1 Pátý domácí úkol

1. Dokažte, že odhad v Szemerédi-Trotterově větě je těsný: Nalezněte takové $C > 0$ a nekonečně mnoho hodnot m, n, pro které existují množina bodů P a množina přímek L v $\mathbb{R}^2$ takové, že $|P| = m$, $|L| = n$ a $I(P, L) = Cm^{2/3}n^{2/3}$. Nápověda: Zkuste body a přímky umístit pravidelně.

2. Dokažte, že máme-li n různých bodů v rovině, tak počet dvojic bodů s jednotkovou vzdáleností je $O(n^{4/3})$. Nápověda: Kolem každého bodu nakreslete kružnici s poloměrem 1 a položte si otázku, jak moc se liší přímky a kružnice?

3. Najděte případ množiny n bodů v $\mathbb{R}^4$ takových, že počet jednotkových vzdáleností mezi nimi je $\Theta(n^2)$. (Připomenutí: $f(n) = \Theta(n^2)$ znamená, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1 n^2 \le f(n) \le C_2 n^2$ platí pro všechna $n > n_0$.)

   Nápověda: $||(x_1, x_2, x_3, x_4)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$.

4. Uvažme torus $T := S^1 \times S^1$ s antipodální akcí $-(x, y) := (-x, -y)$. Ukažte, že pro T neplatí analogie Lusternik-Schnirelmannovy věty: Najděte pokrytí T pomocí tří uzavřených množin A_1, A_2, A_3 takové, že v žádném A_i neleží dvojice antipodálních bodů $x, -x$.