NEOMEZENÁ ÚLOHA LIN PROGRAMOVÁNÍ V ROVINĚ

Najít bod (x_1, x_2), v němž funkce

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

nabývá svého maxima na množině, která je průnikem polorovin

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 &\le b_n \end{aligned}\right\}$$

poloroviny $h_1, h_2, \dots h_n$

Minule jsme předpokládali, že máme nanic poloroviny m_1, m_2 takové, že f je omezená na $m_1 \cap m_2$ a hledáme bod po maximum na

-2-

přičemž $m_1 \wedge m_2 \wedge k_1 \wedge \ldots \wedge k_n$.

Bereme-li náhodné pořadí podmínek $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pak očekávaný čas algoritmu

je $O(n)$

K odvození jsme použili náhodnou veličinu X_i

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{p.k. } v_{i-1} \in k_i \\ 1 & \text{pro } v_{i-1} \notin k_i \end{cases}$$

v_{i-1} řešení pro $m_1, m_2, k_1, \ldots k_{i-1}$

V případě $X_i = 1$ musíme řešit 1-dim úlohu lin. programování, která má časovou náročnost $O(i)$

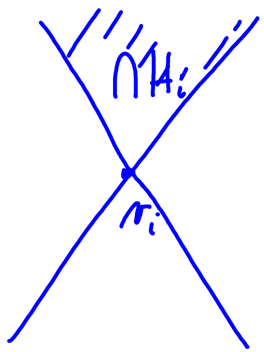
pravděpodobnost, že $X_i = 1$ $\quad p(X_i = 1)$

\- 3 -

Vzali jsme přímky $m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap \ldots \cap h_i$

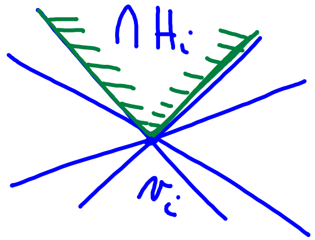
$$p(X_i = 1) = p\Big(v_i \text{ leží na přímce } l_i \text{ (hranice } h_i\text{), která mění } \underbrace{\bigcap_{j=1}^{i} h_j \cap m_1 \cap m_2}_{\bigcap H_i}\Big)$$

(a)



$\frac{1}{i}$

(b)



Zase jen 2 přímky, pravděpodobnost je $\frac{1}{i}$

$$\sum O(i) E(X_i) = \sum_{1}^{n} O(i) \frac{1}{i} = O(n)$$

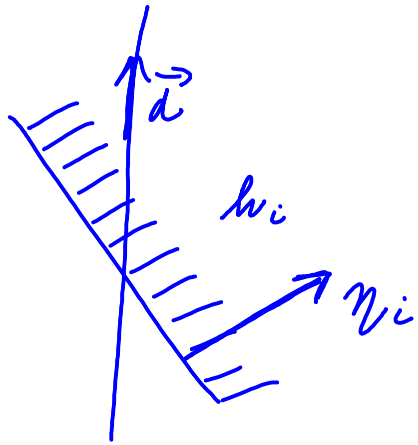
-4-

Neomezená úloha

Máme poloroviny $H = \{h_1, h_2, \ldots h_n\}$

Normálové vektory těchto polorovin jsou η_i

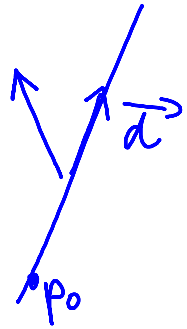
Možná situace je taková



$$\bigcap H = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n \neq \emptyset$$

Tento průnik navíc obsahuje polopřímku

$$\{ p_0 + \lambda \vec{d}, \ \lambda \geq \lambda_0 \}$$



a $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ roste na této polopřímce do ∞.

V tomto případě říkáme, že lineární program $LP(H, \vec{c})$ je neomezený.

Lemma: Lineární program $LP(H, \vec{c})$ je neomezený, právě když existuje vektor $\vec{d}$ tak, že platí

(1) $$\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle > 0$$ (skalární součin)

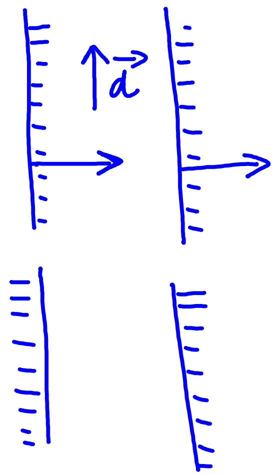
pro všechna i (2) $$\langle \eta_i, \vec{d} \rangle \geq 0$$

a navíc, označíme-li

$$\overline{H} = \{ h_i \in H, \ \langle \eta_i, d \rangle = 0 \},$$

pak

(3) $$\bigcap \overline{H} \neq \emptyset .$$



Důkaz. Je zřejmé, že podmínky jsou nutné. Ukážeme, že jsou postačující.
Vezmeme $p_0 \in \bigcap \overline{H}$ a vezmeme $\vec{d}$, které splňuje (1) a (2). Potom uvažujme přímku

$$p_0 + \lambda \vec{d}$$

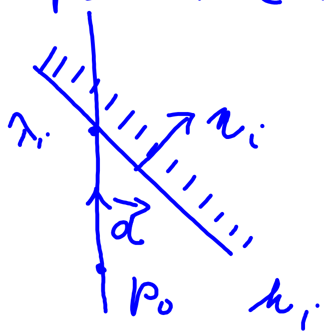
Ukážeme, že pro $\lambda \geq \lambda_0$ je $p_0 + \lambda \vec{d} \in \bigcap H$. Pak f roste podél polopřímky $\{p_0 + \lambda \vec{d},\ \lambda \geq \lambda_0\}$.

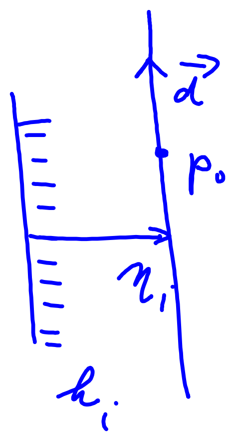
Je-li $h_i \in \overline{H}$, pak přímka $p_0 + \lambda \vec{d} \in h_i$

Je-li $h_i \in H \setminus \overline{H}$

existuje λ_i, že pro $\lambda \geq \lambda_i$ je $p_0 + \lambda \vec{d} \in h_i$

Zvolíme $\lambda_0 = \max \lambda_i$.





-7- c

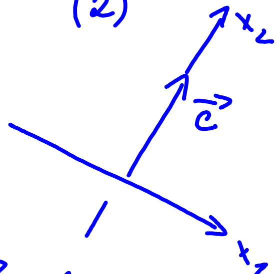
Řešení úlohy (1) a (2) lze převést na řešení 1-dim úlohy lin programování

Hledáme $\vec{d}$ tak, aby pro dané $\vec{c}$ a $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots \vec{n}_n$ bylo

(1) $$\langle \vec{d}, \vec{c} \rangle > 0$$

(2) $$\langle \vec{d}, n_i \rangle \geq 0$$

Důkaz:



Předp. pro jednoduchost, že $\vec{c} = (0, 1)$

Pak $\vec{d}$ hledáme ve tvaru $\vec{d} = (d_1, 1)$

Pak je podmínka (1) vždy splněna. $n_i = (e_{i1}, e_{i2})$

$$e_{i1} d_1 + e_{i2} \geq 0$$

To je úloha 1-dim programování, kde nemáme žádnou funkci.

Pro každé i máme nějaké x_i a přitom

$$x_i \leq d_1 \qquad i \in J \subseteq \{1,2,\dots n\}$$

$$d_1 \leq x_i \qquad i \in \{1,2,..n\} \setminus J$$

Pokud $\max_{i \in J} \{x_i\} \leq \min_{j \in \{1,..n\} \setminus J} \{x_j\}$

$$x_l \leq x_r,$$

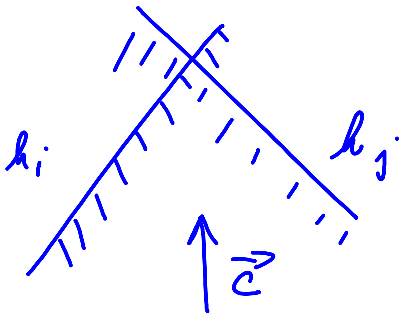
pak volba d existuje. Pokud tomu tak není,

dostáváme $x_l > x_r$

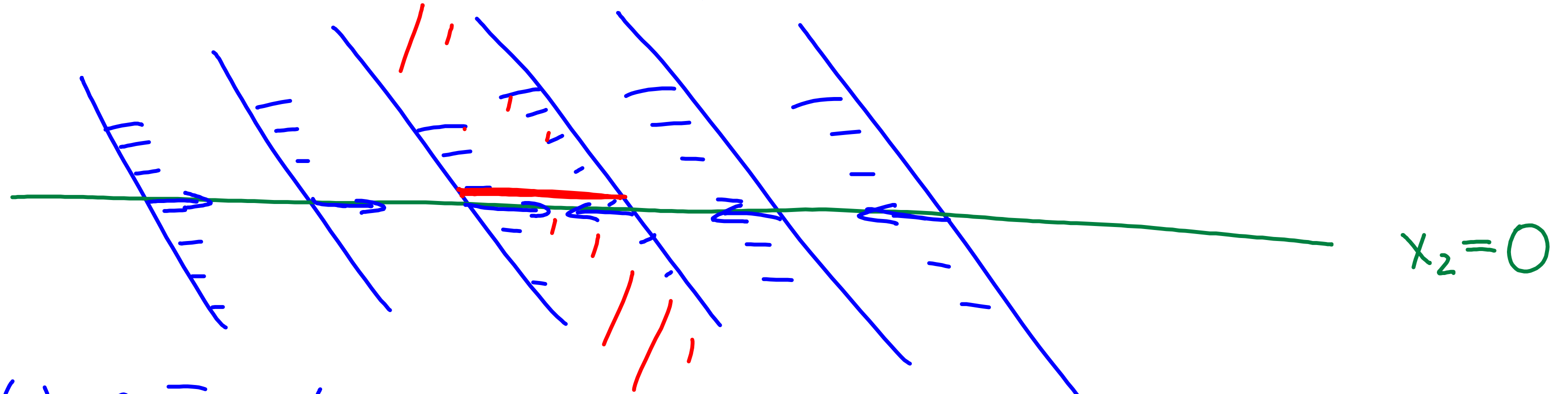
a $x_i > x_j$ nějaké $i \in J$ a $j \in \{1,2,..n\} \setminus J$.

Pro tyto dvě pozorování h_i a h_j bude platit, že úloha LP

$LP(\{h_i, h_j\}, \vec{c})$ je omezená. A tyto dvě poloroviny můžeme použít jako m_1 a m_2 a řešit úlohu omezeného lin. programování



Zjistit, zda $(3) \cap \overline{H} \neq \emptyset$, je opět úlohou na 1-dim lin. programování. Poloroviny z $\overline{H}$ mají totiž rovnoběžné hraniční přímky. Najít průnik $\cap \overline{H}$ je totéž, co hledat průnik těchto polorovin a přímky kolmé na hraniční.



(1) $\bigcap \overline{H} \neq \emptyset$. Pak vezme $p_0 \in \bigcap \overline{H}$.

(2) $\bigcap \overline{H} = \emptyset$, potom našli průnik všech polorovin $\bigcap H = \emptyset$.

Přechod 17 v pseudo pdf

-11-

ORTOGONÁLNÍ VYHLEDÁVÁNÍ

Motivace Databáze zaměstnanců, u každého zaměstnance několik údajů - plat, věk, doba zaměstnání u firmy, . . .

Jde o to najít všechny zaměstnance, kteří

$$20\text{tis} \le \text{plat} \le 25\text{tis}$$

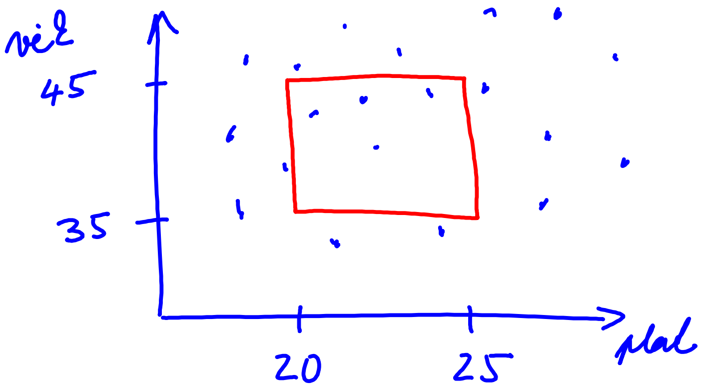
$$35 \le \text{věk} \le 45$$

$$3 \le \text{u firmy} \le 7$$

Geometricky – počet údajů je dimenze prostoru, ve kterém se pohybujeme

Každý zaměstnanec je bod, jehož souřadnice jsou dané údaje

– 12 –



Chceme najít strukturu, která umožní jednoduché a opakované vyhledávání které body leží v zadaném pravoúhelníku

– pro ortogonální vyhledávání

Od dimenze 2 máme různé možnosti

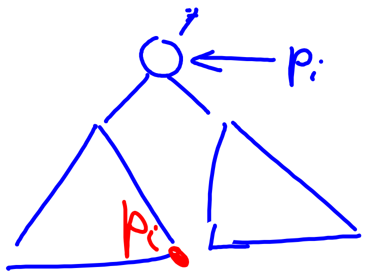
– k-d trees, k-d stromy (kd = k-dimenzionální původně)

– range trees

1-dim. vyhledávání

Máme n čísel $\{p_1, p_2, .. p_n\}$. Chceme vytvořit strukturu, která pro zadaný interval $[x, x']$ najde všechna p_i, která v něm leží.

Pro $P = \{p_1, p_2, ... p_n\}$ vytvoříme vyvážený binární strom, v jehož listech jsou čísla $p_1, p_2, .. p_n$ uspořádaná podle velikosti. Navíc v každém uzlu je to číslo p_i, které je největší v levém podstromu.



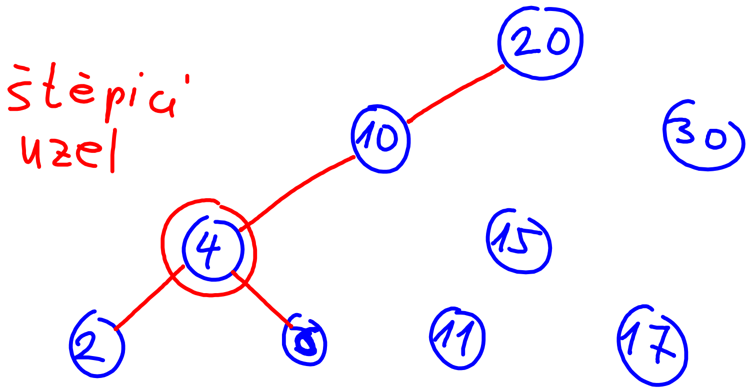
Je-li dáno nějaké $x \in \mathbb{R}$ a my chceme x porovnat mezi listy $p_1, p_2 .. p_n$ podle velikosti, tak v tomto uzlu rozhodujeme

Je-li $x \le p$, jdeme z uzlu doleva, je-li $x > p$, jdeme vpravo.

Mějme interval $[x, x']$.

Prohledáme stromem pro x a pro x'.

V některém okamžiku se naše cesty rozejdou. Uzel, ve kterém k tomu dojde se nazývá štěpící



$x = 3$, $x' = 5$

Další pokračování
viz obr. 3 a obrázek 5 kap.

$x = 17$, $x' = 78$