Minule jsme si definovali, co to je topologický prostor, dnes se podíváme na metodu, která umožňuje popsat velké množství těchto prostorů. Této metody nejprve využijeme k definici několika topologických prostorů, které budeme v příštích hodinách potřebovat. Dále zobecníme nerovinnost K_5 do vyšších dimenzí. Popisu topologických prostorů později využijeme ke klasifikaci všech souvislých kompaktních dvoudimenzionálních variet.

Nejprve si však dokážeme jednu dělicí větu.

Věta 1. *Jsou-li A, B dvě uzavřené konvexní množiny v $\mathbb{R}^d$, z nichž aspoň jedna je kompaktní, tak $A \cap B = \emptyset$ právě tehdy, když existuje nadrovina h, která je striktně odděluje. (Tj. taková nadrovina h, že celá množina A leží v otevřeném poloprostoru h^- a celá množina B leží v otevřeném poloprostoru h^+.)*

Tato věta se používá například v lineárním programování k důkazu Farkasova lemmatu. My se s její pomocí podíváme na vícedimenzionální analogie nerovinných grafů K_5 a $K_{3,3}$.

Důkaz. Buď $\ell := \inf\{\mathrm{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$. Jelikož alespoň jedna z množina A, B je kompaktní a obě jsou uzavřené, existují takové body $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$, že $\mathrm{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell$.

Nyní stačí definovat h jako nadrovinu kolmou na úsečku $\mathbf{ab}$ (se správnou orientací) a procházející středem této úsečky.

Domácí úkol 1: Dokažte, že takováto nadrovina skutečně striktně odděluje A a B. □

Konstrukce topologických prostorů

Naším cílem je **stavebnice**, která

- **umožní vytořit** velké **množství topologických prostorů**,
- má **jednoduché dílky** a
- **jednoduchý popis jak dílky spojovat**.

Jednou z takových stavebnic jsou **simpliciální komplexy**. Dílky této stavebnice jsou **simplexy** (srovnej anglické simple).

Definice 2. **k-dimenzionální simplex** je konvexní obal[1] $(k+1)$ afinně nezávislých bodů.[2] Tyto body se nazývají **vrcholy simplexu**. Simplexy se často značí malými řeckými písmeny σ, τ, ρ.

Standardní d-simplex je $\Delta_d := \mathrm{conv}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \dots, \mathbf{e_{d+1}}) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$.

Stěnou simplexu σ rozumíme každý simplex $\mathrm{conv}(F')$, kde F' je podmnožina vrcholů σ. Dle definice je tedy $\emptyset$ stěna každého simplexu σ.

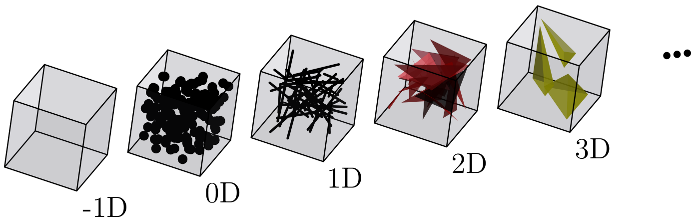
k-dimenzionální simplexy:

0D	bod (vertex)	1D	hrana, úsečka (edge, segment)
2D	trojúhelník (triangle)	3D	čtyřstěn (tetrahedron)
-1D	prázdná množina	4D	pentatop/pentachoron/...

Nyní již známe základní dílky naší stavebnice a můžeme se zabývat tím, jak je spojovat. Nejjednodušší popis spojení poskytují tzv. **simpliciální komplexy**, u kterých již výběr dílků samotných určuje jejich napojení. Jinou možnost spojování nabízí tzv. **Δ-komplexy**, u nichž výslovně specifikujeme, které strany simplexů a jakým směrem k sobě slepit. To již vyžaduje jisté "ohýbání" našich dílků. Platí, že topologický prostor je homeomorfní simplicálnímu komplexu právě tehdy, když je homeomorfní Δ-komplexu. Δ-komplexy mají tu výhodu, že obsahují méně stěn, počítá se s nimi tedy lépe. Pro teoretické účely a definice jsou však výhodnější simpliciální komplexy, u kterých odpadá nutnost specifikovat lepení stěn k sobě. Dalším zobecněním pak jsou **CW-komplexy**, ve kterých prvně spojíme simplexy dimenze $\leq k$, a pak na tyto simplexy induktivně nalepíme simplexy dimenze $(k+1)$, přičemž máme jediný požadavek na lepicí zobrazení: spojitost.

[1] Konvexní obal dává smysl pouze v afinních prostorech nad uspořádanými tělesy či jejich zobecnění – abstraktních konvexních prostorech.

[2] Tj. bodů, které neleží v žádném afinním podprostoru dimenze $(k-1)$.

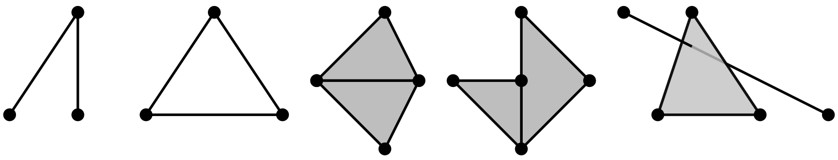


Obrázek 1: Stavebnice simpliciální komplexy. Vybudujte (téměř) cokoli! Díly všech celých dimenzí ≥ -1. Nejdou ohnout ani zničit! Nepodléhají opotřebení! Nově: řazeno do průhledných krabic dle dimenze.

Definice 3. Geometrický simpliciální komplex K je množina simplexů v reálném vektorovém prostoru X, splňující:

1. Je-li $\sigma \in K$, tak i každý stěna τ simplexu σ leží v K a
2. jsou-li σ, $\tau \in K$, tak $\sigma \cap \tau$ je stěna simplexu σ i stěna simplexu τ.

Rozlišujme prázdný simpliciální komplex $\emptyset$ a simpliciální komplex obsahující pouze prázdný simplex $\{\emptyset\}$!



Tři z těchto obrázků reprezentují simpliciální komplexy a dva ne. Dovedete určit které to jsou?

Obrázek 2: Simpliciální komplexy

Nyní se podíváme na základní pojmy, které jsou se simpliciálními komplexy spojeny.

Základní pojmy u simpliciálních komplexů

Každý simplex $\sigma \in K$ nazýváme **stěna** K **(face of** K**)**. **Dimenze** K je nejvyšší dimenze stěny K (či ∞). Simpliciální komplex dimenze 1 se nazývá **graf**.

Názvy stěn

Stěny dimenze 0 se nazývají **vrcholy** K **(vertices of** K**)** a značí $V(K)$. Stěny dimenze 1 jsou **hrany (edges)**. Maximální stěny se nazývají **fasety (facets)**. Stěnám kodimenze[3] 1 se v angličtině říká **ridges**, český ekvivalent chybí. **Stěnou stěny** $\sigma \in K$ rozumíme každý simplex $\tau \subseteq \sigma$. **Nadstěnou stěny (coface)** $\sigma \in K$ rozumíme každý simplex $\tau \supseteq \sigma$.

Homogenní komplexy

Simpliciální komplex K je **homogenní (pure či homogeneous)**, pokud všechny jeho fasety mají stejnou dimenzi.

Topologický prostor a triangulace

Je-li K geometrický simpliciální komplex, tak klademe $||K|| := \bigcup K$, jde tedy o množinu všech bodů obsažených v nějakém simplexu v K. Jedná se o topologický prostor s topologií zděděnou z příslušného

[3]Stěnou kodimenze 1 komplexu K rozumíme takovou nefasetu τ, jejíž nadstěny jsou pouze fasety a ona samotná.

reálného vektorového prostoru X, ve kterém žijí simplexy K. Je-li Y topologický prostor homeomorfní $||K||$, tak o K mluvíme jakožto o **triangulaci** Y a Y nazýváme **triangulovatelný**[4].

Konstrukce

Podkomplexy

Podkomplex K je každá podmnožina L simpliciálního komplexu K, která je sama simpliciálním komplexem. Je-li V' podmnožina vrcholů K, tak **indukovaný podkomplex** $K(V')$ jest $\{\sigma \cap V' \mid \sigma \in K\}$. Existuje-li nějaká množina vrcholů V' taková, že $L = K(V')$ je L **úplný (full) podkomplex** K, lze se však setkat i s označením indukovaný. Všechny stěny K dimenze $\leq k$ tvoří tzv. **k-skeleton** $K^{(k)}$.

Spojení

Jsou-li K a L dva simpliciální komplexy, můžeme definovat jejich **spojení (join)** $K * L$. Je-li $||K|| \subseteq X \cong \mathbb{R}^k$ a $||L|| \subseteq Y \cong \mathbb{R}^l$, můžeme X a Y vnořit jakožto dva mimoběžné prostory do $\mathbb{R}^{k+l+1}$. Simplexy $K * L$ pak definujeme jakožto $\{\mathrm{conv}(\sigma \cup \tau) \mid \sigma \in K, \tau \in L\}$ v tomto vnoření.

Pro L bod nazýváme spojení $K * L$ **kužel (cone)** CK. Pro L dva body mluvíme o **suspenzi** SK.

Podrozdělení

Simpliciální komplex L je **podrozdělením (subdivision)** komplexu K, pokud $||L|| = ||K||$ a každá stěna L je obsažena v nějaké stěně komplexu K. Speciálním případem je **barycentrické podrozdělení (barycentric subdivision)** $\mathrm{sd}\, K$. **Barycentrum k-simplexu** $\sigma = \mathrm{conv}(\mathbf{v_0}, \ldots, \mathbf{v_k})$ je bod $v = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \mathbf{v_i}$. Barycentrické podrozdělení komplexu K se nejsnáze konstruuje rekurzivně: Barycentrické podrozdělení 0-skeletonu je 0-skeleton sám. Pro konstrukci barycentrického podrozdělení $(k+1)$-skeletonu přidáme barycentra $(k+1)$-simplexů a tyto spojíme se simplexy podrozdělujícími hranice příslušných simplexů.

Lokální vlastnosti

Lokální vlastnosti simpliciálních komplexů se popisují obzvláště dobře.

Link, hvězda, uzávěr

Představme si, že máme malého panáčka, kterého můžeme postavit do libovolné stěny našeho simpliciálního komplexu a který když se rozhlédne, vidí jenom skrz simplexy, ve kterých stojí. Horizont, který tento panáček uvidí, se nazývá link. Link nám popisuje, jak složité je okolí stěny σ. Jedná se vlastně o průnik male “sféry se středem σ” s komplexem K.

Link $\mathrm{lk}_K\, \sigma$ **stěny** σ je

$$\mathrm{lk}_K\, \sigma := \big\{\mathrm{conv}\big(V(\tau) \setminus V(\sigma)\big) \mid \tau \in K \wedge \sigma \subseteq \tau\big\}.$$

Jedná se o simpliciální podkomplex K. Speciálním případem je $\mathrm{lk}_K\, \emptyset$, který se dle definice rovná K. Nechceme-li kvůli přehlednosti psát K do dolního indexu použijeme zápis $\mathrm{lk}(K, \sigma)$, tedy např. $\mathrm{lk}(CK' * SL * \Delta_n, \Delta_n)$.

Pro úplnost dodáváme, že vše co náš panáček může vidět (bez horizontu) se nazývá **hvězda stěny** σ **(star of** σ**)**. Tedy $\mathrm{st}_K\, \sigma := \{\tau \mid \tau \in K \wedge \sigma \subseteq \tau\}$. Hvězda ovšem není simpliciální komplex.

Je-li $S \subseteq K$ nějaká množina simplexů, tak její **uzávěr (closure)** $\overline{S}$ **či** $\mathrm{Cl}\, S$ je nejmenší simpliciální podkomplex K obsahující S. Speciálním případem je $\overline{\mathrm{st}}\sigma$, uzavřená hvězda stěny σ, jedná se o body, které náš panáček může vidět, počítáme-li i jeho horizont. Můžeme si rozmyslet, že link σ je uzavřená hvězda σ, ze které odebereme hvězdy všech podstěn σ.

[4] Ne všechny prostory jsou triangulovatelné. Dokonce existuje kompaktní $4D$ varieta E_8, která není triangulovatelná a stejně tak existují netriangulovatelné kompaktní variety všech dimenzí $d \geq 5$ (Ciprian Manolescu: *Pin(2)-equivariant Seiberg–Witten Floer homology and the Triangulation Conjecture*, 2016.)

Simpliciální zobrazení

Simpliciální zobrazení je zobrazení $f\colon ||K|| \to ||L||$ mezi dvěma simpliciálními komplexy, jež posílá vrcholy na vrcholy a jehož restrikce na libovolný simplex je lineární. Je-li $f\colon ||K|| \to ||L||$ spojité zobrazení, nazýváme každé simpliciální zobrazení $f_\Delta\colon K \to L$ splňující $f(\mathrm{st}(v)) \subseteq \mathrm{st}(f_\Delta(v))$ **simpliciální aproximací** f. Simpliciální aproximace f_Δ je homotopicky ekvivalentní f. Ne vždy musí simpliciální aproximace spojitého zobrazení mezi dvěma komplexy K a L existovat. Lze však ukázat, že pro dostatečně velké m, n (závisející na f) bude existovat simpliciální aproximace z $\mathrm{sd}^m K$ do $\mathrm{sd}^n L$.

Globální vlastnosti

f-vektor a h-vektor

Počet stěn dimenze k se značí[5] $f_{k+1}(K)$ $(k \geq -1)$. Pokud je K jasné z kontextu, lze toto zkrátit na f_k. Dle definice je $f_0 = 1$ právě tehdy, když je K neprázdný. Počty stěn se obvykle řadí za sebe to tzv. **f-vektoru** $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{d+1})$, kde $d = \dim K$.

Lze se však také setkat s tzv. **f-polynomem** $F_K(x) := f_0x^{d+1} + f_1x^d + f_2x^{d-1} + \ldots + f_{d+1}x^0$. Pokud do f-polynomu F_K dosadíme $x - 1$, dostaneme polynom v x s jinými koeficienty. $F_K(x-1) := h_0x^{d+1} + h_1x^d + \ldots + h_dx + h_{d+1}$, vektor $(h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{d+1})$ se nazývá h**-vektor** komplexu K.

Domácí úkol 2: Najděte větu, která charakterizuje f-vektory simpliciálních komplexů.

Svaz stěn

Stěny simpliciálního komplexu jsou částečně uspořádané inkluzí. Pokud K není simplex, tak tato uspořádaná množina nemá největší prvek. V tom případě si největší prvek přidáme: budiž onen simplex K samotný největším prvkem. A ejhle, tato uspořádaná množina je svazem. Nazveme ho **svaz stěn** $F(K)$. V tomto svazu vrcholy odpovídají atomům, a fasety koatomům.

Simplex jakožto simpliciální komplex

Z předchozího odstavce vyplývá, že pokud používáme terminologii simpliciálních komplexů pro k-simplex, jsou fasety stěny dimenze $k-1$ a anglický termín ridge odpovídá stěnám dimenze $k-2$. (V jistém smyslu nás samotný simplex nezajímá, raději studujeme jeho plášť.)

Okruh stěn (Face ring)

Též nazývaný Stanley-Reisnerův okruh (Stanley-Reisner ring).

Jedná se o další způsob, jak zakódovat informaci o stěnách. Tentokrát algebraicky. To nám umožní používat na simpliciální komplexy algebraickou mašinerii (lokalizace, Krullova dimenze, ...). Nechť Δ je simpliciální komplex a $\mathbf{k}$ nějaké komutativní těleso. Nechť vrcholy Δ jsou $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$. Můžeme zvážit okruh $R = \mathbf{k}[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}]$ všech polynomů nad $\mathbf{k}$ s neznámými $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$. V tomto okruhu sedí ideál stěn (či též Stanley-Reisnerův ideál) I_Δ, generovaný nestěnami, tedy přesněji řečeno součiny proměnných $\prod_{i \in N} v_i$, kde $N \subseteq V$, $N \notin K$ (I_Δ je samozřejmě generovaný minimálními nestěnami).

Okruh stěn (Stanley-Reisnerův) $\mathbf{k}[\Delta]$ pak jest faktor R/I_Δ.

Nehledíme-li na homeomorfismus, lze $||K||$ popsat jen na základě toho, které simplexy jsou spolu spojené.

Definice 4. Abstraktní simpliciální komplex K je množina *konečných* množin splňující:

- Je-li $F \in K$ a $F' \subseteq F$, tak $F' \in K$. (Jinými slovy K je dolu uzavřená).

V tomto kontextu množinu $F \in K$ velikosti $(k+1)$ nazýváme k**-simplex** nebo k**-dimenzionální simplex**.

I zde důsledně rozlišujme prázdný simpliciální komplex $\emptyset$ a simpliciální komplex obsahující pouze prázdnou množinu $\{\emptyset\}$, spoustu tvrzení a důkazů pak budeme moci formulovat snadněji.

[5] f_k tedy označuje počet stěn, co mají k vrcholů.

Konstrukce

Řetězcový komplex

Pro každou uspořádanou množinu P můžeme definovat tzv. **řetězcový komplex** $\Delta(P)$.

$$\Delta(P) := \{X \subseteq P \mid \text{X je lineárně uspořádaná}\}.$$

Zjevně se jedná o abstraktní simpliciální komplex.

Realizace

Každému geometrickému simplexu K můžeme přiřadit abstraktní simpliciální komplex K', nazývaný **schéma vrcholů (vertex scheme)**. Jeho stěny budou některé podmnožiny vrcholů K', konkrétně ty podmnožiny F, pro něž $\operatorname{conv} F \in K$. Obráceně lze každému abstraktnímu simpliciálnímu komplexu přiřadit geometrický simpliciální komplex: Je-li K' konečný[6], můžeme předpokládat, že jeho vrcholy (až na přejmenování) jsou $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$. Simplexy v geometrickém komplexu K pak definujeme jako $\operatorname{conv} F$ pro $F \in K'$. Až na homeomorfismus a přejmenování vrcholů jsou tyto operace navzájem inverzní.

Můžeme tedy všechny pojmy, které jsme definovali pro geometrické simpliciální komplexy, přenést na abstraktní simpliciální komplexy a naopak. Nebudeme tedy již rozlišovat mezi abstraktními a geometrickými simpliciálními komplexy.

Odpovídá-li geometrický komplex K abstraktnímu komplexu K', říkáme, že K **realizuje** K'.

Domácí úkol 3: Dokažte, že $\Delta(F(K)) = \operatorname{sd} K$.

Zajímavé simpliciální komplexy

Nyní si zadefinujme několik simpliciálních komplexů. Ještě předtím si ale řekněme, co znamená slovíčko antipodální. Dva body x a y nazveme **antipodální**, pokud $x = -y$.

k-skeleton n-simplexu je tvořen všemi stěnami Δ_n, které mají dimenze $\leq k$, jelikož 1-skeleton n-simplexu je úplný graf K_{n+1} s $(n+1)$ vrcholy, jedná se o zobecnění úplných grafů do vyšších dimenzí. Zjevně je Δ_n homeomorfní n-dimenzionální kouli a $\partial\Delta_n$ jest až na homeomorfismus sféra dimenze $n-1$.

Hranice crosspolytopu (Boundary of a crosspolytope) v $\mathbb{R}^d$ je $(d-1)$-dimenzionální komplex v $\mathbb{R}^d$. Jeho vrcholy jsou $V = \{\mathbf{e_1}, -\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, -\mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_d}, -\mathbf{e_d}\}$. Simplexy hranice crosspolytopu jsou tvořeny takovými podmnožinami $F \subseteq V$, které neobsahují dvojice antipodálních vrcholů. Zjevně je hranice crosspolytopu izomorfní $(d-1)$-dimenzionální sféře. Na rozdíl od hranice simplexu je však symetrická vůči reflexím podél souřadnicových nadrovin a vůči zobrazení $x \mapsto -x$, čehož jde často využít.

Šachovnicový komplex $\Delta_{m,n}$. Vrcholy tohoto komplexu jsou políčka na šachovnici $m \times n$. Simplexy tohoto komplexu jsou takové množiny políček, že pokud na políčka z této množiny umístíme věže, tyto věže se nebudou navzájem ohrožovat. Všimněme si, že $\Delta_{m,n} \cong \Delta_{n,m}$. a že pro $K = \Delta_{m,m+1}$ je každá $(\dim K - 1)$-stěna obsažena přesně ve dvou fasetách.

Viděli jsme, že každý konečný komplex K lze realizovat v $\mathbb{R}^n$, kde n je počet vrcholů K. Lze to však udělat i lépe; abychom to dokázali, zadefinujeme nejprve jeden pojem, který se nám bude hodit i později.

Definice 5. Momentová křivka γ v $\mathbb{R}^d$ je zobrazení $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $\gamma(t) := (t, t^2, t^3, \ldots, t^d)$.

Lemma 6 (Vlastnosti momentové křivky)**.** *Každá nadrovina h protne momentovou křivku nejvýše v d bodech. Navíc protne-li ji přesně v d bodech, není v žádném bodě tečnou nadrovinou γ a γ tedy v každém bodě průniku prochází z jedné strany h na druhou.*

Z toho vyplývá, že každých $\leq d+1$ bodů na momentové křivce je afinně nezávislých (jinak bychom je mohli doplnit body z γ na $(d+1)$ bodů ležících na společné nadrovině.)

Důkaz. V souřadnicích má h tvar $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_dx_d - b = 0$. Body na momentové křivce mají souřadnice $(t, t^2, \ldots, t^d)$. Každý bod momentové křivky na h tedy řeší rovnici $a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_dt^d - b = 0$ a ta má jakožto nenulová rovnice stupně d nejvýše d řešení. Pokud má přesně d řešení, tak nemá násobné

[6] Pokud K' konečný není, zkonstruujeme geometrický simpliciální komplex jakožto "limitu" geometrických simpliciálních komplexů realizující konečné podkomplexy K'. Jelikož nekonečné komplexy nebudeme potřebovat, upouštíme od přesného popisu technického limitního kroku.

kořeny, tedy polynom $a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_dt^d - b = 0$ mění znaménko v každém takovém bodě, neboli γ přechází z jedné strany h na druhou. $\square$

O množině bodů v $\mathbb{R}^d$ řekneme, že je v **obecné poloze**, pokud žádných $k+1$ bodů neleží v afinním podprostoru dimenze $k-1$, pro každé $k \leq d$. Jakákoli podmnožina momentové křivky poskytuje konkrétní příklad množiny bodů v obecné poloze. Momentová křivka je nejjednodušší křivka s touto vlastností, ale existují i další ($\eta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d, t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{1}{t+1}, \frac{1}{t+2}, \ldots, \frac{1}{t+d})$, či ($\eta'\colon (-\pi,\pi), t \mapsto (\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \ldots)$.)

Věta 7. *Každý simpliciální komplex K dimenze d lze realizovat v $\mathbb{R}^{2d+1}$.*

Důkaz. Umístíme-li vrcholy K do obecné polohy v $\mathbb{R}^d$, tak se žádné dvě d-stěny nemohou protnout mimo sdílené vrcholy (věta o dimenzi spojení a průniku), můžeme tedy beze strachu doplnit kýžené simplexy. $\square$