1. Úvod do studia stochastických procesů

Při studiu základních partií počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky se nebere do úvahy závislost náhodných veličin na čase. Zkoumá se pravděpodobnost jevů definovaných pomocí náhodných veličin nezávisle na čase. Jakmile však vezmeme do úvahy i časový vývoj náhodných veličin, dostáváme se do oblasti stochastických procesů.

Stochastické procesy nacházejí uplatnění v celé řadě oborů, např. v ekonomii, bankovnictví, biologii, klimatologii, technice, demografii i jinde. Teorie stochastických procesů se začala vytvářet na počátku 20. století a podíleli se na ni mnozí význační matematici, např. Markov, Kolmogorov, Chinčin, Cramér a jiní.

Zvláštním typem stochastických procesů jsou markovské řetězce. Základy jejich teorie položil ruský matematik Andrej Andrejevič Markov (1856 – 1922).

Pro markovský řetězec je charakteristické,
že jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném
a nikoliv na stavech minulých. Jde o tzv. proces bez paměti.

1.1. Motivace: V této kapitole

zavedeme pojem stochastického procesu,

naučíme se rozlišovat stochastický proces

s diskrétním časem a spojitým časem

a stochastický proces

s diskrétními stavy a spojitými stavy,

budeme definovat pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu,

poznáme vlastnosti pravděpodobnostního rozložení stochastického procesu,

naučíme se klasifikovat stochastické procesy podle různých kritérií.

1.2. Definice: Definice stochastického procesu (SP)

Nechť (Ω, A) je měřitelný prostor, R množina reálných čísel, $T \neq \emptyset$ neprázdná množina (nejčastěji jí přisuzujeme význam času). Nechť zobrazení $X : \Omega \times T \to R$ má tyto dvě vlastnosti:

a) $\forall t \in T$ je X(.,t) náhodná veličina vzhledem k jevovému poli A. Značí se X_t.

b) $\forall \omega \in \Omega$ je X(ω,.) prvkem množiny všech reálných funkcí definovaných na T.

Zobrazení X s těmito dvěma vlastnostmi se nazývá stochastický proces definovaný na T. Značí se $\{X_t ; t \in T\}$.

1.3. Definice: Definice složky SP, realizace SP a realizace složky SP příslušné možnému výsledku

Nechť $\{X_t ; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Pro libovolné, ale pevně dané $t \in T$ se náhodná veličina X(.,t) = X_t nazývá t-tá složka stochastického procesu.

b) Pro libovolné, ale pevně dané $\omega \in \Omega$ se reálná funkce X(ω,.) nazývá realizace stochastického procesu příslušná k možnému výsledku ω.

c) Pro libovolná, ale pevně daná $t \in T$ a $\omega \in \Omega$ se číslo X(ω,t) nazývá realizace t-té složky stochastického procesu příslušná k možnému výsledku ω.

1.4. Příklad:

a) Vývoj hmotnosti novorozených dětí

Nechť Ω je množina novorozenců, ω novorozenec, $T = \langle 0, \infty)$ časový interval počítaný od narození novorozence, t je časový okamžik. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, který popisuje průběh hmotnosti kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence.

a) $X_t =$ X(.,t) je náhodná veličina udávající hmotnost kteréhokoliv náhodně vybraného novorozence v okamžiku t (fixovaný okamžik, libovolný novorozenec).

b) X(ω,.) je reálná funkce popisující průběh hmotnosti daného novorozence ω (libovolný okamžik, fixovaný novorozenec).

c) X(ω,t) je číselná realizace náhodné veličiny X_t příslušná k možnému výsledku ω, tj. konkrétní hmotnost daného novorozence v daný časový okamžik (fixovaný okamžik, fixovaný novorozenec).

b) Průběh průměrné denní teploty

Nechť Ω je množina všech meteorologických stanic na území ČR, ω stanice, $T = \{1.1.2016, \ldots, 31.12.2016\}$ množina 366 dnů v r. 2016, t je t-tý den v r. 2016. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, který popisuje průběh průměrné denní teploty v r. 2016 na kterékoliv náhodně vybrané stanici.

a) $X_t =$ X(.,t) je náhodná veličina udávající průměrnou denní teplotu na kterékoliv náhodně vybrané stanici v t-tý den roku 2016 (fixovaný okamžik, libovolná stanice).

b) X(ω,.) je reálná funkce popisující průběh průměrné denní teploty v r. 2016 na dané stanici ω (libovolný okamžik, fixovaná stanice).

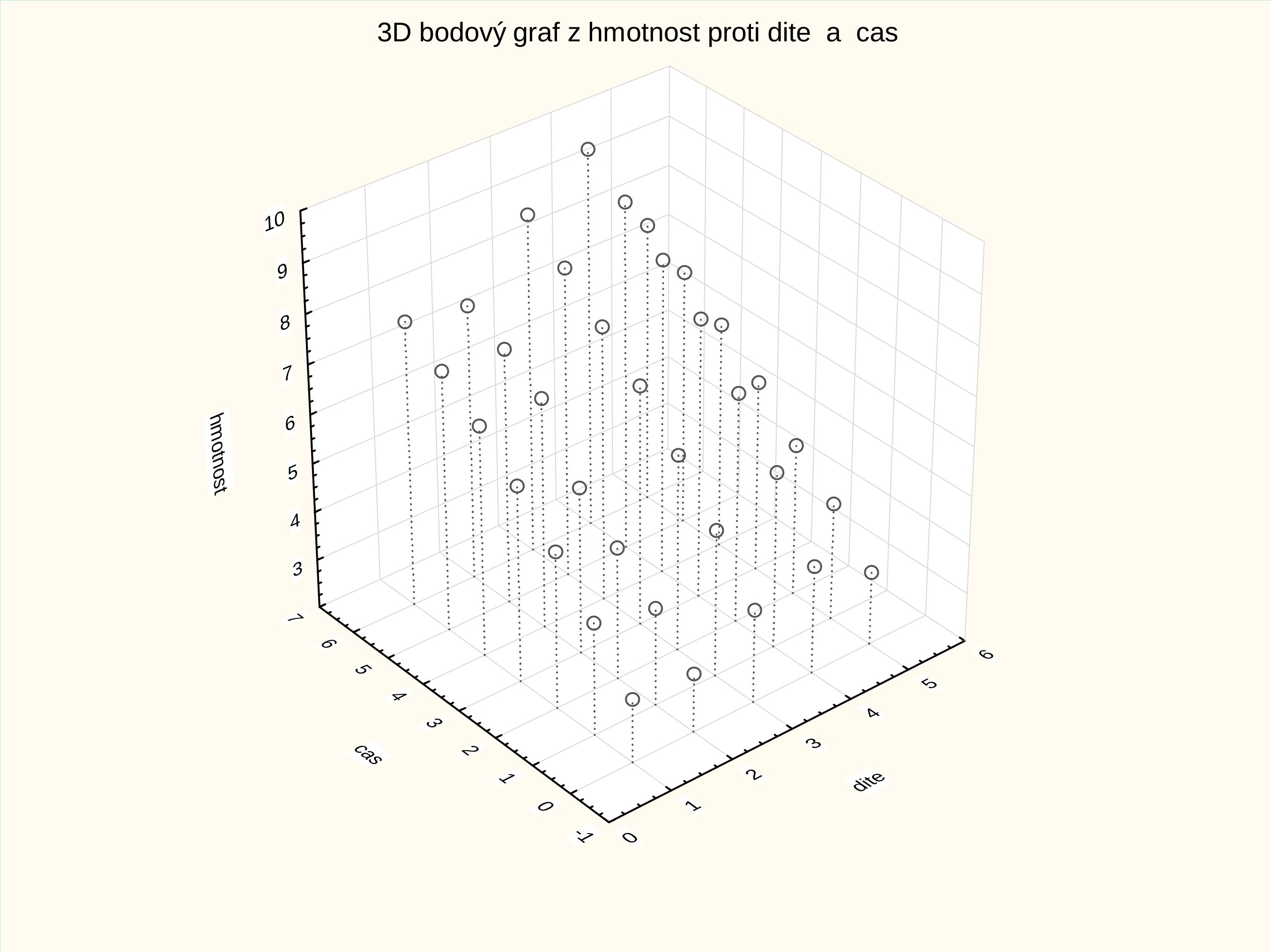
c) X(ω,t) je číselná realizace náhodné veličiny X_t příslušná k možnému výsledku ω, tj. konkrétní průměrná denní teplota na dané stanici v t-tý den r. 2016 (fixovaný okamžik, fixovaná stanice).

Ilustrace na konkrétních datech

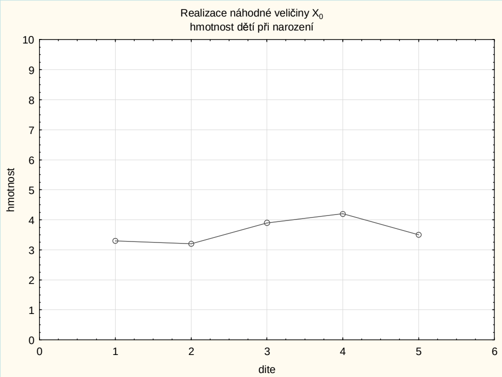
Náhodně vybereme 5 dětí a každý měsíc zjistíme jejich hmotnost (od narození až do šesti měsíců):

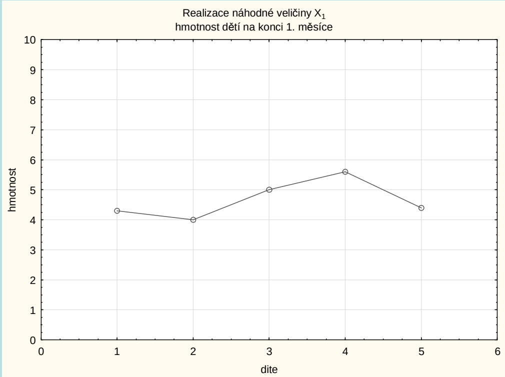
	1 dite	2 cas	3 hmotnost
1	1	0	3,3
2	1	1	4,3
3	1	2	5,2
4	1	3	6
5	1	4	6,7
6	1	5	7,3
7	1	6	7,8
8	2	0	3,2
9	2	1	4
10	2	2	4,7
11	2	3	5,4
12	2	4	6,7
13	2	5	7,2
14	2	6	7,6
15	3	0	3,9
16	3	1	5
17	3	2	6
18	3	3	6,9
19	3	4	7,6
20	3	5	8,3
21	3	6	8,9
22	4	0	4,2
23	4	1	5,6
24	4	2	6,7
25	4	3	7,7
26	4	4	8,4
27	4	5	9,1
28	4	6	9,7
29	5	0	3,5
30	5	1	4,4
31	5	2	5,1
32	5	3	5,9
33	5	4	6,6
34	5	5	7,2
35	5	6	7,7

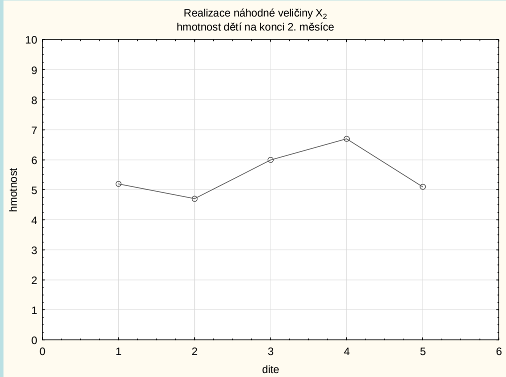
Znázornění průběhu hmotnosti dětí pomocí 3D bodového grafu

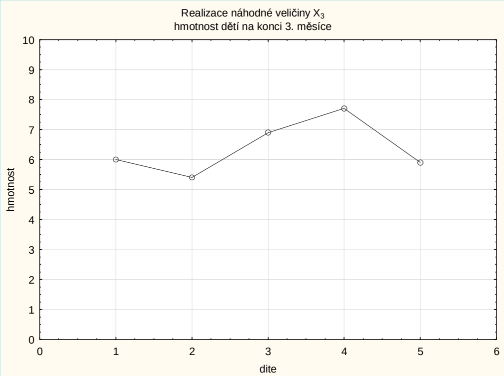


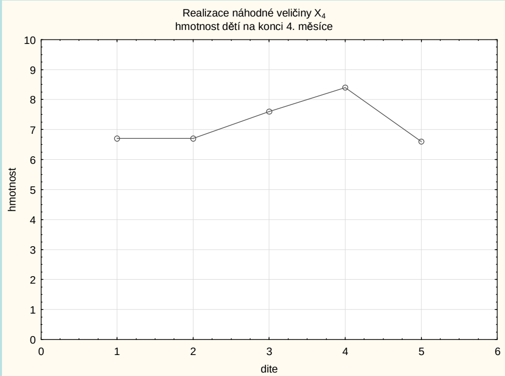
Realizace složek X_0, X_1, …, X_6 stochastického procesu

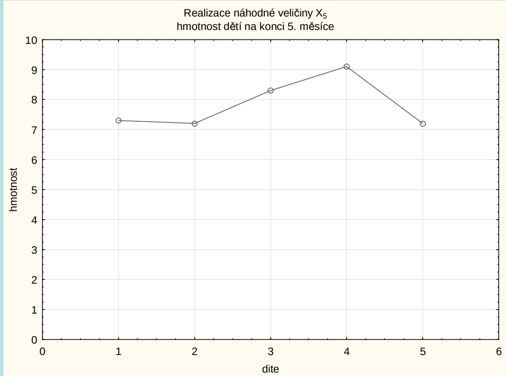


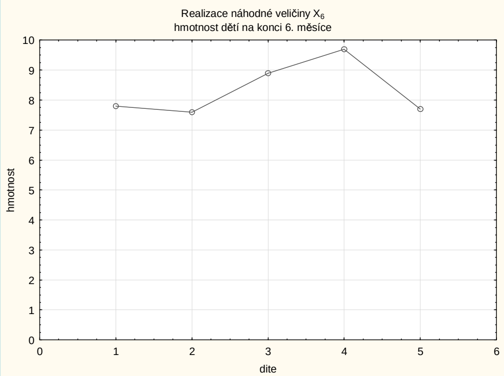




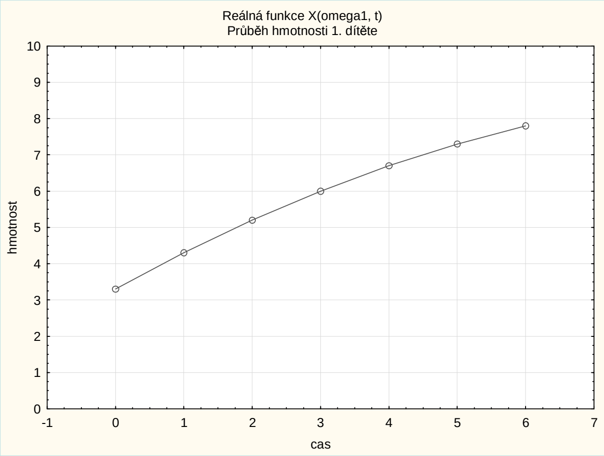


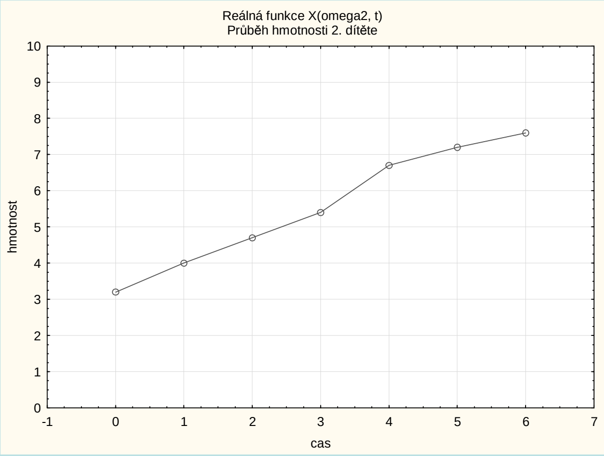


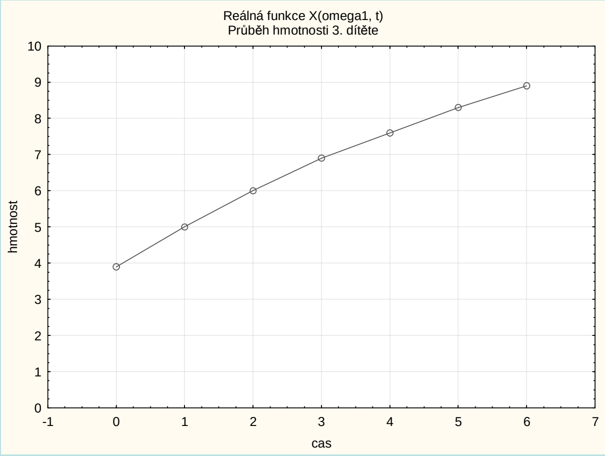


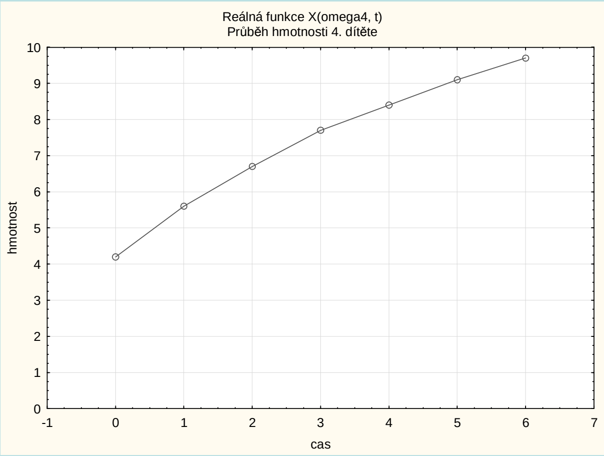


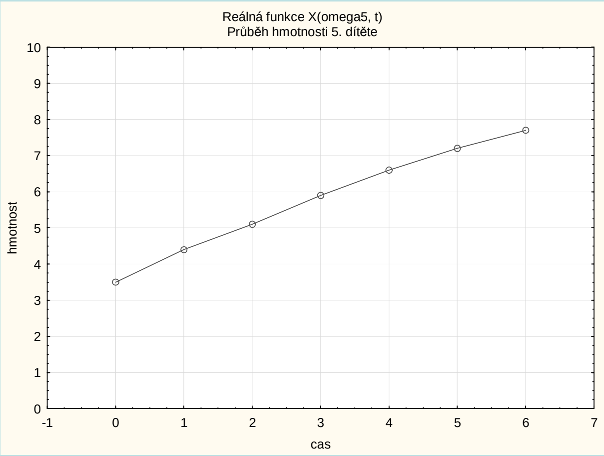
Průběh reálných funkcí $X(\omega_1,t), \ldots, X(\omega_5,t)$, $t = 0, 1, \ldots, 6$











1.5. Definice: Definice časové řady a náhodné funkce

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Je-li množina T spočetná a lineárně uspořádaná, tj. $t_0 < t_1 < \dots$, jde o stochastický proces s diskrétním časem (tj. o časovou řadu).

b) Je-li množina T interval, jde o stochastický proces se spojitým časem (tj. o náhodnou funkci).

1.6. Definice: Definice SP s diskrétními stavy a spojitými stavy

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Jestliže pro $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t diskrétní, jde o stochastický proces s diskrétními stavy.

b) Jestliže pro $\forall t \in T$ je náhodná veličina X_t spojitá, jde o stochastický proces se spojitými stavy.

Množina všech hodnot, jichž může náhodná veličina X_t nabývat, se nazývá množina stavů a značí se J.

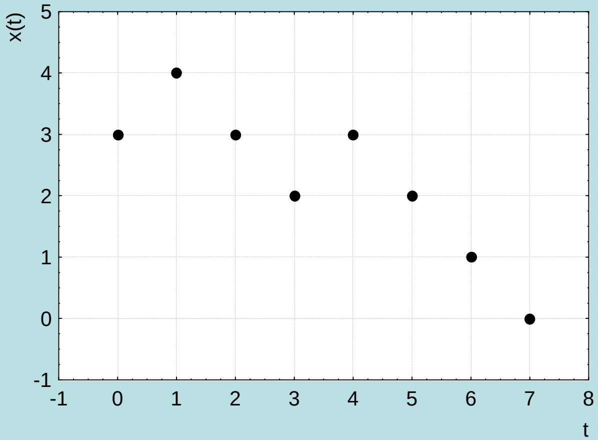
1.7. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskrétním časem a diskrétními stavy:

Dva hráči, označme je A a B, dali do hry dohromady vklad 5 Kč, z toho hráč A 3 Kč a hráč B 2 Kč. Hráč A hází mincí. Když padne líc, vyhraje 1 Kč, když rub, prohraje 1 Kč. Hra trvá tak dlouho, až je jeden z hráčů ruinován. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde t = 1, 2, ... je pořadové číslo hodu mincí a $X_t = j$, když hráč A má po t-tém hodu j Kč, tedy J = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Např. pro posloupnost hodů {L, R, R, L, R , R, R} je odpovídající realizace stochastického procesu

x(t) = {4, 3, 2, 3, 2, 1, 0}.

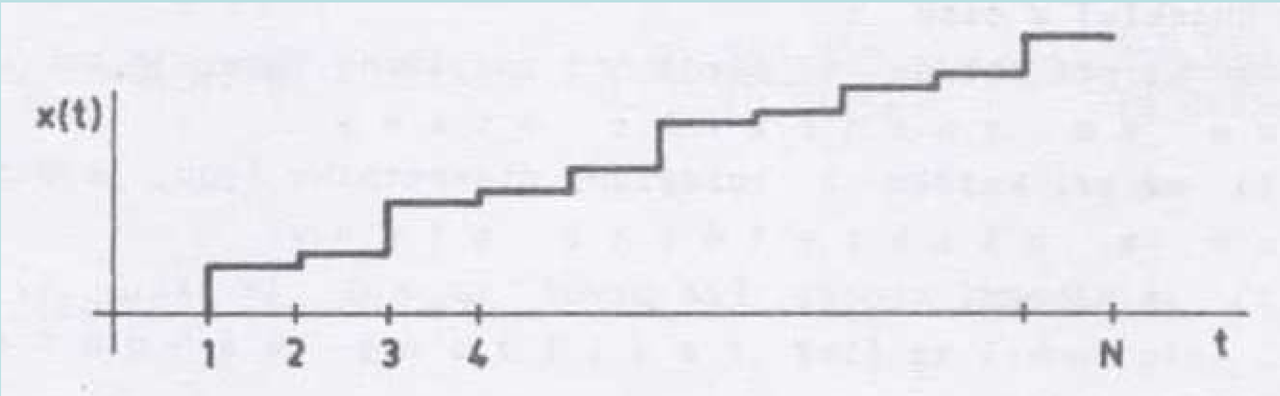
Grafické znázornění:



1.8. Příklad: Příklad stochastického procesu s diskrétním časem a spojitými stavy:

Po určité výrobní operaci měříme velikost opotřebení obráběcího nože. Nůž se po N výrobních operacích vymění. Stochastický proces nabývá hodnot, které odpovídají opotřebení nože. Máme tedy stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde T = {1, 2, ..., N} (t je pořadové číslo výrobní operace), $X_t \in J$, kde $J = \{x \in R; 0 \leq x \leq a\}$, přičemž a je maximální opotřebení obráběcího nože.

Grafické znázornění:

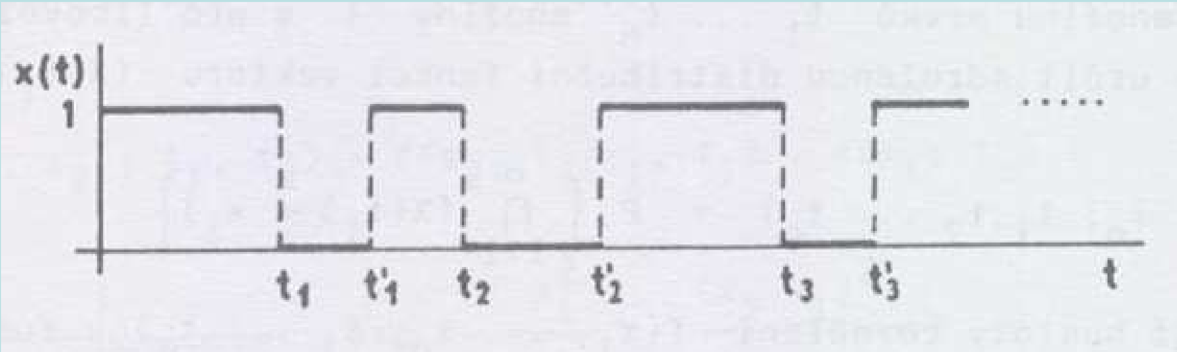


1.9. Příklad: Příklad stochastického procesu se spojitým časem a diskrétními stavy:

Sledujeme určité zařízení, které může být v každém okamžiku buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 0).

Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{t; t \geq 0\}$, $X_t \in J$, $J = \{0, 1\}$.

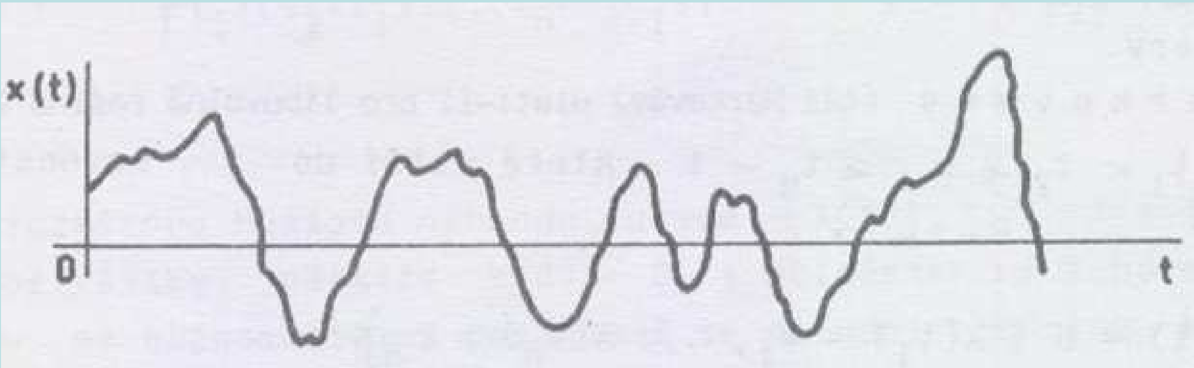
Grafické znázornění: Označme t_1, t_2, … okamžiky poruch, t_1', t_2', … okamžiky oprav.



1.10. Příklad: Příklad stochastického procesu se spojitým časem a spojitými stavy:

Sledujeme šumové napětí na výstupu nějakého elektrického přístroje. Stochastický proces nabývá hodnot, které odpovídají tomuto šumovému napětí. Zavedeme stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$, kde $T = \{t; t \geq 0\}$, $X_t \in J$, kde $J = \{x; -\infty < x < \infty\}$.

Grafické znázornění:



1.11. Definice: Definice pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces. Pro $\forall t \in T$ lze pravděpodobnostní rozložení náhodné veličiny X_t popsat distribuční funkcí: $\forall x \in R : \Phi_t(x) = P(X_t \leq x)$.

(Tato distribuční funkce je obecně funkcí dvou proměnných t a x a popisuje jednorozměrné rozložení stochastického procesu. Nepodává však úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahuje informace o závislostech náhodných veličin X_t při různých hodnotách t. Úplný popis pravděpodobnostního chování stochastického procesu podává teprve systém distribučních funkcí.)

Nechť $(t_1, \ldots, t_n) \in T$ je uspořádaná n-tice indexů, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ je marginální vektor daného stochastického procesu. Pro $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ označme $\Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_{t_n} \leq x_n)$ marginální distribuční funkci náhodného vektoru $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

Systém $F_T = \{\Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n); n = 1, 2, \ldots, t_1, \ldots, t_n \in T\}$ se nazývá pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$.

1.12. Věta: Věta o vlastnostech pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť F_T je pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$. Pak systém F_T má tyto vlastnosti:

a) F_T je symetrický systém distribučních funkcí, tj.

$$\forall n \in N\ \forall t_1, \ldots, t_n \in T\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_{t_{i_1} \ldots t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}),$$ kde $\{i_1, \ldots, i_n\}$

je libovolná permutace množiny indexů $\{1, \ldots, n\}$.

b) F_T je konzistentní systém distribučních funkcí, tj. je-li $\{i, \ldots, j\} \cup \{k, \ldots, l\} = \{1, \ldots, n\}$ disjunktní rozklad množiny indexů $\{1, \ldots, n\}$, pak $$\Phi_{t_i \ldots t_j}(x_i, \ldots, x_j) = \lim_{\substack{x_k \to \infty \\ \vdots \\ x_l \to \infty}} \Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Důkaz: plyne z vlastností distribuční funkce.

1.13. Věta: Kolmogorovova věta

Každý systém distribučních funkcí, který je symetrický a konzistentní, je pravděpodobnostním rozložením nějakého stochastického procesu.

1.14. Definice: Definice stochasticky ekvivalentních SP

Řekneme, že dva stochastické procesy jsou stochasticky ekvivalentní, mají-li stejné pravděpodobnostní rozložení.

1.15. Příklad: Odvození pravděpodobnostního rozložení SP

Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $\Psi(x)$ a f(t) je reálná funkce taková, že

a) f(t) > 0 pro $\forall t \in T$

b) f(t) < 0 pro $\forall t \in T$.

Pro $\forall t \in T$ položme $X_t = f(t)X$. Odvoďte pravděpodobnostní rozložení stochastického procesu $\{X_t; t \in T\}$.

Řešení:

ad a)

$$\Phi_{t_1\dots t_n}(x_1,\dots,x_n) = P\left(X_{t_1} \le x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \le x_n\right) = P\left(f(t_1)X \le x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \le x_n\right) =$$

$$= P\left(X \le \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \le \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \le \min_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = \Psi\left(\min_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).$$

ad b)

$$\Phi_{t_1\dots t_n}(x_1,\dots,x_n) = P\left(X_{t_1} \le x_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \le x_n\right) = P\left(f(t_1)X \le x_1 \wedge \dots \wedge f(t_n)X \le x_n\right) =$$

$$= P\left(X \ge \frac{x_1}{f(t_1)} \wedge \dots \wedge X \ge \frac{x_n}{f(t_n)}\right) = P\left(X \ge \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 1 - P\left(X \le \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) =$$

$$= 1 - \Psi\left(\max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) + P\left(X = \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right).$$

Je-li X spojitá náhodná veličina, pak $P\left(X = \max_{1\le i\le n} \frac{x_i}{f(t_i)}\right) = 0$.

1.16. Poznámka: Dělení SP podle různých kritérií

a) Rozdělení stochastických procesů podle závislosti jejich pravděpodobnostního rozložení na čase

– striktně stacionární procesy (je pro ně charakteristická určitá stálost v čase): $\Phi_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_{t_1+h \ldots t_n+h}(x_1, \ldots, x_n)$, kde h > 0

– evoluční procesy (mají výrazný časový trend)

b) Rozdělení stochastických procesů podle toho, zda k určení jejich pravděpodobnostního rozložení stačí znát pouze dvourozměrné distribuční funkce či nikoliv:

– definitní procesy

– hereditní procesy

c) Rozdělení definitních procesů podle toho, zda jejich pravděpodobnostní rozložení závisí pouze na rozdílu časových okamžiků, nikoliv na jejich umístění na časové ose

– homogenní procesy

– nehomogenní procesy.

2. Funkcionální charakteristiky stochastických procesů

2.1. Motivace: V této kapitole

zavedeme trend, rozptyl a směrodatnou odchylku stochastického procesu,

autokovarianční a autokorelační funkci stochastického procesu,

poznáme vlastnosti těchto funkcionálních charakteristik,

budeme definovat centrovaný a standardizovaný stochastický proces

slabě stacionární stochastický proces.

2.2. Definice: Definice střední hodnoty a rozptylu SP, definice centrovaného a standardizovaného SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces.

a) Jestliže pro $\forall t \in T$ existuje střední hodnota $E(X_t)$, pak zavedeme reálnou funkci $\mu(t)$ vztahem:

$$\forall t \in T : \mu(t) = E(X_t).$$

Tato funkce se nazývá střední hodnota (trend) SP. ($\mu(t)$ charakterizuje polohu realizací SP na reálné ose.)

b) Jestliže pro $\forall t \in T$ existuje rozptyl $D(X_t)$, pak zavedeme reálnou funkci $\sigma^2(t)$ vztahem:

$$\forall t \in T : \sigma^2(t) = D(X_t).$$

Tato funkce se nazývá rozptyl SP. Funkce $\sigma(t) = \sqrt{\sigma^2(t)}$ se nazývá směrodatná odchylka SP.

($\sigma^2(t)$ charakterizuje variabilitu realizací stochastického procesu kolem trendu.)

c) Nechť stochastický proces má střední hodnotu $\mu(t)$ a rozptyl $\sigma^2(t)$, který je konečný a nenulový.

Transformovaný stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = X_t - \mu(t)$, se nazývá centrovaný SP.

Transformovaný stochastický proces $\{Z_t; t \in T\}$, kde $Z_t = \dfrac{X_t - \mu(t)}{\sigma(t)}$, se nazývá standardizovaný SP.

(Lze snadno ukázat, že centrovaný SP má nulovou střední hodnotu a rozptyl stejný jako původní SP. Standardizovaný SP má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.)

2.3. Příklad:

Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu E(X) = 2 a rozptyl D(X) = 9.

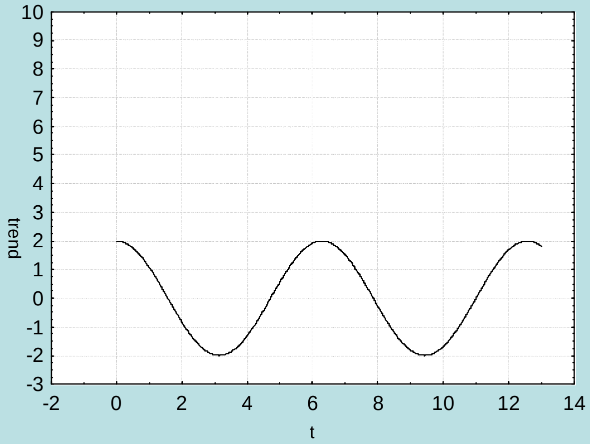
Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t = X.cos ωt, ω > 0 je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP.

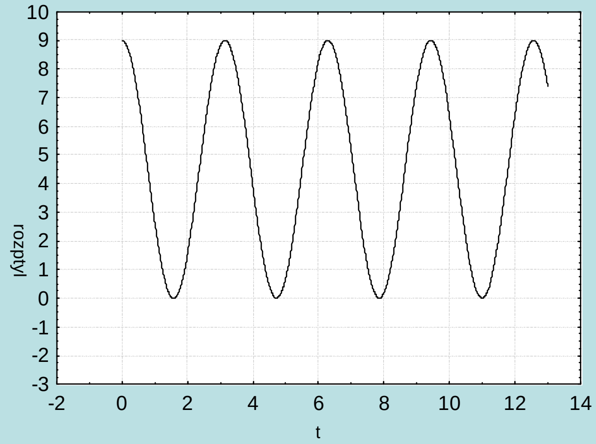
Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(X \cdot \cos \omega t) = \cos \omega t \cdot E(X) = 2 \cos \omega t$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(X \cdot \cos \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(X) = 9 \cos^2 \omega t$$

Např. pro ω = 1 dostaneme:





2.4. Poznámka: Další funkcionální charakteristiky stochastického procesu

Podobně jako u náhodných veličin lze pro stochastický proces zavést další momentové charakteristiky, např. šikmost a špičatost. Všechny tyto charakteristiky, které vycházejí ze znalosti jednorozměrného rozložení stochastického procesu, však nepostačují k popisu pravděpodobnostního chování stochastického procesu, protože neobsahují informace o závislostech mezi složkami stochastického procesu.

2.5. Definice: Definice autokovarianční a autokorelační funkce SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces. Předpokládáme, že pro $\forall t \in T$ existuje střední hodnota $E(X_t)$ a $E(X_t^2) < \infty$.

a) Reálnou funkci $\gamma(t_1, t_2)$ dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = E([X_{t_1} - \mu(t_1)][X_{t_2} - \mu(t_2)])$ nazveme autokovarianční funkcí stochastického procesu.

b) Reálnou funkci $\rho(t_1, t_2)$ dvou proměnných danou vztahem

$\forall t_1, t_2 \in T : \rho(t_1, t_2) = R(X_{t_1}, X_{t_2}) = \dfrac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$ nazveme autokorelační funkcí stochastického procesu.

(Autokovarianční funkce je zobecněním varianční matice náhodného vektoru a autokorelační funkce je zobecněním korelační matice náhodného vektoru. Tyto funkce obsahují informace o lineárních závislostech mezi složkami SP.)

2.6. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce SP

Pro autokovarianční funkci stochastického procesu platí:

a) $\forall t \in T : \gamma(t,t) = \sigma^2(t)$

b) $\forall t_1, t_2 \in T : \gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_2, t_1)$

c) $\forall t_1, t_2 \in T : |\gamma(t_1, t_2)| \leq \sigma(t_1)\sigma(t_2)$ (zobecněná Cauchyho – Schwarzova – Buňakovského nerovnost)

Důkaz: Plyne z vlastností kovariance.

2.7. Příklad:

Najděte autokovarianční a autokorelační funkci SP z příkladu 2.3. V tomto příkladu byl SP zaveden vztahem X_t = X.cos ωt, přičemž E(X) = 2, D(X) = 9

Řešení:

$$\gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = C(X \cdot \cos\omega t_1, X \cdot \cos\omega t_2) = \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 \cdot C(X, X) =$$
$$= \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 \cdot D(X) = 9\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{9\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2}{\sqrt{9\cos^2\omega t_1}\sqrt{9\cos^2\omega t_2}} = \pm 1$$

2.8. Věta: Věta o střední hodnotě a autokovarianční funkci transformovaného SP

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je stochastický proces se střední hodnotou $\mu_X(t)$ a autokovarianční funkcí $\gamma_X(t_1, t_2)$. Nechť f(t) je reálná funkce definovaná na T.

a) Zavedeme stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = X_t + f(t)$. Pak platí:

$$\forall t \in T : \mu_Y(t) = \mu_X(t) + f(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T : \gamma_Y(t_1, t_2) = \gamma_X(t_1, t_2)$$

b) Zavedeme stochastický proces $\{Y_t; t \in T\}$, kde $Y_t = f(t)\, X_t$. Pak platí:

$$\forall t \in T : \mu_Y(t) = f(t)\mu_X(t)$$

$$\forall t_1, t_2 \in T : \gamma_Y(t_1, t_2) = f(t_1) f(t_2) \gamma_X(t_1, t_2)$$

Důkaz: Plyne z vlastností střední hodnoty a kovariance.

2.9. Definice: Definice slabě stacionárního SP

Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ se nazývá slabě stacionární, jestliže platí:

a) $\forall t \in T: \mu(t) = c$ (trend je konstantní)

b) $\forall t \in T: \sigma^2(t) < \infty$ (rozptyl je konečný)

c) $\forall t_1, t_2 \in T, \forall h > 0: \gamma(t_1 + h, t_2 + h) = \gamma(t_1, t_2)$ (kovariance libovolných dvou složek SP závisí pouze na jejich vzdálenosti na časové ose a nikoliv na jejich umístění na časové ose)

2.10. Poznámka: Vztah mezi striktní a slabou stacionaritou SP, zavedení autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

a) Je-li stochastický proces striktně stacionární, je i slabě stacionární.

b) Je-li stochastický proces slabě stacionární, pak pro $\forall t_1, t_2 \in T: \gamma(t_1, t_2) = \gamma(0, t_2 - t_1)$. Znamená to, že autokovarianční funkce závisí pouze na rozdílu argumentů $t_2 - t_1 =: h$. V tomto případě zavádíme funkci jedné proměnné, kterou značíme rovněž symbolem γ, vztahem $\forall h \in T: \gamma(h) = \gamma(0, h)$. Je to autokovarianční funkce slabě stacionárního SP.

2.11. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

Autokovarianční funkce slabě stacionárního stochastického procesu má tyto vlastnosti:

a) $\forall t \in T : \sigma^2(t) = \gamma(0) = \sigma^2$ (všechny složky SP mají týž rozptyl)

b) $\forall h > 0 : \gamma(h) = \gamma(-h)$ (autokovarianční funkce je sudá)

c) $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

Důkaz: Důkaz vlastností a) , b) je triviální.

Ad c) Uvažme centrovaný slabě stacionární SP $\{X_t ; t \in T\}$ (tj. pro $\forall t \in T : \mu(t) = 0$). Pak

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = E(X_t{}^2) - [E(X_t)]^2 = E(X_t{}^2).$$

Dále $\gamma(h) = \gamma(t, t+h) = C(X_t, X_{t+h}) = E(X_t \cdot X_{t+h})$.

Počítáme

$$E([X_t \pm X_{t+h}]^2) = E(X_t{}^2) \pm 2E(X_t X_{t+h}) + E(X_{t+h}{}^2) = \sigma^2(t) \pm 2\gamma(h) + \sigma^2(t+h) = 2[\gamma(0) \pm \gamma(h)].$$

Protože $E([X_t \pm X_{t+h}]^2) \geq 0$, plyne odtud, že $\forall h > 0 : |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$.

2.12. Příklad:

Nechť Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny (tj. E(Y) = 0, E(Z) = 0, D(Y) = 1, D(Z) = 1), které jsou stochasticky nezávislé. Zavedeme SP $\{X_t; t \in T\}$, kde X_t = Y.cos ωt + Z.sin ωt, ω > 0 je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP a ukažte, že je slabě stacionární.

Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos \omega t \cdot E(Y) + \sin \omega t \cdot E(Z) = 0$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(Y) + \sin^2 \omega t \cdot D(Z) = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1.$$

Aby byl SP slabě stacionární, musí mít konstantní střední hodnotu, konečný rozptyl a pro jeho autokovarianční funkci musí platit γ(h) = γ(t, t+h). První dvě podmínky jsou splněny, ověříme třetí:

$$\gamma(t, t+h) = C(X_t, X_{t+h}) = C(Y \cdot \cos \omega t + Z \cdot \sin \omega t, Y \cdot \cos \omega(t+h) + Z \cdot \sin \omega(t+h)) =$$
$$= \cos \omega t \cdot \cos \omega(t+h) \cdot C(Y,Y) + \sin \omega t \cdot \cos \omega(t+h) \cdot C(Z,Y) + \cos \omega t \cdot \sin \omega(t+h) \cdot C(Y,Z) +$$
$$+ \sin \omega t \cdot \sin \omega(t+h) \cdot C(Z,Z) =$$
$$= \cos \omega t \cdot \cos \omega(t+h) \cdot D(Y) + \sin \omega t \cdot \sin \omega(t+h) \cdot D(Z) = \cos \omega t \cdot \cos \omega(t+h) + \sin \omega t \cdot \sin \omega(t+h) =$$
$$= \cos \omega(t - (t+h)) = \cos \omega(-h) = \cos \omega h = \gamma(h)$$

2.13. Věta: Věta o vlastnostech autokorelační funkce slabě stacionárního SP

Pro autokorelační funkci slabě stacionárního SP platí:

$$\forall h \in T : \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Důkaz:

$\forall t_1, t_2 \in T : \rho(t_1, t_2) = \dfrac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$. Je-li SP slabě stacionární, pak $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(h), \sigma^2(t_1) = \sigma^2(t_2) = \gamma(0)$, tedy $\rho(h) = \dfrac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$.

2.14. Příklad:

Nechť je dán SP $\{X_t ; t \in T\}$, kde náhodné veličiny $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots$ jsou stochasticky nezávislé a mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$. Určete střední hodnotu, rozptyl a autokorelační funkci tohoto SP.

Řešení: Protože náhodné veličiny X_t, $t \in T$ mají všechny stejnou distribuční funkci $\Phi(x)$, mají i stejnou střední hodnotu $E(X_t) = \mu$ a stejný rozptyl $D(X_t) = \sigma^2$. Dále počítáme autokovarianční funkci $\gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = \begin{cases} \sigma^2 \text{ pro } t_1 = t_2 \\ 0 \text{ pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$. Jedná se tedy o slabě stacionární SP. Nyní spočteme autokorelační funkci $\rho(t_1, t_2) = \dfrac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \begin{cases} 1 \text{ pro } t_1 = t_2 \\ 0 \text{ pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$. Znamená to, že neexistuje žádná závislost mezi realizacemi SP ve dvou různých okamžicích.