

Příklady k procvičení 1

2. října 2017

1 Rovnice se separovatelnými proměnnými

Řešte následující diferenciální rovnice, nejprve naleznete obecné řešení, a poté řešení vyhovující počáteční podmínce. Vždy je y závisle proměnná a x nezávisle proměnná.

Příklad 1.

$$y' = 6y^2x \quad y(1) = \frac{1}{25}$$

Řešení 1. Obecné řešení: $y = \frac{c}{1-3cx^2}$, $c \in \mathbb{R}$

Partikulární řešení: $y = \frac{1}{28-3x^2}$

Příklad 2.

$$\frac{\sin y}{\cos x} dy = -x dx \quad y(0) = \pi$$

Řešení 2. Obecné řešení: $\cos y = x \sin x + \cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$

Partikulární řešení: $\cos y = x \sin x + \cos x - 2$

Příklad 3.

$$e^{-y}(1 + y') = 1 \quad y(0) = 1$$

Řešení 3. Obecné řešení: $y = \ln\left(\frac{1}{1+cx}\right)$, $c \in \mathbb{R}$

Partikulární řešení: $y = \ln\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{e}-1)e^x}\right)$

2 Homogenní rovnice

Mají tvar $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$ je převedeme na separovatelnou rovnici. Zadání je totožné jako v předchozích případech.

Příklad 4.

$$(x^2 - y^2) + xyy' = 0 \quad y(e) = e^2$$

Řešení 4. Obecné řešení: $y^2 = 2x^2 \ln \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Partikulární řešení: $y^2 = 2x^2 \ln \frac{e^{\frac{3}{2}}}{x}$

Příklad 5.

$$xy' \sin \frac{y}{x} = y \sin \frac{y}{x} - x \quad y(e) = 0$$

Řešení 5. Obecné řešení: $x = ce^{\cos \frac{y}{x}}$, $c \in \mathbb{R}$

Partikulární řešení: $x = e^{\cos \frac{y}{x}}$.