Cvičení 2 – Úlohy na HMŘ, využití zákona evoluce

Příklad 1.: Model dvoustavového systému
Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0,1}. Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (\gamma, 1-\gamma)$. Najděte simultánní pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru (X_0, X_1, X_2).

Výsledek:

x_0	x_1	x_2	$\pi(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	$\gamma(1-\alpha)^2$
0	0	1	$\gamma(1-\alpha)\alpha$
0	1	0	$\gamma\alpha\beta$
1	0	0	$(1-\gamma)\beta(1-\alpha)$
0	1	1	$\gamma\alpha(1-\beta)$
1	0	1	$(1-\gamma)\beta\alpha$
1	1	0	$(1-\gamma)(1-\beta)\beta$
1	1	1	$(1-\gamma)(1-\beta)^2$

Příklad 2.: Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je HMŘ s množinou stavů J = {0,1}. Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Jaká je pravděpodobnost, že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1), jestliže jeho počáteční stav zvolíme
a) podle výsledku hodu mincí
b) podle výsledku náhodného pokusu, v němž je stavu 0 dosaženo s pravděpodobností 1/3 a stavu 1 s pravděpodobností 2/3.

Výsledek:
ad a) $\mathbf{p}(1) = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right) = (0{,}4167 \quad 0{,}5833)$, ad b) $\mathbf{p}(1) = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right) = (0{,}4444 \quad 0{,}5556)$

Návod na řešení v MATLABu:
Ad a) p0=[0.5 0.5]; P=[1/3 2/3;1/2 1/2]; p1=p0*P
Ad b) p0=[1/3 2/3];p1=p0*P

Příklad 3.: (Model mužských zaměstnání) Předpokládáme rozdělení mužských zaměstnání do tří tříd: vědečtí pracovníci, kvalifikovaní pracovníci, nekvalifikovaní pracovníci. Je známo, že 80 % synů vědeckých pracovníků se stane vědeckými pracovníky, 10 % kvalifikovanými a 10 % nekvalifikovanými pracovníky. Ze synů kvalifikovaných pracovníků 60 % bude kvalifikovanými pracovníky, 20 % vědeckými a 20 % nekvalifikovanými pracovníky. Konečně v případě nekvalifikovaných pracovníků 50 % synů bude nekvalifikovanými pracovníky, 25 % kvalifikovanými a 25 % vědeckými pracovníky. Předpokládejme, že každý muž má syna. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Výsledek: 0,375.

Návod na řešení v MATLABu:
p0=[0 0 1]; P=[0.8 0.1 0.1;0.2 0.6 0.2;0.25 0.25 0.5];p2=p0*P^2
Zajímá nás 1. složka vektoru p2.

Příklad 4.: V příkladu 3 nyní předpokládejme, že muž má syna jen s pravděpodobností 0,8. Zaveďte nyní homogenní markovský řetězec se čtyřmi stavy – první tři jsou stejné jako v předešlé úloze a čtvrtý odpovídá případu, kdy muž nemá syna a proces končí. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?
Výsledek: 0,24
Návod na řešení v MATLABu:
p0=[0 0 1 0]; P=[0.64 0.08 0.08 0.2;0.16 0.48 0.16 0.2;0.2 0.2 0.4 0.2;0 0 0 1];p2=p0*P^2.
Zajímá nás 1. složka vektoru p2.

Příklad 5.: Uvažme podnik, v němž jsou tři oddělené provozy – provoz 1, provoz 2 a provoz 3. V těchto provozech pracují dělníci vykonávající jednostranné úkony. Aby nedocházelo k otupění zaměstnanců, tak se dělníci na konci měsíce v jednotlivých provozech náhodně střídají. Existuje samozřejmě i jistá šance, že si dělník najde jiné zaměstnání a podnik opustí. Předpokládáme, že v takovém případě už se do podniku nevrátí. Dlouhodobým pozorováním pohybu zaměstnanců v tomto podniku byly zjištěny následující skutečnosti:
Dělníci z provozu 1 na konci měsíce s pravděpodobností 1/4 zůstávají v provozu 1, s pravděpodobností 1/4 přecházejí do provozu 2 a s pravděpodobností 1/2 přecházejí do provozu 3.
Dělníci v provozu 2 na konci měsíce s pravděpodobností 1/4 zůstávají v provozu 2, s pravděpodobností 1/4 přecházejí do provozu 1 a s pravděpodobností 1/2 přecházejí do provozu 3.
Jelikož práce v provozu 3 je velmi namáhavá, tak po měsíci dělníci z tohoto provozu odcházejí se stejnou pravděpodobností buď do provozu 1 nebo do provozu 2.
Dále bylo zjištěno, že zaměstnanci z tohoto podniku odcházejí pouze z provozu 3, a to s pravděpodobností 1/9.
a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Vypočtěte pravděpodobnost, že zaměstnanec, který na počátku sledování pracoval v provozu 1, ve čtvrtém měsíci sledování již v podniku pracovat nebude.
Výsledek: 0,0833.
Návod na řešení v MATLABu:
p0=[1 0 0 0]; P=[1/4 1/4 1/2 0;01/4 1/4 1/2 0;4/9 4/9 0 1/9;0 0 0 1];p3=p0*P^3
Zajímá nás 4. složka vektoru p3.

Příklad 6.: (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2. Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtěte vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.
Výsledek: $\mathbf{p}(2) = (0{,}28,\ 0{,}48,\ 0{,}24)$.
Návod na řešení v MATLABu:
p0=[1 0 0]; P=[0.4 0.4 0.2;0.2 0.6 0.2;0.2 0.4 0.4];p2=p0*P^2

Příklad 6.: V příkladu 5 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je 1/4 průměrný 1/2 a neúrodný 1/4. Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?
Výsledek: $\mathbf{p}(1) = (0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}25)$
Návod na řešení v MATLABu:
p0=[1/4 1/2 1/4]; P=[0.4 0.4 0.2;0.2 0.6 0.2;0.2 0.4 0.4];p1=p0*P