrm{Var}(A)$.

Varieta Var(A) pro konečnou Ω-algebru A

Věta. *Nechť Ω je typ, A konečná Ω-algebra, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ konečná množina. Pak platí, že volná algebra $F_X(\mathrm{Var}(A))$ variety $\mathrm{Var}(A)$ generovaná množinou X je izomorfní s vhodnou podalgebrou součinu konečně mnoha kopií Ω-algebry A, a tedy $F_X(\mathrm{Var}(A))$ je konečná.*

Důkaz. $\mathrm{Var}(A)$ je nejmenší varieta obsahující A, proto je určena teorií obsahující právě všechny rovnosti platné v Ω-algebře A. Podle věty o rovnostech ve volných Ω-algebrách víme, že $F_X(\mathrm{Var}(A)) = F_X(\Omega)/\sim$, přičemž pro libovolné termy $t_1, t_2 \in F_X(\Omega)$ platí $t_1 \sim t_2$, právě když rovnost $t_1 = t_2$ platí v každé Ω-algebře ve $\mathrm{Var}(A)$, tj. platí v A. Z univerzální vlastnosti $F_X(\Omega)$ víme, že pro každé zobrazení $f : X \to A$ existuje (jediný) homomorfismus $f' : F_X(\Omega) \to A$ tak, že $f'|_X = f$. Rovnost $t_1 = t_2$ platí v A, právě když oba termy určují na A tutéž operaci, což podle věty popisující homomorfismus f' pro konečnou X nastane, právě když pro každé $f : X \to A$ platí $f'(t_1) = f'(t_2)$. Proto $\sim = \bigcap_{f \in I} \ker f'$, kde I je množina všech zobrazení $f : X \to A$.

Označme $B = \prod_{f \in I} A$. Podle věty o součinu Ω-algeber existuje jediný homomorfismus $\varphi : F_X(\Omega) \to B$ tak, že komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, "\pi_f"] \arrow[drrrr, "\pi_g"] & & & & & & \\
& \dots & A & \dots & A & \cdots & (f, g, \ldots \in I) \\
F_X(\Omega) \arrow[uu, dashed, "\varphi"'] \arrow[urr, "f'"] \arrow[urrrr, "g'"'] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Pro libovolné $t \in F_X(\Omega)$ platí $\varphi(t) = (f'(t))_{f \in I}$. Proto $\ker \varphi = \bigcap_{f \in I} \ker f' = \sim$. Podle hlavní věty o faktorových algebrách $F_X(\mathrm{Var}(A)) = F_X(\Omega)/\sim \cong \varphi(F_X(\Omega))$, což je podalgebra Ω-algebry $B = \prod_{f \in I} A$.

Věta plyne z toho, že I je konečná množina.

Pro konečnou Ω-algebru A je $\mathrm{Psvar}(A)$ ekvacionální

Definice. Varieta se nazývá lokálně konečná, jestliže každá její Ω-algebra, která má konečnou množinu generátorů, je konečná.

Věta. *Nechť Ω je typ, A libovolná konečná Ω-algebra. Pak platí:*

- $\mathrm{Psvar}(A) = \mathrm{Var}(A)^{\mathcal{F}}$*, a tedy* $\mathrm{Psvar}(A)$ *je ekvacionální.*
- *Varieta* $\mathrm{Var}(A)$ *je lokálně konečná.*

Důkaz. Zřejmě je $\mathrm{Var}(A)^{\mathcal{F}}$ pseudovarieta obsahující A, a tedy $\mathrm{Psvar}(A) \subseteq \mathrm{Var}(A)^{\mathcal{F}}$. Ukažme opačnou inkluzi:
Nechť B je libovolná konečná Ω-algebra z $\mathrm{Var}(A)$. Označme X nosnou množinu Ω-algebry B. Pak $\mathrm{id}_X : X \to B$ je surjektivní zobrazení, a proto onen jediný homomorfismus $F_X(\mathrm{Var}(A)) \to B$, který id určuje, je surjektivní. Podle předchozí věty je $F_X(\mathrm{Var}(A))$ izomorfní s vhodnou podalgebrou součinu konečně mnoha kopií Ω-algebry A, a tedy $F_X(\mathrm{Var}(A)) \in \mathrm{Psvar}(A)$. Odtud $B \in \mathrm{Psvar}(A)$. Proto $\mathrm{Var}(A)^{\mathcal{F}} \subseteq \mathrm{Psvar}(A)$.

Druhá část věty se dokáže podobně: pro libovolnou Ω-algebru $B \in \mathrm{Var}(A)$ s konečnou množinou generátorů X vezmeme zobrazení inkluze $X \to B$ a postupujeme analogicky.

Systém reprezentantů konečných Ω-algeber

Poznámka. Zvolme pevně přirozená čísla k, m a přemýšlejme, kolika způsoby můžeme zadat k-ární operaci na množině $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Všech uspořádaných k-tic prvků množiny M je m^k, pro každou z nich máme m možností výsledku naší operace na této k-tici. Počet k-árních operací na množině M je m^{m^k}.
Odtud plyne:

Věta. *Nechť Ω je typ, m přirozené číslo. Systém všech Ω-algeber s nosnou množinou $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ tvoří množinu (nikoliv vlastní třídu). V případě konečného typu Ω je tato množina konečná. Na této množině relace „být izomorfní“ je relací ekvivalence. Zvolíme-li systém reprezentantů z odpovídajícího rozkladu, dostaneme množinu Ω-algeber s následující vlastností: každá m-prvková Ω-algebra je izomorfní s právě jednou Ω-algebrou z našeho systému reprezentantů.*

Důsledek. *Existuje množina Ω-algeber (která je spočetná, je-li typ Ω konečný) taková, že každá konečná Ω-algebra je izomorfní s právě jednou Ω-algebrou z této množiny.*

Charakterizace pseudovariet libovolného typu Ω

<u>*Věta.*</u> *Nechť Ω je libovolný typ. Každá pseudovarieta Ω-algeber je sjednocením usměrněného systému ekvacionálních pseudovariet.*

<u>*Důkaz.*</u> Nechť V je libovolná pseudovarieta Ω-algeber. Podle předchozího důsledku existuje množina $\mathcal{M}$ neprázdných Ω-algeber patřících do V taková, že každá neprázdná Ω-algebra z V je izomorfní s právě jednou Ω-algebrou z $\mathcal{M}$. Pak $\mathrm{Psvar}(A)$, $A \in \mathcal{M}$, je systém pseudovariet, o kterých už víme, že jsou ekvacionální. Zřejmě platí $V = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} \mathrm{Psvar}(A)$.

Zbývá dokázat, že je tento systém pseudovariet usměrněný, tj. že pro libovolné $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ existuje $B \in \mathcal{M}$ tak, že $\mathrm{Psvar}(A_1) \cup \mathrm{Psvar}(A_2) \subseteq \mathrm{Psvar}(B)$.

Protože $A_1 \times A_2 \in V$, existuje $B \in \mathcal{M}$ tak, že $B \cong A_1 \times A_2$. Protože projekce ze součinu neprázdných Ω-algeber jsou surjektivní, platí $A_1, A_2 \in \mathrm{Psvar}(B)$, odkud plyne potřebná inkluze.

Charakterizace pseudovariet konečného typu Ω

Věta. *Nechť Ω je konečný typ. Každá pseudovarieta Ω-algeber je sjednocením neklesající posloupnosti ekvacionálních pseudovariet.*

Důkaz. Protože typ Ω je konečný, můžeme v důkaze předchozí věty předpokládat, že $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, \dots\}$ je nejvýše spočetná. Pro každé přirozené číslo n označme $V_n = \mathrm{Psvar}(A_1 \times \cdots \times A_n)$, což podle jedné z předchozích vět je ekvacionální pseudovarieta. Protože $A_1 \times \cdots \times A_n \in V$, platí $V_n \subseteq V$.

Z důkazu předchozí věty víme, že $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Psvar}(A_i) \subseteq V_n$ a že $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Psvar}(A_i) = V$, a tedy

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Psvar}(A_i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Psvar}(A_i) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq V.$$

Vzhledem k tomu, že $A_1 \times \cdots \times A_n$ je obrazem $A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} \cong (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$ v surjektivním homomorfismu (v projekci ze součinu), platí $A_1 \times \cdots \times A_n \in V_{n+1}$, tedy $V_n \subseteq V_{n+1}$, a proto je posloupnost $V_1, V_2, \dots$ neklesající.

Věta Eilenberga a Schützenbergera

<u>*Věta.*</u> *Nechť* Ω *je konečný typ a* V *libovolná pseudovarieta* Ω*-algeber. Pak existuje posloupnost rovností* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *(kde každá rovnost* ε_i *je tvaru* $y_i = z_i$ *pro některé termy* y_i, z_i *typu* Ω*) splňující následující podmínku: označíme-li* W_n *varietu určenou teorií* $T_n = \{\varepsilon_i;\ i \geq n\}$*, pak* $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots$ *a platí* $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} {W_n}^{\mathcal{F}}$*. Jinými slovy: konečná* Ω*-algebra patří do* V*, právě když splní rovnost* ε_i *pro skoro všechna* $i \in \mathbb{N}$ *(tj. všechna až na konečně mnoho).*

<u>*Důkaz.*</u> Podle předchozí věty máme neklesající posloupnost ekvacionální pseudovariet $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$, jejichž sjednocením je V. Víme, že existuje nejvýše spočetný systém $\mathcal{T} = \{B_1, B_2, \dots\}$ takových Ω-algeber, že každá konečná Ω-algebra *nepatřící* do V je izomorfní s právě jednou Ω-algebrou z $\mathcal{T}$. Pro každé $i \geq 1$, $j \geq 1$ platí $B_j \notin V_i$. Protože V_i je ekvacionální, existuje rovnost ε_{ij}, kterou splňují všechny Ω-algebry z V_i, avšak nikoli B_j. Věta bude dokázána, ukážeme-li, že pro libovolnou konečnou Ω-algebru A platí $A \in V$, právě když A splní rovnost ε_{ij} pro skoro všechny dvojice (i, j), pro které $i \geq j$.

Důkaz. Podle předchozí věty máme neklesající posloupnost ekvacionální pseudovariet $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$, jejichž sjednocením je V. Víme, že existuje nejvýše spočetný systém $\mathcal{T} = \{B_1, B_2, \dots\}$ takových Ω-algeber, že každá konečná Ω-algebra *nepatřící* do V je izomorfní s právě jednou Ω-algebrou z $\mathcal{T}$. Pro každé $i \geq 1$, $j \geq 1$ platí $B_j \notin V_i$. Protože V_i je ekvacionální, existuje rovnost ε_{ij}, kterou splňují všechny Ω-algebry z V_i, avšak nikoli B_j. Věta bude dokázána, ukážeme-li, že pro libovolnou konečnou Ω-algebru A platí $A \in V$, právě když A splní rovnost ε_{ij} pro skoro všechny dvojice (i, j), pro které $i \geq j$.

Jestliže $A \in V$, pak existuje n tak, že $A \in V_n$, a tedy $A \in V_i$ pro všechna $i \geq n$, proto A splňuje rovnost ε_{ij} pro každé $i \geq n$ a každé j, tedy z rovností ε_{ij}, kde $i \geq j$, může nesplňovat jen rovnosti ε_{ij} pro $j \leq i < n$. Takových dvojic (i, j) je jen konečně mnoho.

Jestliže A je konečná Ω-algebra taková, že $A \notin V$, pak existuje j tak, že $A \cong B_j$. Pak A nesplňuje rovnost ε_{ij} pro žádné i, takových dvojic (i, j), $i \geq j$, je nekonečně mnoho.

Implicitní a explicitní operace na pseudovarietě

Definice. Nechť Ω je typ, V pseudovarieta Ω-algeber, n nezáporné celé číslo. Mějme pro každou Ω-algebru $A \in V$ dánu n-ární operaci $\pi_A : A^n \to A$. Řekneme, že systém $(\pi_A)_{A \in V}$ tvoří n-ární implicitní operaci na pseudovarietě V, jestliže pro každé $A, B \in V$ a každý homomorfismus $\varphi : A \to B$ komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\pi_A} & A \\ {\scriptstyle\varphi^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ B^n & \xrightarrow[\pi_B]{} & B \end{array}$$

kde $\varphi^n : A^n \to B^n$ je definováno po složkách, tj.

$$\varphi^n(a_1, \dots, a_n) = (\varphi(a_1), \dots \varphi(a_n)).$$

Jinými slovy, pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$\varphi(\pi_A(a_1, \dots, a_n)) = \pi_B(\varphi(a_1), \dots \varphi(a_n)).$$

Příklad. Pro libovolný n-ární term typu Ω je systém $(t_A)_{A \in V}$ operací daných tímto termem n-ární implicitní operaci na libovolné pseudovarietě V typu Ω.

Definice. Implicitní operace z předchozího příkladu nazýváme explicitní.

Struktura pologrup generovaných jedním prvkem

Definice. Nechť $(G, \cdot)$ je konečná pologrupa, $g \in G$ je libovolný. Pak podpologrupou generovanou prvkem g je $\langle g \rangle = \{g^k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Z konečnosti pologrupy plyne existence $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že $g^n = g^{n+m}$. Nejmenší $n \in \mathbb{N}$ s touto vlastností se nazývá předperioda pologrupy $\langle g \rangle$. Nejmenší $m \in \mathbb{N}$, které tuto podmínku splní pro předperiodu n, se nazývá perioda pologrupy $\langle g \rangle$.

Věta. Nechť $(G, \cdot)$ je konečná pologrupa, $g \in G$ je libovolný. Nechť n je předperioda pologrupy $\langle g \rangle$ a m její perioda. Pak platí:

- *Pro libovolné $r, s \in \mathbb{N}$ je splněno $g^r = g^s$, právě když $r = s < n$ anebo $r \geq n$, $s \geq n$, $r \equiv s \pmod{m}$.*
- *Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ splňující $m \mid k \geq n$ platí*
  - *g^k je jediný idempotentní prvek pologrupy $\langle g \rangle$.*
  - *Množina $\{g^n, g^{n+1}, \ldots, g^{n+m-1}\}$ tvoří podpologrupu; je to cyklická grupa řádu m generovaná prvkem g^{k+1}, jejímž neutrálním prvkem je g^k.*

Důkaz je zřejmý.

Příklad implicitní operace, která není explicitní

Příklad. Nechť $\Omega = \{\cdot\}$ je typ, kde $\cdot$ je binární; Ω-algebry jsou tedy grupoidy. Označme S pseudovarietu typu Ω, jejímiž prvky jsou právě všechny konečné pologrupy.

Na libovolné konečné pologrupě $(G, \cdot)$ definujme unární operaci $\omega_G : G \to G$ takto: pro libovolné $g \in G$ je $\omega_G(g)$ onen jediný idempotentní prvek pologrupy $\langle g \rangle$ generované prvkem g v pologrupě G.

Systém $(\omega_G)_{G \in S}$ je unární implicitní operace na pseudovarietě S. Skutečně, je-li $\varphi : G \to H$ homomorfismus pologrup a je-li g^k jediný idempotentní prvek pologrupy $\langle g \rangle \subseteq G$, pak $\varphi(g^k) \cdot \varphi(g^k) = \varphi(g^k \cdot g^k) = \varphi(g^k)$, $\varphi(g^k) = \varphi(g)^k \in \langle \varphi(g) \rangle$, a tedy $\varphi(g^k)$ je jediný idempotentní prvek pologrupy $\langle \varphi(g) \rangle \subseteq H$. To znamená $\varphi(\omega_G(g)) = \omega_H(\varphi(g))$.

Pro libovolný unární term typu Ω existuje přirozené číslo t tak, že operace určená tímto termem na libovolné pologrupě je umocňování na toto t. Proto implicitní operace $(\omega_G)_{G \in S}$ není explicitní.

Pseudorovnosti a Reitermanova věta

Definice. Nechť Ω je typ, V pseudovarieta Ω-algeber, n nezáporné celé číslo. Mějme na V dány dvě n-ární implicitní operace $\pi = (\pi_A)_{A \in V}$ a $\mu = (\mu_A)_{A \in V}$. Formální zápis $\pi = \mu$ nazýváme pseudorovností na pseudovarietě V; říkáme, že Ω-algebra $A \in V$ splňuje tuto pseudorovnost, jestliže π_A a μ_A jsou stejné n-ární operace na Ω-algebře A.

Následující větu *Jana Reitermana* si uvedeme bez důkazu:

Věta. Nechť Ω je typ, V pseudovarieta Ω-algeber, U podtřída pseudovariety V. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- *U je pseudovarieta;*
- *existuje množina T pseudorovností na pseudovarietě V s touto vlastností: pro libovolnou $A \in V$ platí $A \in U$, právě když A splňuje každou pseudorovnost z T.*

Poznámka. Reitermanova věta ukazuje, že pseudovariety lze zkoumat pomocí pseudorovností, tedy pomocí implicitních operací.

Množina n-árních implicitních operací na pseudovarietě V

Každá implicitní operace na pseudovarietě V je dána svým chováním na množině reprezentantů konečných Ω-algeber, máme proto množinu všech n-árních implicitních operací na pseudovarietě V.

Na této množině lze definovat strukturu Ω-algebry (v níž podmnožina explicitních operací tvoří podalgebru): máme-li k-ární $f \in \Omega$, pak pro n-ární implicitní operace $\pi_1 = (\pi_{1,A})_{A \in V}, \ldots, \pi_k = (\pi_{k,A})_{A \in V}$ je $f(\pi_1, \ldots, \pi_k)_A(a_1, \ldots, a_n) = f_A(\pi_{1,A}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \pi_{k,A}(a_1, \ldots, a_n))$ pro každou $A \in V$ a každé $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Také zde můžeme definovat strukturu metrického prostoru: je-li $\pi_1 = (\pi_{1,A})_{A \in V} \neq \pi_2 = (\pi_{2,A})_{A \in V}$, pak definujeme vzdálenost $\rho(\pi_1, \pi_2) = 2^{-k}$, kde k je nejmenší přirozené číslo takové, že existuje k-prvková $A \in V$ tak, že $\pi_{1,A} \neq \pi_{2,A}$.

Tento metrický prostor je dokonce ultrametrický a úplný, podmnožina explicitních operací v něm tvoří hustou podmnožinu. V případě konečného typu je také kompaktní.