Domácí úloha z 26. října 2017 (odevzdává se 2. listopadu 2017)

Uvažme okruh $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ (s operacemi obvyklého sčítání a násobení komplexních čísel, jako vždy $i^2 = -1$). V tomto okruhu jsou dány množiny I, J takto:

$$I = \{a + bi\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Z}, a + 3b \text{ je dělitelné číslem } 7\},$$
$$J = \{a + bi\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Z}, a + 13b \text{ je dělitelné číslem } 29\}.$$

1. Dokažte, že I a J jsou ideály okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, a to nejlépe tak, že ukážete, že se jedná o jádra vhodných homomorfismů okruhů.

2. Rozhodněte, zda některý z ideálů I, J je prvoideál okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

3. Rozhodněte, zda některý z ideálů I, J je maximální ideál okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

4. Rozhodněte, zda některý z ideálů I, J je hlavní, a pokud ano, pokuste se najít jeho generátor. *(Nápověda: Podobně jako na cvičení uvažte normu $N\colon \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, jež je daná předpisem $N(a + bi\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$. Určete hodnotu, kterou by mohla norma případného generátoru nabývat. Následně se pokuste najít prvek ležící v daném ideále, jehož normou je právě tato hodnota. V případě, že takový prvek najdete, ověřte, zda se jedná o generátor.)*