

## 17. Obecný proces vzniku a zániku

**17.1. Motivace:** Budeme se zabývat popisem kolísání rozsahu souboru objektů v čase za předpokladu, že

**a)** v náhodných okamžicích vstupují do tohoto souboru nové objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu  $(t, t + h)$  vstoupí do souboru rozsahu  $j$  nový objekt, je  $\lambda_j h + o(h)$ , kde  $\lambda_j$  je **intenzita vstupu do stavu  $j$** ;

**b)** v náhodných okamžicích vystupují z tohoto souboru jiné objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu  $(t, t + h)$  vystoupí ze souboru rozsahu  $j$  jeden objekt, je  $\mu_j h + o(h)$ , kde  $\mu_j$  je **intenzita výstupu ze stavu  $j$** ;

**c)** vstupy a výstupy objektů jsou stochasticky nezávislé jevy;

**d)** během krátkého časového intervalu zůstává rozsah souboru týž nebo se jedničku zvětší či zmenší.

Bude nás především zajímat, jak se chová rozsah tohoto souboru po dostatečně dlouhé době, tj. po odeznění vlivu počátečních podmínek.

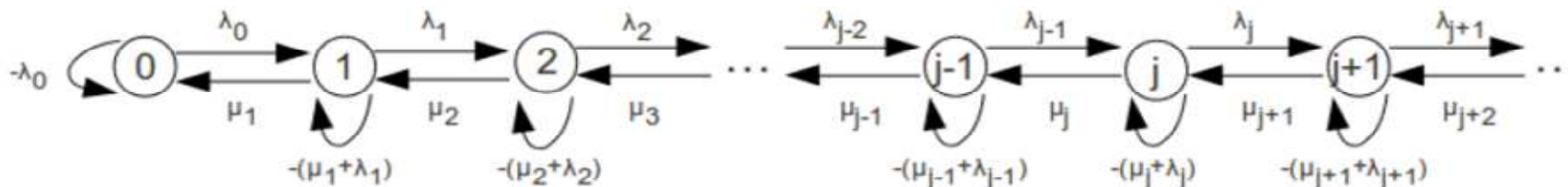
## 17.2. Definice: Definice procesu vzniku a zániku

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ , vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$  a matici intenzit přechodu

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j, j=0,1,2, \dots \text{ a } \mu_j, j=1,2, \dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **proces vzniku a zániku** (resp. množení a úmrtí).

Přechodový diagram:



**Upozornění:** Je zřejmé, že Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku a zániku, v němž

$$\mu_j = 0, j = 1, 2, \dots \text{ a } \lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots$$

Proces vzniku a zániku nachází uplatnění při modelování chování takových systémů hromadné obsluhy, kde vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením.

### 17.3. Věta: Stacionární rozložení procesu vzniku a zániku

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je proces vzniku a zániku s intenzitami vzniku  $\lambda_j, j=0,1,2,\dots$  a intenzitami zániku  $\mu_j, j=1,2,\dots$ . Pak

stacionární rozložení tohoto procesu je dáno vzorcem:  $\forall j \in J: a_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0$ , kde  $a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}}$  za

předpokladu, že řada  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}$  absolutně konverguje. Jinak stacionární rozložení neexistuje.

**Důkaz:** Hledáme řešení systému rovnic  $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$ ,  $a_0 + a_1 + \dots = 1$ , tj.

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (0, 0, 0, \dots),$	$-\lambda_0 a_0 + \mu_1 a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} a_0$
$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1$	$\lambda_{j-1} a_{j-1} - (\mu_j + \lambda_j) a_j + \mu_{j+1} a_{j+1} = 0, j=1, 2, \dots \Rightarrow$ $a_{j+1} = -\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j+1}} a_{j-1} + \frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_{j+1}} a_j$
$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1$	$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1$

Nechť  $j = 1: a_2 = -\frac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2} a_1 = -\frac{\lambda_0}{\mu_2} a_0 + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} a_0 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} a_0$

Obecně:  $a_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0$ , přičemž  $1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}}$ , pokud

řada  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j}$  absolutně konverguje.

**17.4. Příklad:** Uvažujme populaci, kde intenzity vzniku jsou  $\lambda_j = \left(\frac{1}{3}\right)^j, j = 0, 1, 2, \dots$  a intenzity zániku jsou

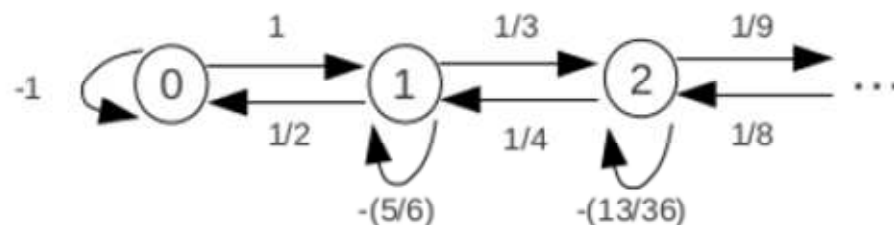
$$\mu_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j, j = 1, 2, 3, \dots$$

a) Napište matici intenzit přechodu a nakreslete přechodový diagram.

b) Za předpokladu, že můžeme mít maximálně 5 jedinců, vypočítejte stacionární rozložení.

**Řešení:**

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$



Výpočet stacionárního rozložení:

$$a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^5 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_4}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_5}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4}} + \frac{1 \frac{1}{3} \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}} + \frac{1 \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{27}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16}} + \frac{1 \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{27} \frac{1}{81}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{1}{32}}} \doteq 0,10$$

$$a_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} a_0 = \frac{1}{2} \cdot 0,10 \doteq 0,05$$

$$a_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} a_0 = \frac{1 \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4}} \cdot 0,10 \doteq 0,067$$

$$a_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} a_0 = \frac{1 \frac{1}{3} \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}} \cdot 0,10 \doteq 0,04$$

$$a_4 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} a_0 = \frac{1 \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{27}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16}} \cdot 0,10 \doteq 0,025$$

$$a_5 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} a_0 = \frac{1 \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{27} \frac{1}{81}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{1}{32}} \cdot 0,10 \doteq 0,015$$

Tedy:  $\mathbf{a} \doteq (0,10 \ 0,05 \ 0,067 \ 0,04 \ 0,025 \ 0,015)$ .

## 18. Speciální případy procesu vzniku a zániku

### 18.1. Definice: Definice lineárního procesu vzniku a zániku

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ , vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (0, 1, 0, \dots)$  a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\mu + \lambda) & 2\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda, \mu \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **lineární proces vzniku a zániku s intenzitami  $\lambda, \mu$** .

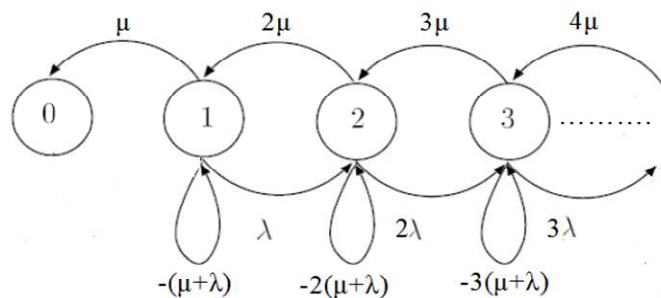
(Intenzity přechodu jsou lineárními funkcemi pořadí stavů, v nichž byl proces v předešlém okamžiku, tj.  $\lambda_j = j\lambda, j = 0, 1, 2, \dots$   $\mu_j = j\mu, j = 1, 2, \dots$ )

### Vysvětlení:

Lineární proces vzniku a zániku modeluje vývoj populace, v níž se jedinci mohou množit a zanikat podle těchto pravidel:

- osudy jedinců jsou navzájem nezávislé
- pravděpodobnost, že z libovolného jedince vznikne během krátkého časového intervalu  $(t, t+h)$  nový jedinec, je  $\lambda h + o(h)$  a pravděpodobnost, že vznikne více než jeden jedinec, je  $o(h)$ ;
- pravděpodobnost, že libovolný jedinec zanikne během krátkého časového intervalu  $(t, t+h)$ , je  $\mu h + o(h)$  a pravděpodobnost, že zanikne více než jeden jedinec, je  $o(h)$ ;
- je-li rozsah populace v čase  $t$  roven  $j$ , pak pravděpodobnost, že v intervalu  $(t, t+h)$  se počet jedinců o jednoho zvětší, je  $j\lambda h + o(h)$  a pravděpodobnost, že v tomto intervalu se počet jedinců o jednoho zmenší, je  $j\mu h + o(h)$ ;
- k více než jedné změně rozsahu populace během intervalu  $(t, t+h)$  dojde s pravděpodobností  $o(h)$ ;
- k žádné změně dojde s pravděpodobností  $1 - j\lambda h - j\mu h + o(h)$ .

Přechodový diagram:



Z tvaru přechodového diagramu je zřejmé, že stav 0 je stavem absorpčním.

## 18.2. Věta: Věta o absolutních pravděpodobnostech v lineárním procesu vzniku a zániku

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami  $\lambda, \mu$ . Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

$$\text{Pro } \lambda = \mu: p_0(t) = \frac{\lambda t}{1 + \lambda t}, \quad p_j(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(1 + \lambda t)^{j+1}}, j = 1, 2, \dots$$

$$\text{Pro } \lambda \neq \mu \text{ zavedeme označení } A(t) = \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}. \text{ Pak } p_0(t) = \mu A(t), \quad p_j(t) = [1 - \lambda A(t)][1 - \mu A(t)][\lambda A(t)]^{j-1}, j = 1, 2, \dots$$

**Důkaz:** Uvedené vztahy získáme řešením systému evolučních diferenciálních rovnic.

## 18.3. Důsledek: Pravděpodobnost zániku

Pravděpodobnost, že soubor objektů v čase  $t$  zanikne, je  $P(X_t = 0) = p_0(t) = \begin{cases} \frac{\lambda t}{1 + \lambda t} & \text{pro } \lambda = \mu \\ \mu A(t) & \text{pro } \lambda \neq \mu \end{cases}$ . Limitním přechodem

pro  $t \rightarrow \infty$  zjistíme, že limitní pravděpodobnost zániku je  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \lambda \leq \mu \\ \frac{\mu}{\lambda} & \text{pro } \lambda > \mu \end{cases}$ .

(Ze vzorce pro  $p_j(t)$  plyne, že pro  $t \rightarrow \infty$  jde  $p_j(t)$  k 0 pro  $j = 1, 2, \dots$ , tedy stavy  $1, 2, 3, \dots$  jsou přechodné a pro  $t \rightarrow \infty$  proces buď skončí v ve stavu 0 nebo počet jedinců poroste nade všechny meze.)



#### 18.4. Věta: Střední hodnota a rozptyl rozsahu souboru

Necht'  $\{X_t; t \in T\}$  je lineární proces vzniku a zániku s intenzitami  $\lambda, \mu$ . Předpokládejme, že v čase  $t = 0$  má soubor rozsah  $k_0 \geq 1$ . Pak pro střední hodnotu a rozptyl rozsahu souboru v čase  $t > 0$  platí:

Pro  $\lambda = \mu$ :  $E(X_t) = k_0, D(X_t) = 2k_0\lambda t$ .

Pro  $\lambda \neq \mu$ :  $E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t}, D(X_t) = k_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t} [e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$ .

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

**18.5. Poznámka:** Limitním přechodem pro  $t \rightarrow \infty$  zjistíme, že limitní střední hodnota rozsahu souboru je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(X_t) = \begin{cases} k_0 & \text{pro } \lambda = \mu \\ 0 & \text{pro } \lambda < \mu \\ \infty & \text{pro } \lambda > \mu \end{cases}$$

**18.6. Příklad:** Necht'  $\{X_t; t \in T\}$  je lineární proces vzniku a zániku s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ , intenzitou vzniku  $\lambda = 0,01$  a intenzitou zániku  $\mu = 0,001$ .

a) Jaká je pravděpodobnost, že proces zanikne v čase  $t = 100$ ?

b) Jaká je limitní pravděpodobnost zániku?

**Řešení:**

$$\text{Ad a) Podle důsledku 17.3. } p_0(t) = \mu \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}, \text{ tedy } p_0(100) = 0,001 \frac{1 - e^{0,9}}{0,001 - 0,01e^{0,9}} = 0,0619$$

Pravděpodobnost, že v čase  $t = 100$  proces zanikne, je 6,2 %.

$$\text{Ad b) } \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{0,001}{0,01} = 0,1$$

Limitní pravděpodobnost zániku je 10 %.

**18.7. Příklad:** V příkladu 18.6. předpokládejme, že v čase  $t = 0$  soubor obsahoval 20 objektů. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka rozsahu souboru v čase  $t = 100$ ?

**Řešení:**

$$E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t} = 20e^{0,9} = 49,1921, \sqrt{D(X_t)} = \sqrt{k_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t} [e^{(\lambda-\mu)t} - 1]} = \sqrt{20 \frac{11}{9} e^{0,9} (e^{0,9} - 1)} = 9,3679$$

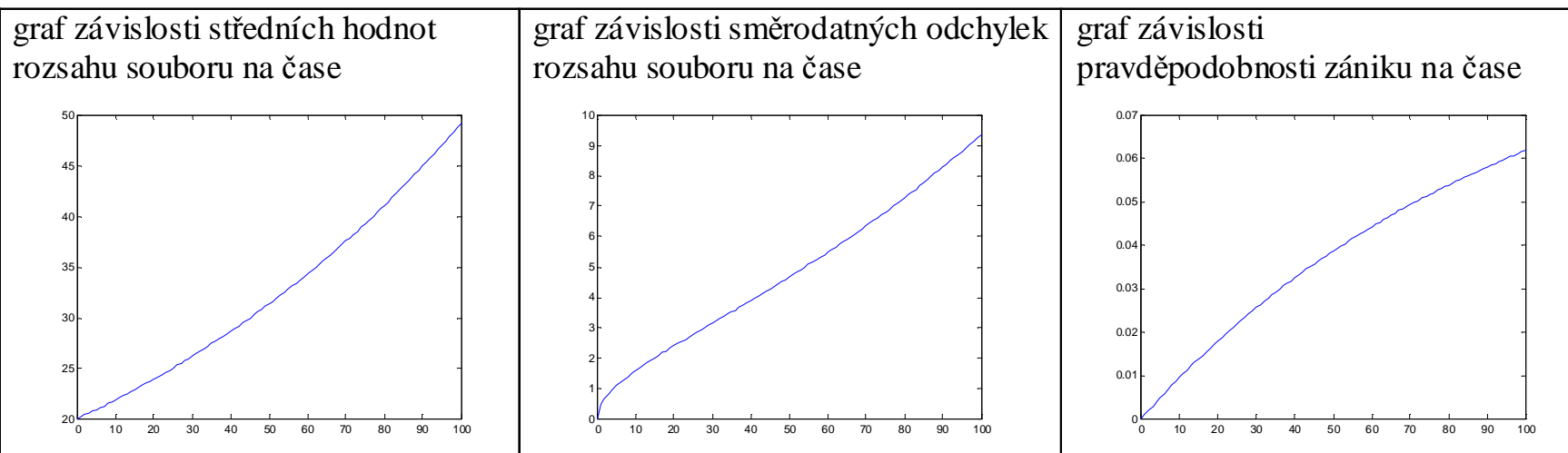
**18.8. Poznámka:** Vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku lze v MATLABu ilustrovat pomocí funkce `lpvz.m`:

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku
% syntaxe: [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% vstupní parametry:
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zániku
% tau je konečný čas, k0 rozsah souboru v case t=0
% výstupní parametry:
% M je vektor středních hodnot rozsahu souboru v case t=0 az tau
% S je vektor směrodatných odchylek rozsahu souboru v case t=0 az tau
% P je pravděpodobnost zániku souboru v case t=0 az tau
t=[0:tau]';
M=k0*exp((lambda-mi).*t);
S=sqrt(k0*((lambda+mi)/(lambda-mi))*exp((lambda-mi).*t).*(exp((lambda-mi).*t)-1));
P=mi*((1-exp((lambda-mi).*t))./(mi-lambda*exp((lambda-mi).*t)));
plot(t,M)
figure
plot(t,S)
figure
plot(t,P)
```

Použijeme tuto funkci pro proces popsaný v př. 18.6. a 18.7.

$\lambda=0.01; \mu=0.001; \tau=100; k_0=20;$

Dostaneme



### 18.9. Definice: Definice Erlangova procesu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je HMŘ se spojitým časem, který má konečnou množinu stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ , vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots, 0)$  a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda \text{ a } \mu \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **Erlangův proces**.

**Agner Krarup Erlang** (1878 – 1929) byl dánský matematik, jako první se vědecky zabýval problematikou telefonních sítí. Pracoval 20 let pro Kodaňskou telefonní společnost. Na jeho počest byl zaveden 1 erlang jako jednotka telefonního provozu.

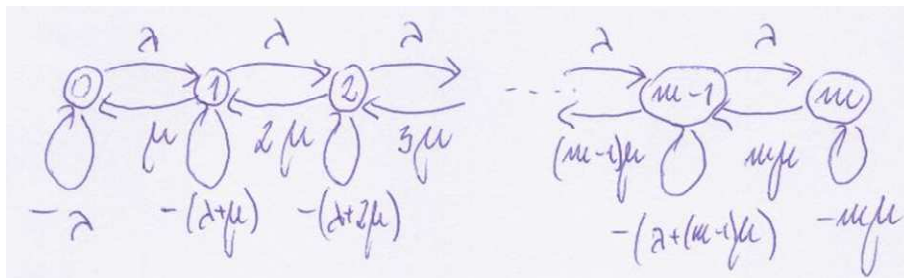


## Vysvětlení:

Erlangův proces modeluje např. provoz telefonní ústředny, do níž vede  $m$  linek a provoz probíhá podle těchto pravidel:

- hovory přicházejí na TÚ navzájem nezávisle;
- pravděpodobnost, že během krátkého časového intervalu  $(t, t+h)$  přijde na TÚ nový hovor, je  $\lambda h + o(h)$  a pravděpodobnost, že přijde více než jeden hovor, je  $o(h)$ ;
- pravděpodobnost, že během krátkého časového intervalu  $(t, t+h)$  neprijde žádný hovor, je  $1 - \lambda h + o(h)$ ;
- je-li všech  $m$  linek obsazeno, hovor se ztrácí;
- doba trvání hovoru je náhodná veličina s rozložením  $Ex(\mu)$ ;
- pravděpodobnost, že hovor, který trvá v čase  $t$ , skončí během krátkého časového intervalu  $(t, t+h)$ , je  $\mu h + o(h)$ ;
- pravděpodobnost, že hovor, který trvá v čase  $t$ , neskončí během krátkého časového intervalu  $(t, t+h)$ , je  $1 - \mu h + o(h)$ .

Přechodový diagram:



### 18.10. Věta: Věta o stacionárním rozložení Erlangova procesu

Stacionární rozložení Erlangova procesu je dáno vzorcem:  $a_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$ ,  $j=0,1,\dots,m$ . Stacionární rozložení existuje vždy.

**Důkaz:** Hledáme řešení systému  $\mathbf{aQ} = \mathbf{0}$ ,  $\sum_{j=0}^m a_j = 1$ .

$$(a_0, a_1, \dots, a_m) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)\mu & -((m-1)\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\lambda a_0 + \mu a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{\mu} a_0$$

$$\lambda a_{j-1} - (\lambda + j\mu) a_j + (j+1)\mu a_{j+1} = 0 \Rightarrow a_{j+1} = \frac{1}{j+1} \left( -\frac{\lambda}{\mu} a_{j-1} + \frac{\lambda + j\mu}{\mu} a_j \right), j=1,2,\dots,m-1$$

$$\lambda a_{m-1} - m\mu a_m = 0$$

Necht'  $j = 1$ :  $a_2 = \frac{1}{2} \left( -\frac{\lambda}{\mu} a_0 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} a_1 \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\lambda}{\mu} a_0 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} a_0 \right) = \frac{1}{2!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 a_0$ . Obecně:  $a_j = \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j a_0$ ,  $j=1,2,\dots,m$ .

$$\text{Přitom } 1 = \sum_{j=0}^m a_j = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j}. \text{ Celkem: } a_j = \frac{1}{j!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j, j=0,1,\dots,m$$



**18.11. Příklad:** V dílně pracují tři opraváři. Do této dílny přichází v průměru 24 zákazníků za 1 h. Jestliže přichodí zákazník najde volného opraváře, je k němu přiřazen a začne oprava. Jestliže není žádný opravář volný, zákazník nečeká a odchází. Předpokládáme, že doba opravy se řídí exponenciálním rozložením, přičemž průměrná doba opravy je 5 min.

a) Jakou procentuální část pracovní doby jsou opraváři nevyužiti?

b) Kolik procent potenciálních zákazníků je odmítnuto?

c) Jaký je průměrný počet obsluhujících opravářů?

**Řešení:** Zavedeme Erlangův proces  $\{X_t; t \in T\}$ , kde  $X_t$  je počet obsluhujících opravářů v okamžiku  $t$ ,  $X_t = 0, 1, 2, 3$ .

Přitom  $\lambda = 24, \mu = \frac{1}{5} = 12, \frac{\lambda}{\mu} = 2, m = 3$

Ad a)  $a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^3 \frac{1}{j!} 2^j} = \left(1 + 2 + \frac{1}{2} 2^2 + \frac{1}{6} 2^3\right)^{-1} = \frac{3}{19} = 0,158$ , tedy 15,8 % pracovní doby opraváři nepracují.

Ad b) Zákazník bude odmítnut, když budou všichni tři opraváři pracovat. Počítáme  $a_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 a_0 = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \frac{3}{19} = 0,211$ , tedy 21,1 % potenciálních zákazníků bude odmítnuto.

Ad c) Vypočítáme zbylé složky stacionárního rozložení  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ :  $a_1 = \frac{\lambda}{\mu} a_0 = \frac{6}{19}$ ,  $a_2 = \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0 = \frac{6}{19}$

Střední hodnota počtu obsluhujících opravářů:  $\sum_{j=0}^3 j a_j = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \frac{6}{19} + \frac{12}{19} + \frac{12}{19} = \frac{30}{19} = 1,579$ .

**18.12. Poznámka:** Stacionární rozložení Erlangova procesu můžeme vypočítat v MATLABu pomocí funkce Erlang.m:

```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% funkce na vypocet stacionarniho rozlozeni Erlangova procesu
% syntaxe: [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% vstupni parametry:
% m ... nejvyssi poradove cislo v mnozine stavu
% lambda ... intenzita vzniku
% lambda ... intenzita zaniku
% vystupni parametr
% a ... vektor stacionarnich pravdepodobnosti
a0=1/sum(((lambda/mi).^0:m).*(1./(factorial(0:m))));
a=((lambda/mi).^1:m).*(1./(factorial(1:m)))*a0;
a=[a0 a];
```

Použijeme tuto funkci pro řešení příkladu 18.11.:

```
m=3;lambda=24;mi=12;
```

```
a=Erlang(m,lambda,mi)
```

Dostaneme výsledek:

```
a =
```

```
0.1579 0.3158 0.3158 0.2105
```

### 18.13. Definice: Definice procesu vzniku

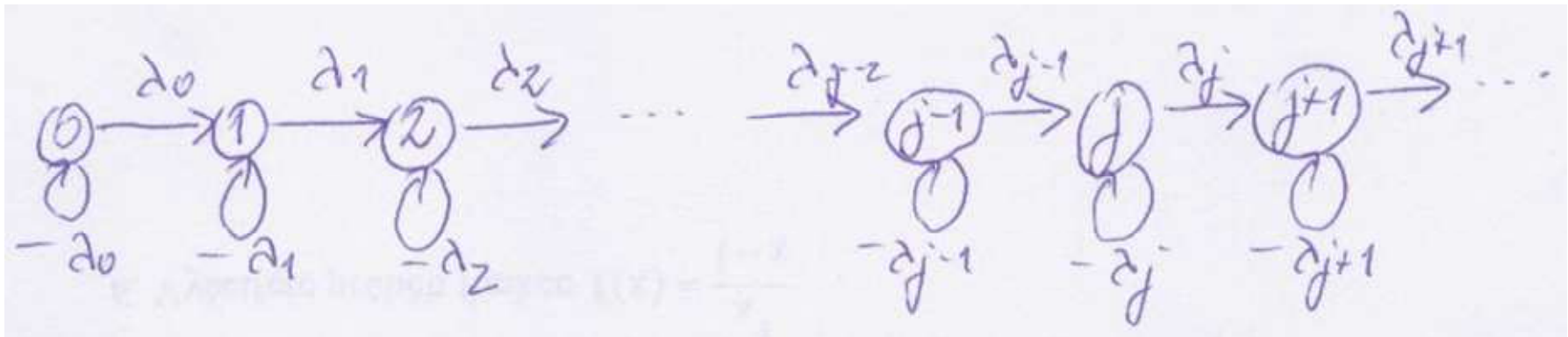
Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ , vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots)$  a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ kde } \lambda_j, j=0,1,2,\dots \text{ jsou konstanty.}$$

Tento řetězec se nazývá **proces vzniku** (resp. množení) s intenzitami  $\lambda_j, j=0,1,2,\dots$

**Vysvětlení:** Proces vzniku popisuje kolísání rozsahu souboru objektů v čase, přičemž objekty mohou do souboru pouze vstupovat a nemohou vystupovat. Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku, kde  $\lambda_j = \lambda, j = 0, 1, 2, \dots$

Přechodový diagram:



**18.14. Věta:** Absolutní pravděpodobnosti a pravděpodobnosti přechodu v procesu vzniku

Necht'  $\{X_t; t \in T\}$  je proces vzniku s intenzitami  $\lambda_j, j=0,1,2,\dots$  Pak platí:

a) Absolutní pravděpodobnosti jsou dány vztahy:

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$p_j(t) = (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0) \cdot \dots \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot \dots \cdot (\lambda_i - \lambda_j)}, j = 1, 2, \dots$$

b) Pravděpodobnosti přechodu jsou dány vztahy:

$$p_{j,j+1} = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} (e^{-\lambda_j t} - e^{-\lambda_{j+1} t}) & \text{pro } \lambda_{j+1} \neq \lambda_j \\ \lambda_j t e^{-\lambda_j t} & \text{pro } \lambda_{j+1} = \lambda_j \end{cases}$$

**Důkaz:**

Ad a) Plyne ze systému evolučních diferenciálních rovnic  $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)$

Ad b) Plyne ze systému Kolmogorovových prospektivních diferenciálních rovnic  $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$

**18.15. Příklad:** Necht' v procesu vzniku jsou intenzity vzniku dány vztahem  $\lambda_j = (N + j)\lambda$ , kde  $N$  je dané přirozené číslo a  $\lambda$  je konstanta. Odvoďte vektor absolutních pravděpodobností.

**Řešení:**

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t} = e^{-N\lambda t}$$

$$\begin{aligned} p_j(t) &= (-1)^j \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i - \lambda_0) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_j)} = \\ &= (-1)^j \lambda^j N(N+1) \cdots (N+j-1) \sum_{i=0}^j \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{((N+i)\lambda - N\lambda) \cdots ((N+i)\lambda - (N+i-1)\lambda)((N+i)\lambda - (N+i+1)\lambda) \cdots ((N+i)\lambda - (N+j)\lambda)} \\ &= (-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-(N+i)\lambda t}}{i\lambda(i-1)\lambda \cdots \lambda(-1)\lambda \cdots (i-j)\lambda} = (-1)^j \lambda^j \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} \frac{1}{\lambda^j} e^{-N\lambda t} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-i\lambda t}}{(-1)^{j-i} i!(j-i)!} = (N+j-1) = \\ &= \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!} e^{-N\lambda t} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (e^{-\lambda t})^i (-1)^i = \binom{N+j-1}{j} e^{-N\lambda t} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-e^{-\lambda t})^i (1)^{j-i} = \binom{N+j-1}{j} e^{-N\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^j \end{aligned}$$

Znamená to, že  $X_t \sim \text{Ps}(N, e^{-\lambda t})$ .

### 18.16. Definice: Definice lineárního procesu vzniku

Nechť v procesu vzniku jsou intenzity vzniku úměrné rozsahu souboru, tj.  $\lambda_j = j\lambda$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\lambda$  je konstanta. Předpokládejme, že na začátku je v souboru jeden objekt. Matice intenzit přechodu má tedy tvar

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \text{ Tento proces se nazývá } \textbf{lineární proces vzniku} \text{ (Yuleův proces).}$$

### 18.17. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v Yuleově procesu

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je Yuleův proces s intenzitou vzniku  $\lambda > 0$ . Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$$p_j(t) = (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-\lambda t}, j = 1, 2, \dots$$

Znamená to, že rozsah souboru v čase  $t$  zmenšený o 1 se řídí rozložením  $Ge(e^{-\lambda t})$ .

**Důkaz:** Plyne z příkladu 18.15., kde položíme  $N = 1$ .

### 18.18. Věta: Střední hodnota a rozptyl v Yuleově procesu

V Yuleově procesu je střední hodnota rozsahu souboru v čase  $t$  rovna  $e^{\lambda t}$  a rozptyl  $e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$ .

**Důkaz:** Plyne z vlastností geometrického rozložení.

(Proces vzniku i Yuleův proces mají v praxi jen malý význam, protože v reálném světě neexistují populace, jejichž jedinci nepodléhají zániku. Nicméně, uvedených procesů je možno použít např. k modelování krátkodobého růstu kolonie bakterií v prostředí s dostatkem živin.)

**18.19. Příklad:** Necht' je dán Yuleův proces s parametrem  $\lambda = 2,34$ .

a) Jaká je pravděpodobnost, že v čase  $t = 0,6$  bude rozsah souboru nejvýše 5?

b) Vypočtete střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru v čase  $t = 0,2$ .

**Řešení:**

$$\text{Ad a) } p_j(t) = (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-\lambda t}, j = 1, 2, \dots$$

$$P(X_{0,6} \leq 5) = \sum_{j=0}^5 p_j(0,6) = \sum_{j=0}^5 (1 - e^{-2,34 \cdot 0,6})^{j-1} e^{-2,34 \cdot 0,6} = 0,7557$$

$$\text{Ad b) } E(X_t) = e^{\lambda t}, D(X_t) = e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)$$

$$E(X_{0,2}) = e^{2,34 \cdot 0,2} = 1,5968, \sqrt{D(X_{0,2})} = \sqrt{e^{2,34 \cdot 0,2} (e^{2,34 \cdot 0,2} - 1)} = 0,9762$$

### 18.20. Definice: Definice procesu zániku

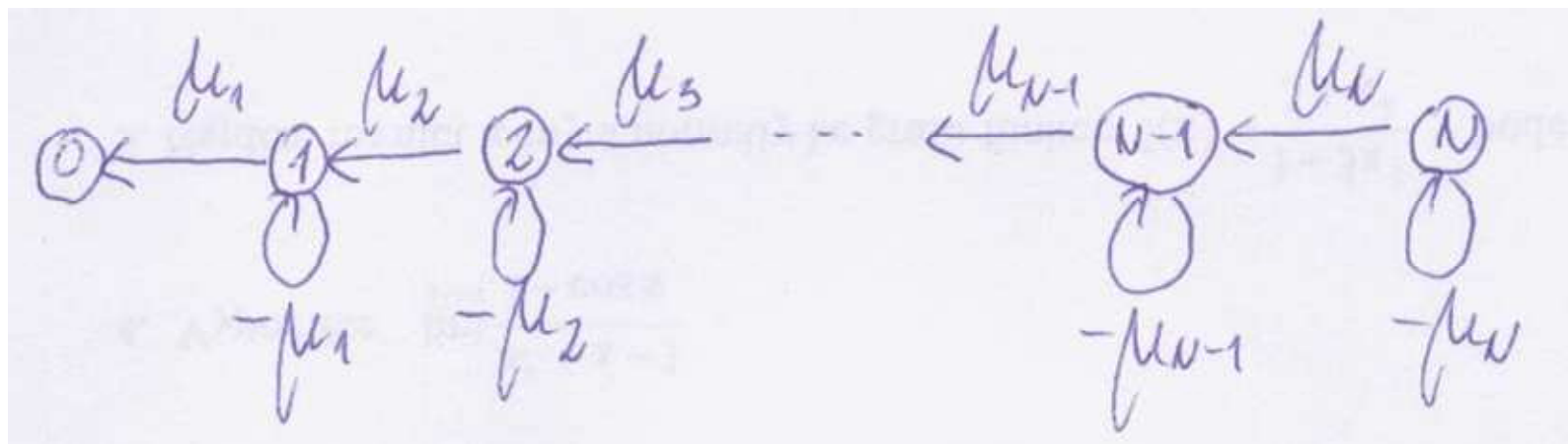
Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , vektor počátečních

pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (0, 0, \dots, 1)$  a matici intenzit přechodu  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix}$ , kde

$\mu_j, j = 1, 2, \dots, N$  jsou konstanty. Tento proces se nazývá **proces zániku**.

**Vysvětlení:** Na počátku má soubor  $N$  objektů. Objekty mohou ze souboru jenom vystupovat, přičemž intenzita výstupu ze souboru rozsahu  $j$  je  $\mu_j, j = 1, 2, \dots, N$ . Proces končí zánikem souboru.

Přechodový diagram:





### 18.21. Definice: Definice lineárního procesu zániku

Nechť v procesu zániku jsou intenzity zániku úměrné rozsahu souboru, tj.  $\mu_j = j\mu$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $\mu$  je konstanta. Matice

intenzit přechodu má tedy tvar:  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N\mu & -N\mu \end{pmatrix}$ . Tento proces se nazývá **lineární proces zániku**.

### 18.22. Věta: Absolutní pravděpodobnosti v lineárním procesu zániku

Nechť  $\{X_t; t \in T\}$  je lineární proces zániku s intenzitou zániku  $\mu > 0$ . Pak absolutní pravděpodobnosti jsou dány vzorcem:

$$p_j(t) = \binom{N}{j} (e^{-\mu t})^j (1 - e^{-\mu t})^{N-j}, j = 0, 1, \dots, N. \text{ Znamená to, že rozsah souboru v čase } t \text{ se řídí rozložením } \text{Bi}(N, e^{-\mu t}).$$

**Důkaz:** Plyne z evolučních diferenciálních rovnic  $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{p}(0) = (0, 0, \dots, 1)$ .

### 18.23. Věta: Střední hodnota a rozptyl v lineárním procesu zániku

V lineárním procesu zániku je střední hodnota rozsahu souboru v čase  $t$  rovna  $Ne^{-\mu t}$  a rozptyl  $Ne^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t})$ .

**Důkaz:** Plyne z vlastností binomického rozložení.