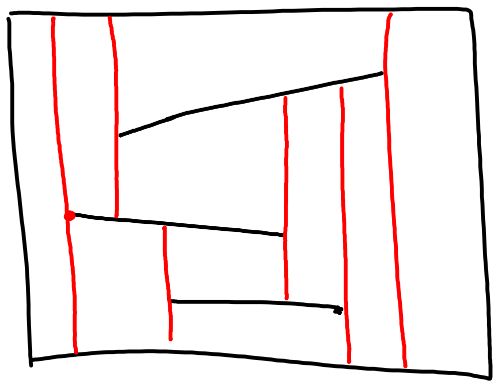
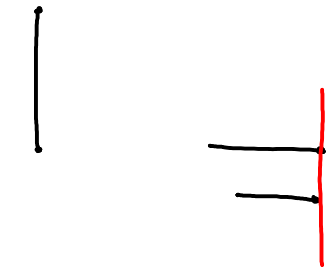
LOKALIZACE BODU – POKRAČOVÁNÍ

Pracovali jsme s množinou S úseček $s_1, s_2, \dots, s_n$ a předpokládali jsme, že žádné dva koncové body nemají stejnou x-ovou souřadnici.

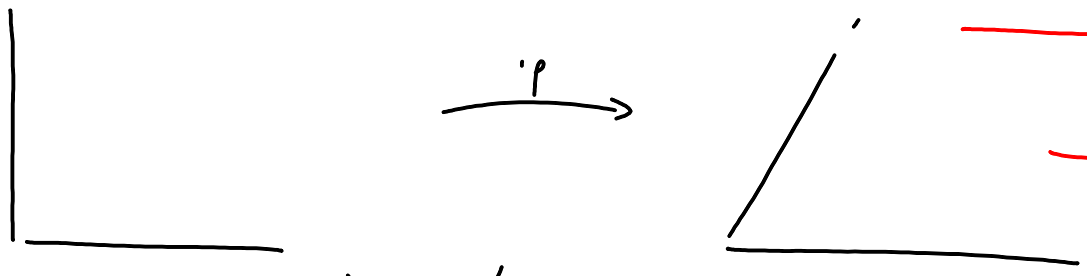


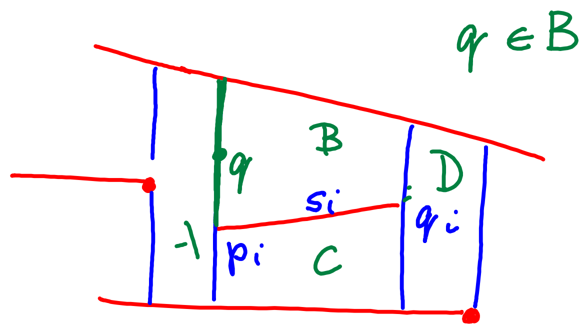


Jak tento předpoklad odstranit?

2

Uvažujme transformaci souřadnic (shear)





$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \varepsilon y \\ y \end{pmatrix}$$

$\varepsilon > 0$, ale hodně malé

Jestliže máme dva body $p = (p_x, p_y)$ a $q = (q_x, q_y)$

$p_x < q_x$ a $\varepsilon > 0$ malé $\Rightarrow \varphi(p)_x < \varphi(q)_x$

$p_x < q_x \Rightarrow p_x + \varepsilon p_y < q_x + \varepsilon q_y$

$p_x = q_x$ a $p_y < q_y \Rightarrow \varphi(p)_x < \varphi(q)_x$

3

$\varepsilon > 0$ platí

$\varphi(p)_x < \varphi(q)_x$ právě když $p_x < q_x$

nebo

$p_x = q_x$ a $p_y < q_y$

Tedy my nemusíme žádné dostatečně malé $\varepsilon > 0$ počítat, stačí v uvedeném algoritmu nějaké porovnávání podle x-ové souřadnice nahradit lexikografickým uspořádáním – první podle x a pak podle y.

Jestli jsme porovnávali podle y, tak porovnání zůstane.

4

Věta: Očekávaná paměťová složitost vyhledávací struktury je $O(n)$
Očekávaný čas konstrukce vyhledávací struktury je $O(n \log n)$
a očekávaný čas vyhledání bodu je $O(\log n)$.

Důkaz: Očekávaný čas vyhledávání

Je dán bod q a vyhledávací strukturu $\mathcal{D}(\mathcal{S}_n)$
Tato vyhledávací struktura vznikala postupně $\mathcal{D}(\mathcal{S}_1), \mathcal{D}(\mathcal{S}_2), \dots \mathcal{D}(\mathcal{S}_n)$
V i-tém kroku na cestě k bodu q přibyla X_i uzlů.

$$X_i = 0, 1, 2, 3$$

X_i je pro nás náhodná veličina.

5

Očekávaný čas vyhledání bodu q je střední hodnota součtu X_i

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n$$

$EX_i \leq 3 \cdot$ pravděpodobnost $(X_i \neq 0) = 3 \cdot$ pravděpodobnost, že $\Delta^q(\varphi_{i-1}) \neq \Delta^q(\varphi_i)$

$\Delta^q(\varphi_{i-1})$ je lichoběžník v $T(\varphi_{i-1})$, v němž leží q

$\Delta^q(\varphi_i)$ —— // —— $T(\varphi_i)$, —— // ——

pravděpodobnost $(\Delta^q(\varphi_{i-1}) \neq \Delta^q(\varphi_i)) =$ pravděpodobnost (úsečka s_i je top, bottom, leftpoint, rightpoint lichoběžníku $\Delta^q(\varphi_i)$)

$p(s_i$ je top $\Delta^q(\varphi_i)) = \frac{1}{i}$ $\qquad$ $p(p_i$ je leftpoint $\Delta^q(\varphi_i)) = \frac{1}{i}$

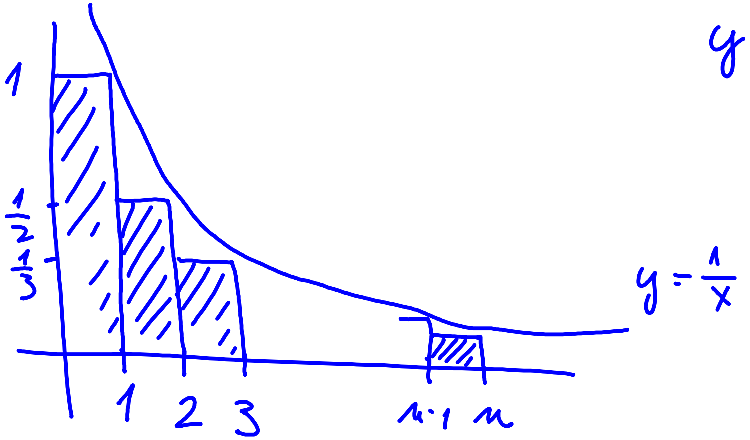
$p(s_i$ je bottom $\Delta^q(\varphi_i)) = \frac{1}{i}$ $\qquad$ $p(p_i$ je rightpoint $\Delta^q(\varphi_i)) = \frac{1}{i}$

6

Závěr: $\quad E X_i \le 3 \cdot \frac{4}{i} = \frac{12}{i}$

$$\sum_{i=1}^{n} E X_i = 12\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = O(\log n)$$

$$y = \frac{1}{x}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log n$$

$$12\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \le 12(1 + \log n) = O(\log n)$$

7

Očekávaná velikost struktury $\mathcal{D}(\varphi)$

$$= \underbrace{\text{počet listů}}_{\substack{\text{lichoběžníky} \\ \text{v } T(\varphi_n)}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\text{počet nových uzlů vytvořených v kroku } i \right)$$

$$= O(n) + \sum_{i=1}^{n} k_i$$

k_i = počet uzlů vytvořených v kroku i.

Hrubý odhad.

$$k_i \leq \text{počet lichoběžníků v } T(\varphi_i) = O(i)$$

$$\leq O(n) + \sum \underbrace{O(1) + O(2) + \dots + O(n)}_{O(\underbrace{1+2+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}})} = O(n^2)$$

8

Potřebujeme spočítat $E(k_i)$

$\delta(\Delta, s) = 1$ pokud Δ zmizí po odstranění úsečky s

$\ 0$ Δ zůstane po odstranění úsečky s

Δ: lichoběžník v $T(\varphi_i)$; s: úsečka z φ_i

$$\sum_{s \in S_i} \delta(\Delta, s) \leq 4$$

Δ je omezen (určen) maximálně 4 úsečkami

$$\sum_{s \in \varphi_i} \sum_{\Delta \in T(\varphi_i)} \delta(\Delta, s) \leq 4 \cdot \text{počet lichoběžníků v } T(\varphi_i) = \underline{4\, O(i)}$$

9

konst

$$k_i = \sum_{\Delta \in T(\varphi_i)} \delta(\Delta, s_i)$$

Proto střední hodnota

$$E(k_i) = \frac{1}{i}\left(\sum_{s \in \varphi_i} \sum_{\Delta \in T(\varphi_i)} \delta(\Delta, s) \right) \le \frac{4}{i} O(i) = O(1)$$

Očekávaná velikost $\mathcal{D}(\varphi)$ je

$$O(n) + \sum_{i=1}^{n} E(k_i) = O(n) \qquad \blacksquare$$

(10)

Očekávaný čas konstrukce

Čas pro vytvoření $\mathcal{T}(\mathcal{S}_i)$ a $\mathcal{D}(\mathcal{S}_i)$ z $\mathcal{T}(\mathcal{S}_{i-1})$ a $\mathcal{D}(\mathcal{S}_{i-1})$ je $O(k_i)$

$\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$

+ čas k určení, kde je levý bod úsečky s_i

$\log 2 + \log 3 + \dots + \log n = \log n + \log n + \dots$

Očekávaný čas konstrukce =

$$= O(1) + \sum_{i=2}^{n} \left\{ O(\log i) + O(E(k_i)) \right\} = O\left(\sum_{i=2}^{n} \log i + n \right)$$

vyhledání bodu p_i

$$\leq O((n-1)\log n + n) = O(n \log n)$$

n je počet úseček!

11

DIAGRAMY VORONOIA

Úloha – post office problem

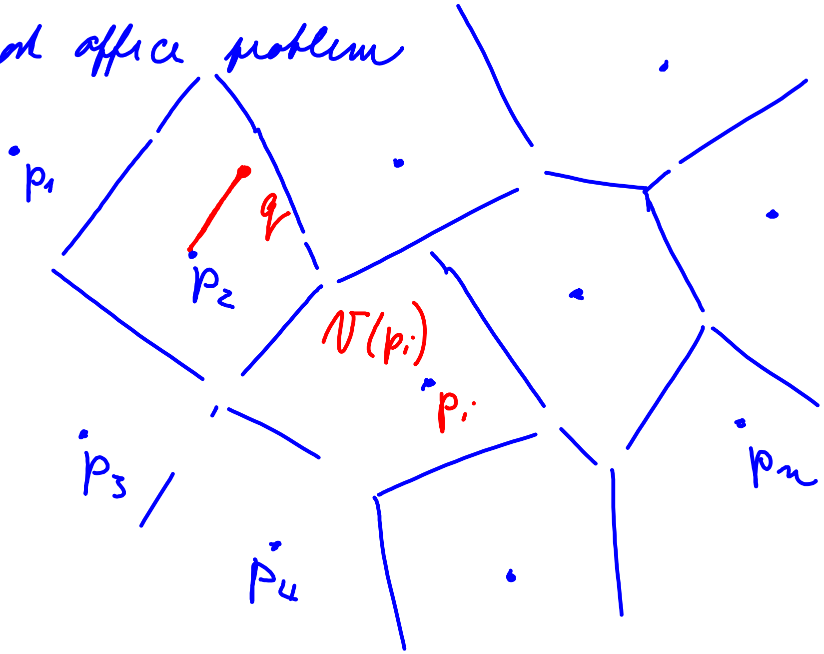


Diagram V. pro body $p_1, p_2, \dots, p_n$ v rovině je rozdělení roviny na oblasti $V(p_i)$ takové, že

$$q \in V(p_i) \iff dist(q, p_i) \le dist(q, p_j)$$

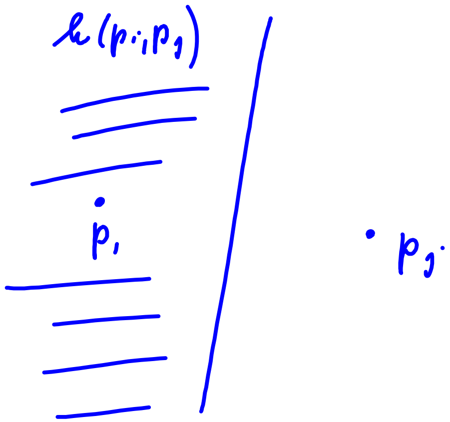
pro všechna $j = 1, 2, i-1, i+1, \dots n$.

Oblast Voronoia

12

Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od p_i a p_j je přímka – osa úsečky $p_i p_j$

Nechť $h(p_i,p_j)$ je polorovina určená touto přímkou, v níž leží bod p_i



$$V(p_i,p_j) = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} h(p_i,p_j)$$

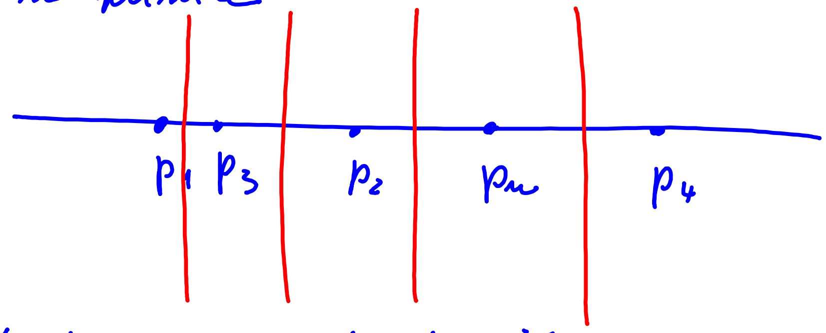
Diagram V nalezneme spočítat jako průnik polorovin. Potom časová náročnost by byla

$$O(n\ O(n)) = O(n^2)$$

Řekneme si algoritmus pracující v čase $O(n \log n)$. Tento čas je optimální.

(13)

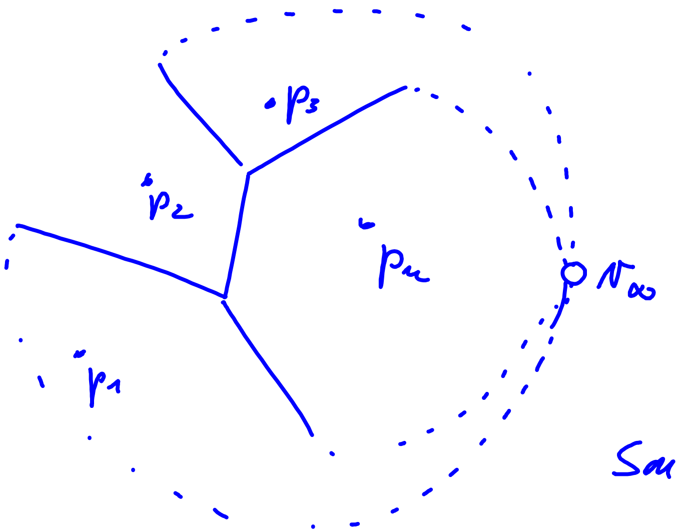
n bodů na přímce



Nalézt V-diagram v tomto případě je stejně obtížné jako seřadit body podle x-ové souřadnice, což stojí čas aspoň $O(n \log n)$.

(14)

V-diagram je rovinné podrozdělení s uzly, hranami a oblastmi; uvnitř každé oblasti leží právě jeden z n bodů p_i. Naším cílem bude odhadnout počet uzlů a počet hran



V-diagram s uzlem v_∞ je souvislý rovinný graf. Platí

$$(*) \quad (n_v + 1) - n_e + \underbrace{n}_{\text{počet oblastí}} = 2$$

Z každého uzlu vycházejí aspoň 3 hrany.

Součet stupňů všech uzlů $= 2 n_e$

$$3 n_v \leq 2 n_e$$

$$3(n_v + 1) \leq 2 \cdot n_e$$

15

$(*)$ $$(n_v+1)+n-2 = n_e$$

$$\underline{2(n_v+1)+2n-4} = 2n_e \geq \underline{3n_v}$$

$$2n_v+2+2n-4 \geq 3n_v$$

$$\boxed{2n-2 \geq n_v}$$

$(*)$ $$3(n_v+1)-3n_e+3n = 6$$

$$3n_v+3-3n_e+3n = 6$$

$$2n_e+3-3n_e+3n \geq 6$$

$$3n+3-6 \geq n_e$$

$$\boxed{3n-3 \geq n_e}$$

<u>Lemma</u> V-diagram pro n bodů má nejvýše $2n-2$ vrcholů a $3n-3$ hran.

Počet vrcholů je $O(n)$.

Počet hran je $O(n)$