Cvičení 7 – Vytvořující funkce. HMŘ s oceněním přechodů

Příklad 1.: Nechť HMŘ má matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pomocí vytvořujících funkcí najděte tvar matice přechodu po n krocích.
Výsledek: $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Příklad 2.: Výrobní linka se může nacházet v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Pokud se linka porouchá, pak již nemůže být opravena. Linka zůstává v 60 % případů v provozu. Předpokládejme, že na počátku sledování je linka v provozu. Pomocí vytvořujících funkcí najděte pravděpodobnost, že za n období bude linka v provozu.
Výsledek: Po n obdobích bude linka v provozu s pravděpodobností $0{,}6^n$.

Příklad 3.: Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.
Výsledek: Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li řidič z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

Návod na řešení v MATLABu:
Zadáme matice **P**, **R** a vektor **v**0:
P=[0.7 0.3;0.5 0.5]; R=[100 1000;1000 100];v0=[0 0]‘;
Vypočteme vektor q = diag(P*R’);
Vypočteme vektor v1=q+P*v0
Vypočteme vektor v2=q+P*v1

Upozornění: Je také možné použít funkci vynos.m, která pomocí rekurentní metody počítá:
- vektory středních hodnot celkových výnosů po jednom období až po n obdobích,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Zadáme matice P, R a počet období n:
P=[0.7 0.3;0.5 0.5]; R=[100 1000;1000 100]; n=2;
Zavoláme funkci vynos:
vynos(P,R,n)

Pro větší počet období lze požít funkci vynosaprx.m, která používá aproximační vzorec pro výpočet středních hodnot celkových výnosů po n obdobích. V našem případě (n = 2) dostaneme nevyhovující výsledky:
$v_1 = \begin{pmatrix} 353{,}1 \\ 578{,}1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 796{,}6 \\ 1015{,}6 \end{pmatrix}$

Příklad 4.: Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 0) nebo jako neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném

období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období. Dlouhodobým sledováním prodeje byly zjištěny tyto poznatky: pokud byl výrobek v jednom období úspěšný, pak v následujícím období bude úspěšný s pravděpodobností 0,8. Jestliže byl výrobek v jednom období neúspěšný, tak v následujícím období zůstane neúspěšný s pravděpodobností 0,7. Zůstává-li výrobek úspěšný, je výnos 10 jednotek. Změní-li se z úspěšného na neúspěšný, klesne výnos na 5 jednotek. Při změně z neúspěšného na úspěšný je výnos 10 jednotek a zůstává-li výrobek neúspěšný, dojde ke ztrátě 20 jednotek.
a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a matici výnosů.
b) Pomocí rekurentního vzorce $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(n-1)$ vypočtěte pro oba stavy střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n období, n = 1, 2, ..., 6.
c) Pomocí aproximačního vzorce $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ najděte přibližné vyjádření pro vektor středních hodnot celkových výnosů $\mathbf{v}(n)$. Pro n = 1, 2, ..., 6 porovnejte výsledky s přesným vyjádřením získaným v bodě (b).

Výsledek: ad a) Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v n-tém období je výrobek úspěšný (resp. neúspěšný). Matice
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

ad b) Výpočet pomocí rekurentního vzorce:
$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 19 \\ -18{,}5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 20{,}5 \\ -18{,}25 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 21{,}75 \\ -17{,}625 \end{pmatrix}$$

ad c) Výpočet pomocí aproximačního vzorce:
$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -21 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21 \\ -19 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že aproximační vzorec je pro malá n nevhodný.

Návod na řešení v MATLABu:
Zadáme matice **P**, **R** a a počet období n:
P=[0.8 0.2;0.3 0.7]; R=[10 5;10 -20];n=6;
ad b) Zavoláme funkci vynos:
vynos(P,R,n)
ad c) Zavoláme funkci vynosaprx:
V=vynosaprx(P,R,n)

Příklad 5.: Výrobce nealkoholických nápojů hodlá nabídnout síti potravinových obchodů nápoj D s novou příchutí. Je si vědom konkurence tří současných oblíbených typů nealkoholických nápojů A, B, C, ale věří, že zákazníci ocení příznivé složení a dobrou chuť nápoje D a budou jej preferovat, jakmile ho ochutnají. Na základě zkušeností s obdobnými produkty byla sestavena matice přechodu (časovým krokem je 1 týden):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}30 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Výnos nebo ztráta, které plynou z jednotlivých přechodů, jsou uvedeny v matici výnosů:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diskontní faktor je 0,5. Pro prvních 10 týdnů vypočtěte vektor středních hodnot celkových výnosů. Zjistěte také limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů.

Výsledek:

	v(0)	**v**(1)	**v**(2)	**v**(3)	**v**(4)	…	**v**(9)	**v**(10)
A	0	-1,050	-1,331	-1,360	-1,331	…	-1,255	-1,253
B	0	-1,150	-1,496	-1,574	-1,574	…	-1,525	-1,523
C	0	-0,400	-0,133	0,110	0,255	…	0,402	0,405
D	0	2,950	4,139	4,635	4,849	…	5,023	5,025

Limitní vektoru **v**(n): $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n)$ = (-1,2506, -1,5216, 0,4069, 5,0276)

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice **P**, **R**, vektor **v**0 a diskontní faktor beta:

P=[0.65 0.1 0.15 0.1;0.1 0.75 0.05 0.1;0.05 0.05 0.6 0.3;0.05 0.05 0.05 0.85];
R=[-2 -1 -1 5;-1 -2 -1 5;-1 -1 -2 3;-3 -3 -3 4];
v0=[0 0 0 0]‘; beta=0.5;
Vypočteme vektor q = diag(P*R’);
vektor v1=q+beta*P*v0
vektor v2=q+beta*P*v1
atd. až
vektor v10=q+beta*P*v9
Výpočet limitního vektoru **v**(n):
Zadáme jednotkovou matici I = eye(4);
limitni_v=(I-beta*P)^(-1)*q

Je možné použít funkci diskont.m, která

- počítá vektory středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom až po n obdobích;
- počítá limitní vektor středních hodnot diskontovaných výnosů;
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Zadáme matice **P**, **R**, diskontní faktor beta a počet období n:

P=[0.65 0.1 0.15 0.1;0.1 0.75 0.05 0.1;0.05 0.05 0.6 0.3;0.05 0.05 0.05 0.85];
R=[-2 -1 -1 5;-1 -2 -1 5;-1 -1 -2 3;-3 -3 -3 4];
beta=0.5; n=10;
Zavoláme funkci diskont:
diskont(P,R,beta,n)