

## 10. Vytvořující funkce a jejich aplikace při analýze homogenních markovských řetězců

### 10.1. Motivace:

Při analýze homogenních markovských řetězců se často pracuje s mocninami přechodu, což je výpočetně náročné. Tomu se lze vyhnout, pokud použijeme vytvořující funkce. Postupujeme tak, že najdeme transformaci daného originálu, učiníme příslušnou operaci a provedeme zpětnou transformaci. Lze dokázat, že mezi originálem a jeho transformací existuje vzájemně jednoznačný vztah. Vytvořující funkce se též nazývají z-transformace a jsou diskretní obdobou Laplaceovy transformace, která se často používá především v technických aplikacích.

### 10.2. Definice: Definice vytvořující funkce reálné posloupnosti

Nechť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel. Jestliže řada  $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  konverguje v nějakém okolí 0, nazveme ji

**vytvořující funkcí posloupnosti**  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ . (Obecněji lze vytvořující funkci zavést i pro posloupnost komplexních čísel, ale tímto případem se zabývat nebudeme.)

### 10.3. Příklad:

Najděte vytvořující funkce k posloupnostem:

- a)  $a_n = 1, n = 0, 1, \dots$
- b)  $a_n = n, n = 0, 1, \dots$
- c)  $a_n = x^n, n = 0, 1, \dots$
- d)  $a_n = nx^n, n = 0, 1, \dots$

**Řešení:**

$$\text{ad a) } G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

$$\text{ad b) } G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}, |z| < 1$$

$$\text{ad c) } G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (xz)^n = \frac{1}{1-xz}, |z| < \frac{1}{|x|}$$

$$\begin{aligned} \text{ad d) } G_a(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n (xz)^n = \text{substituce } t = xz = t \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = t \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \\ &= t \frac{d}{dt} \frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{xz}{(1-xz)^2}, |z| < \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

Výsledky uspořádáme do přehledné tabulky:

$a_n$	$G_a(z)$
1	$1/(1-z)$
n	$z/(1-z)^2$
$x^n$	$1/(1-xz)$
$nx^n$	$xz/(1-xz)^2$

## 10.4. Věta:

Nechť  $G_a(z)$  je vytvořující funkce posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Pak pro  $n = 0, 1, 2, \dots$  platí:  $a_n = \frac{G_a^{(n)}(z)}{n!} \Big|_{z=0}$ .

## Důkaz:

Řadu  $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  budeme derivovat člen po členu a vyjádříme hodnotu této derivace v bodě  $z = 0$ . Přitom uijeme konvenci  $0^0 = 1$ .

$$n = 0: G_a(0) = a_0$$

$$n = 1: \frac{d}{dz} G_a(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \frac{d}{dz} G_a(0) = a_1$$

$$n = 2: \frac{d^2}{dz^2} G_a(z) = \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}, \frac{d^2}{dz^2} G_a(0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_2 = \frac{G_a^{(2)}(0)}{2!}$$

$$n = 3: \frac{d^3}{dz^3} G_a(z) = \frac{d^3}{dz^3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2) z^{n-3}, \frac{d^3}{dz^3} G_a(0) = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_3 = \frac{G_a^{(3)}(0)}{3!}$$

atd.

## 10.5. Příklad:

Je dána vytvořující funkce  $G_a(z) = e^z$ . Najděte odpovídající posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Řešení:

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3!}, \dots, \text{tedy } \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

## 10.6. Definice: Definice konvoluce a konvoluční mocniny

Nechť  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  jsou reálné posloupnosti. Jejich **konvolucí** rozumíme posloupnost  $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ , kde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Zkráceně píšeme  $\{c\} = \{a\} * \{b\}$ .

Konvoluci  $\{a\} * \{a\}$  nazýváme **druhou konvoluční mocninou** posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a značíme ji  $\{a\}^{2*}$ .

Obecně **k-tá konvoluční mocnina** posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  je  $\{a\}^{k*} = \{a\} * \dots * \{a\}$ .

## 10.7. Věta: Věta o vytvořující funkci konvoluce

Jestliže posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  má vytvořující funkci  $G_a(z)$  a posloupnost  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  má vytvořující funkci  $G_b(z)$ , pak posloupnost  $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ , která je konvolucí daných dvou posloupností, má vytvořující funkci  $G_c(z) = G_a(z) \cdot G_b(z)$ . k-tá konvoluční mocnina  $\{a\}^{k*}$  posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  má vytvořující funkci  $G_a(z)^k$ .

### Důkaz:

Součin  $G_a(z) \cdot G_b(z)$  dostaneme vynásobením mocninných řad.

Koeficient u  $z^n$  je v tomto součinu roven  $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ .

### 10.8. Definice: Definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic

a) Nechť  $I$  je nejvýše spočetná indexová množina. Uvažme posloupnost vektorů  $\mathbf{a}_0 = (a_{0i})_{i \in I}$ ,  $\mathbf{a}_1 = (a_{1i})_{i \in I}$ , ...

**Vytvořující funkce posloupnosti vektorů**  $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$  je definována vztahem:  $G_{\mathbf{a}}(z) = (G_{a_i}(z))_{i \in I}$ , kde  $G_{a_i}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni} z^n$ .

Zkráceně píšeme:  $G_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n z^n$ .

b) Nechť  $I, J$  jsou nejvýše spočetná indexové množiny. Uvažme posloupnost matic  $\mathbf{A}_0 = (a_{0ij})_{i \in I, j \in J}$ ,  $\mathbf{A}_1 = (a_{1ij})_{i \in I, j \in J}$ , ...

**Vytvořující funkce posloupnosti matic**  $\{\mathbf{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$  je definována vztahem:  $G_{\mathbf{A}}(z) = (G_{a_{ij}}(z))_{i \in I, j \in J}$ , kde  $G_{a_{ij}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nij} z^n$ .

Zkráceně píšeme:

$$G_{\mathbf{A}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n z^n.$$

(Vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic vznikne tak, že získáme vytvořující funkce posloupnosti odpovídajících složek a vzniklé vytvořující funkce uspořádáme do vektoru či do matice.)

### 10.9. Věta:

 Věta o vytvořující funkci posloupnosti matic přechodu po n krocích

Nechť  $\{X_n; n \in N_0\}$  je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu  $\mathbf{P}$ . Pak vytvořující funkce posloupnosti matic  $\{\mathbf{P}^n\}_{n=0}^{\infty}$  má tvar:  $G_p(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ .

**Důkaz:**  $G_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z\mathbf{P})^n = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ .

### 10.10. Věta:

 Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů absolutních pravděpodobností po n krocích

Nechť homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in N_0\}$  má maticí přechodu  $\mathbf{P}$  a vektor počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0)$ . Pak vytvořující funkce posloupnosti vektorů absolutních pravděpodobností  $\{\mathbf{p}(n)\}_{n=0}^{\infty}$  má tvar:  $G_p(z) = \mathbf{p}(0)(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ .

**Důkaz:** Podle definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů platí:  $G_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n)z^n$ . Ovšem  $\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n) \cdot \mathbf{P}$ , tedy

vytvořující funkce posloupnosti vektorů  $\{\mathbf{p}(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$  má tvar:  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1)z^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n)z^n \right) \cdot \mathbf{P} = G_p(z) \cdot \mathbf{P}$ . Upravíme levou stranu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1)z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n+1)z^{n+1} = |k = n+1| = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{p}(k)z^k = \frac{1}{z} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{p}(k)z^k - \mathbf{p}(0) \right) = \frac{1}{z} (G_p(z) - \mathbf{p}(0))$$

pravé strany:

$$\frac{1}{z} (G_p(z) - \mathbf{p}(0)) = G_p(z) \cdot \mathbf{P}. \text{ Po úpravě: } G_p(z) = \mathbf{p}(0)(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}.$$

(Z tohoto vztahu je zřejmé, že při výpočtu vektoru absolutních pravděpodobností se vyhneme umocňování matice  $\mathbf{P}$ , což znamená úsporu numerických výpočtů. Na druhou stranu však musíme počítat inverzní matici  $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ .)

**10.11. Příklad:** Necht' homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  s množinou stavů

$J = \{1, 2\}$  popisuje chování výrobní linky, která se v  $n$ -tém období nachází buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2).

Dlouhodobým sledováním byla zjištěna matice přechodu:  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$ . Pomocí vytvořujících funkcí najděte matici

přechodu po  $n$  krocích  $\mathbf{P}^n$  a vektor absolutních pravděpodobností po  $n$  krocích  $\mathbf{p}(n)$ .

**Řešení:** Z věty 10.9. plyne, že  $G_{\mathbf{p}}(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & \frac{3z}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{4} & 1 - \frac{3z}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I} - z\mathbf{P}) = \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3z}{4}\right) - \frac{z^2}{8} = \dots = (1 - z) \cdot \left(1 - \frac{z}{4}\right)$$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1 - z)\left(1 - \frac{z}{4}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{4} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & 1 - \frac{z}{2} \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{1 - z} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{z}{4}} \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(Upozornění: Prvky matice  $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$  byly získány rozkladem na parciální zlomky.

$$\text{Např. prvek } a_{11} = \frac{1 - \frac{3z}{4}}{(1 - z)\left(1 - \frac{z}{4}\right)} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{1 - \frac{z}{4}} = \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{1 - \frac{z}{4}}. \text{ Podobně získáme další prvky.)}$$

$\frac{1}{1 - z}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = 1, n = 0, 1, 2, \dots$

$\frac{1}{1 - \frac{z}{4}}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Matici  $\mathbf{P}^n$  lze tedy psát ve tvaru:  $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ .

Interpretace: První matice je konstantní a nezávisí na počtu kroků. Lze snadno ověřit, že je to limitní matice přechodu  $\mathbf{A}$ .

Druhá matice násobená koeficientem  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  představuje přechodnou složku daného homogenního markovského řetězce.

Pro vektor absolutních pravděpodobností platí:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n = \mathbf{p}(0) \left[ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \right].$$

Druhý sčítanec v závorce pro  $n \rightarrow \infty$  konverguje k 0, tedy lze psát  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (1,0) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ (0,1) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$ .

Pomocí vytvořujících funkcí jsme tedy dostali vektor limitních pravděpodobností  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .



## 10.12. Poznámka

Při řešení úloh spojených s aplikací vytvořujících funkcí na dvoustavové markovské řetězce se setkáváme se zlomky dvou typů:

1. typ má tvar  $\frac{1 - cz}{(1 - az)(1 - bz)}$  a 2. typ má tvar  $\frac{cz}{(1 - az)(1 - bz)}$ . Oba tyto zlomky musíme rozložit na parciální zlomky. Přitom můžeme využít následující vzorce:

$$\frac{1 - cz}{(1 - az)(1 - bz)} = \frac{c - a}{b - a} \frac{b - c}{1 - az} + \frac{b - a}{b - a} \frac{b - c}{1 - bz},$$

$$\frac{cz}{(1 - az)(1 - bz)} = \frac{c}{a - b} \frac{a - b}{1 - az} + \frac{-c}{a - b} \frac{a - b}{1 - bz},$$

## 11. Markovské řetězce s oceněním přechodů

### 11.1. Definice: Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť  $\{X_n; n \in N_0\}$  je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů  $J$ , v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  je přiřazeno ocenění  $r_{ij}$  (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z  $i$  do  $j$ ). Tato ocenění uspořádáme do matice  $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in J}$ , která se nazývá **matice výnosů**. Řetězec  $\{X_n; n \in N_0\}$  se pak nazývá **markovský řetězec s oceněním přechodů**.

### 11.2. Věta: Rekurentní vztah pro střední hodnotu celkového výnosu po $n$ krocích

Nechť  $\{X_n; n \in N_0\}$  je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu  $\mathbf{P}$  a matici ocenění  $\mathbf{R}$ . Označme  $v_i(n)$  střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po  $n$  krocích, když řetězec vychází ze stavu  $i$ . Dále označme

$q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$  střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu  $i$ . Pak pro  $\forall i \in J$  a  $n = 1, 2, 3, \dots$  platí rekurentní vztah:

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1), \text{ přičemž } v_i(0) = 0.$$

V maticové formě:  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$ .

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

**11.3. Příklad:** Sledujeme provoz výrobní linky, která se může nacházet ve dvou stavech – v provozu (stav 0) nebo

v opravě (stav 1). Dlouhodobým sledováním byla stanovena matice přechodu:  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ . Jednotlivým přechodům jsou

přiřazena určitá ocenění (tj. výnosy nebo ztráty) prostřednictvím matice výnosů  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$ . Pro  $i = 0, 1$  položíme

$v_i(0) = 0$ . Pro oba stavy vypočtete střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za  $n = 1, 2, \dots, 6$  období.

**Řešení:** Nejprve vypočteme střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu 0 resp. 1. Přitom

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$q_0 = \sum_{j=0}^1 p_{0j} r_{0j} = p_{00} r_{00} + p_{01} r_{01} = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 4 = 7, \quad q_1 = \sum_{j=0}^1 p_{1j} r_{1j} = p_{10} r_{10} + p_{11} r_{11} = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot (-5) = -1, \quad \text{tj. } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nyní počítáme } \mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1,2 \end{pmatrix} \text{ atd.}$$

Tabulka středních hodnot celkových výnosů pro  $n = 1, 2, \dots, 6$ :

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272
$v_0(n+1) - v_0(n)$	x	3	2,6	2,56	2,556	2,5556
$v_1(n+1) - v_1(n)$	x	2,2	2,52	2,552	2,5558	2,55492
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,8	8,88	8,888	8,8888	8,88888

Vidíme, že s rostoucím  $n$  se rozdíl  $v_0(n) - v_1(n)$  blíží konstantě  $8,8$ . Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o  $8,8$  jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě. Dále můžeme pozorovat, že s rostoucím  $n$  se rozdíl  $v_1(n+1) - v_1(n)$  blíží konstantě  $2,5$ . To souvisí s limitními vlastnostmi řetězce.

**11.4. Poznámka:** Je-li  $\{X_n; n \in N_0\}$  homogenní markovský řetězec s množinou stavů  $J = \{0, 1, \dots, m\}$  s oceněním přechodů nerozložitelný, pak existuje jeho stacionární rozložení  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$  a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_i(n+1) - v_i(n)) = \sum_{j=0}^m a_j q_j = g.$$

Konstanta  $g$  se nazývá **zisk řetězce**. V př. 10.3.  $\mathbf{a} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$ ,  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ , tedy  $g = \frac{4}{9} \cdot 7 - \frac{5}{9} = 2, \bar{5}$ .

**11.5. Věta:** Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů středních hodnot celkových výnosů po  $n$  krocích

Pro vytvořující funkci  $G_v(z)$  posloupnosti vektorů  $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$  platí:  $G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$ .

**Důkaz:** Podle definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů platí:  $G_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n)z^n$ . Protože platí rekurentní vztah

$v(n+1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}v(n)$ , lze vytvořující funkci posloupnosti vektorů  $\{v(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$  psát ve tvaru:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(n+1)z^n = \mathbf{q} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \mathbf{P} \sum_{n=0}^{\infty} v(n)z^n = \mathbf{q} \frac{1}{1-z} + G_v(z) \cdot \mathbf{P}. \text{ Upravíme levou stranu:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(n+1)z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} v(n+1)z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} v(k)z^k = \frac{1}{z} \left( \sum_{k=0}^{\infty} v(k)z^k - v(0) \right) = \frac{1}{z} G_v(z).$$

Odtud dostaneme porovnáním levé a pravé strany:

$$\frac{1}{z} G_v(z) = \frac{1}{1-z} \mathbf{q} + G_v(z) \cdot \mathbf{P}. \text{ Po úpravě: } G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}.$$

**11.6. Příklad:** Pro zadání z příkladu 11.3. najděte vyjádření pro vektor  $\mathbf{v}(n)$  pomocí vytvořujících funkcí.

**Řešení:** Z věty 11.5. plyne, že  $G_{\mathbf{v}}(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/2 & z/2 \\ 2z/5 & 3z/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z/2 & -z/2 \\ -2z/5 & 1-3z/5 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{I} - z\mathbf{P}) = \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3z}{5}\right) - \frac{z^2}{5} = \dots = (1-z) \cdot \left(1 - \frac{z}{10}\right)$$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\left(1 - \frac{z}{10}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{5} & \frac{z}{2} \\ \frac{2z}{5} & 1 - \frac{z}{2} \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{z}{10}} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_{\mathbf{v}}(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} = \left[ \frac{z}{(1-z)^2} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z)\left(1 - \frac{z}{10}\right)} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{z}{(1-z)\left(1 - \frac{z}{10}\right)} = \dots = \frac{\frac{10}{9}}{1-z} + \frac{-\frac{10}{9}}{1 - \frac{z}{10}}$$

$\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{1-z}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = \frac{10}{9} \cdot 1^n = \frac{10}{9}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$-\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{10}}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = -\frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Celkem:

$$\mathbf{v}(n) = \left[ n \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{10}{9} (1 - 0,1^n) \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23n}{9} \\ \frac{23n}{9} \end{pmatrix} + (1 - 0,1^n) \begin{pmatrix} \frac{400}{81} \\ -\frac{320}{81} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tedy } v_0(n) = \frac{23n}{9} + \frac{400}{81} (1 - 0,1^n), v_1(n) = \frac{23n}{9} - \frac{320}{81} (1 - 0,1^n).$$

Pro dostatečně velká  $n$  se výraz  $0,1^n$  bude blížit nule. Když ho zanedbáme, získáme přibližné vyjádření:  
 $v_0(n) \approx 2,5555 n + 4,9383$ ,  $v_1(n) \approx 2,5555 n - 3,9506$ .

**11.7. Věta:** Přibližné vyjádření vektoru středních hodnot celkových výnosů po  $n$  krocích pomocí limitní matice přechodu

Nechť  $\mathbf{A}$  je limitní matice přechodu daného markovského řetězce s oceněním přechodů. Pak pro dostatečně velká  $n$  platí:  $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ .

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

**11.8. Příklad:** Pro zadání z příkladu 11.3. najděte přibližné vyjádření pro vektor  $\mathbf{v}(n)$ .

**Řešení:** Použijeme vzorec  $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ . Nejprve najdeme limitní matici  $\mathbf{A}$ , jejíž všechny řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru matice  $\mathbf{P}$ . Řešením systému  $\mathbf{a} = \mathbf{aP}$ ,  $a_1 + a_2 = 1$  získáme vektor  $\mathbf{a} = (4/9 \ 5/9)$ , tudíž

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dále } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 1,0617 & -0,0617 \\ -0,0494 & 1,0494 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$$\mathbf{v}(n) \approx (n-1) \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,0617 & -0,0617 \\ -0,0494 & 1,0494 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2,5n + 4,9383 \\ 2,5n - 3,9506 \end{pmatrix}.$$

Tabulka:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7,4938	10,0494	12,609	15,1605	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1,3951	1,1605	3,716	6,2716	8,8272	11,3827

Pro porovnání uvedeme tabulku získanou pomocí rekurentního vzorce:

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	10	12,6	15,16	17,716	20,2716
$v_1(n)$	-1	1,2	3,72	6,272	8,8278	11,38272



## 11.9. Poznámka: Vektor středních hodnot celkových výnosů po jednom až n obdobích lze získat pomocí funkce

vynos.m:

```
function a = vynos(P,R,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% syntaxe: function a=vynos(P,R,n);
% funkce pocita:
%     vektory strednich hodnot celkovych vynosu po jednom az po n obdobich
%     znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlivé stavy
%     v závislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu, R - matice vynosu, n - pocet obdobi
disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupcove vektory strednich hodnot celkovych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp('pozn: na prvni radku hodnoty n')

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
```

```

legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))=[['stav '],num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);
%graf celkovych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end

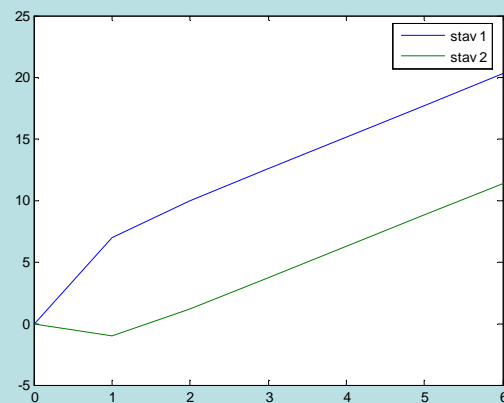
```

Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 10.3. pro jedno až 6 období, dostaneme výsledky:  
sloupce vektory středních hodnot celkových výnosu po n krocích

0	1	2	3	4	5	6
0	7	10	12.6	15.16	17.716	20.2716
0	-1	1.2	3.72	6.272	8.8272	11.3827

pozn: na prvním radku hodnoty n

Graf celkových výnosů:



### 11.10. Definice: Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu  $i$  v čase  $n$  do stavu  $j$  v čase  $n+1$  oceněn číslem  $\beta^n r_{ij}$ , kde číslo  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) je tzv. diskontní faktor. Uvedený řetězec se pak nazývá **markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů**.

**Vysvětlení:** Diskontní faktor snižuje hodnotu budoucího výnosu. Vystupuje v roli odúročitele, může být  $1/(1+i)$ , kde  $i$  je úročitel. Může také vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat. Jeho užití bude účelné tam, kde se může očekávat, že proces skončí, ale neví se, kdy přesně k tomu dojde.

### 11.11. Věta: Rekurentní vztah pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů po $n$ krocích.

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1), \text{ přičemž } \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$

**Důkaz:** Nebudeme provádět.

### 11.12. Věta: Věta o vytvořující funkci posloupnosti vektorů středních hodnot celkových výnosů po $n$ krocích

Pro vytvořující funkci posloupnosti vektorů  $\{\mathbf{v}(n)\}_{n=1}^{\infty}$  v markovském řetězci s diskontovaným oceněním přechodů platí:

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - \beta z \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}.$$

**Důkaz:** Podobně jako důkaz věty 11.5.

**11.13. Příklad:** V příkladu 11.3. předpokládejme, že diskontní faktor  $\beta = 0,5$  značí pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.

a) Pomocí rekurentního vztahu najděte vektor  $\mathbf{v}(n)$  středních hodnot celkových výnosů pro  $n = 1, 2, \dots, 6$  a stanovte limitní hodnotu tohoto vektoru.

b) Pomocí vytvořujících funkcí najděte vyjádření pro vektor  $\mathbf{v}(n)$ .

**Řešení:**

$$\text{Ad a) } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \beta = 0,5, \mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1).$$

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 0,1 \end{pmatrix} \text{ atd.}$$

Dále uvedeme tabulku středních hodnot celkových výnosů pro  $n = 1, 2, \dots, 6$ .

n	1	2	3	4	5	6
$v_0(n)$	7	8,5	9,15	9,47	9,6297	9,7096
$v_1(n)$	-1	0,1	0,73	0,1049	1,2087	1,2886
$v_0(n) - v_1(n)$	8	8,4	8,42	8,3651	8,4210	8,4210

Nyní vypočteme limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů podle vzorce:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$ .

$$\mathbf{I} - \beta \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0,5 \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{I} - \beta \mathbf{P}| = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{10} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{19}{40},$$

$$(\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} = \frac{40}{19} \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{28}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{8}{19} & \frac{30}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{186}{19} \\ \frac{26}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,7895 \\ 1,3684 \end{pmatrix}$$

Rozdíl složek limitního vektoru:  $9,7895 - 1,3684 = 8,4219$ .

Znamená to, že když je na počátku sledování linka v provozu, tak se po dostatečně dlouhé době získá výnos vyšší o 8,4219 jednotek než v případě, kdy je linka na počátku v opravě.

Ad b) Z věty 11.12. plyne, že  $G_v(z) = \frac{z}{1-z} (\mathbf{I} - \beta z \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z/4 & z/4 \\ z/5 & 3z/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z/4 & -z/4 \\ -z/5 & 1-3z/10 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P}) = \left(1 - \frac{z}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{3z}{10}\right) - \frac{z^2}{20} = \dots = \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{20}\right)$$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right) \left(1 - \frac{z}{20}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3z}{10} & \frac{z}{4} \\ \frac{z}{5} & 1 - \frac{z}{4} \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{z}{20}} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} z \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{q} = \left[ \frac{z}{(1-z) \left( 1 - \frac{z}{2} \right)} \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z) \left( 1 - \frac{z}{20} \right)} \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right]$$

$$\frac{z}{(1-z) \left( 1 - \frac{z}{2} \right)} = \dots = \frac{2}{1-z} + \frac{-2}{1 - \frac{z}{2}}$$

$2 \cdot \frac{1}{1-z}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = 2, n = 0, 1, 2, \dots$

$-2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = -2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{z}{(1-z) \left( 1 - \frac{z}{20} \right)} = \dots = \frac{20}{1-z} + \frac{-20}{1 - \frac{z}{20}}$$

$\frac{20}{19} \cdot \frac{1}{1-z}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = \frac{20}{19} \cdot 1^n = \frac{20}{19}, n = 0, 1, 2, \dots$

$-\frac{20}{19} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{20}}$  je vytvořující funkce posloupnosti  $a_n = -\frac{20}{19} \cdot \left( \frac{1}{20} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Celkem:

$$v(n) = \left[ 2 \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + \frac{20}{19} (1 - 0,05^n) \begin{pmatrix} 5/9 & -5/9 \\ -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 186 \\ 19 \\ 26 \\ 19 \end{pmatrix} + 0,5^n \begin{pmatrix} -46 \\ 9 \\ 46 \\ -9 \end{pmatrix} + 0,05^n \begin{pmatrix} -800 \\ 171 \\ 640 \\ 171 \end{pmatrix}$$

Tedy  $v_0(n) = 9,7895 - 0,5^n \cdot 5, \bar{1} - 0,05^n \cdot 4,6784, v_1(n) = 1,3684 - 0,5^n \cdot 5, \bar{1} + 0,05^n \cdot 3,7427.$

**11. 14. Poznámka:** Vektor středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom až n obdobích a limitní hodnotu tohoto vektoru lze získat pomocí funkce `diskont.m`:

```
function a=diskont(P,R,beta,n);
% Autor: Stanislav Tvrz
% function a=diskont(P,R,beta,n);
% funkce pocita:
%     vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po jednom az po n obdobich
%     limitni vektor strednich hodnot diskontovanych vynosu
%     znazorni prubehy vektoru strednich hodnot pro jednotlivé stavy
%     v zavislosti na poctu obdobi
% vstupni parametry:
% P - matice prechodu
% R - matice vynosu
% beta - diskontni faktor
% n - pocet obdobi
%clc;

disp('kontrola - matice prechodu P')
P
disp(' ')
disp('kontrola - matice vynosu R')
R
disp(' ')

vel=size(P);
v=zeros(vel(1),n+1);
```

```

q=diag(P*R');
for i=2:n+1
    v(:,i)=q+beta*P*v(:,i-1);
end
cas=0:n;
vysledek=[cas;v];
disp('sloupce vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich')
disp(num2str(vysledek))
disp(['pri hodnote diskontniho faktoru beta = ',num2str(beta)])
disp('pozn: na prvni radku hodnoty n')
disp(' ')
disp('limitni vektor v(n)')
v_n=inv(eye(vel(1))-beta*P)*q;
disp(num2str(v_n))

%generovani popisu stavu
max_ind=size(num2str(vel(1)),2);
legenda=zeros(vel(1),5+max_ind);
for i=1:vel(1)
    legenda(i,1:5+size(num2str(i),2))= ['stav ',num2str(i)];
end
legenda=char(legenda);

%graf diskontovanych vynosu
figure
plot([0:n],v);
legend(legenda)
end

```



Použijeme-li tuto funkci pro řešení příkladu 11.13. a) pro jedno až 6 období, dostaneme tyto výsledky:

sloupcove vektory strednich hodnot diskontovanych vynosu po n krocich

0	1	2	3	4	5	6
0	7	8.5	9.15	9.47	9.6297	9.7096
0	-1	0.1	0.73	1.049	1.2087	1.2886

pri hodnote diskontniho faktoru  $\beta = 0.5$

pozn: na prvni radku hodnoty n

limitni vektor  $v(n)$

9.7895

1.3684

Graf diskontovaných výnosů:

