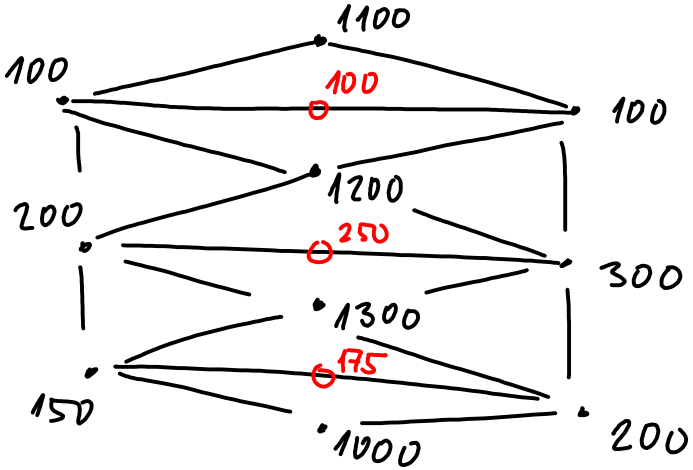
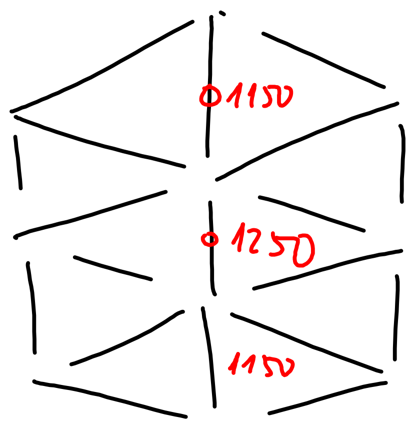
DELAUNAYOVA TRIANGULACE

Známe na mapě nadmořské výšky některých bodů





Věta: Mějme množinu P n bodů v rovině, jejímž konv. obalem je k-úhelník. Potom každá triangulace konv. obalu obsahuje

(2)

$2n-2-k$ trojúhelníků a $3n-3-k$ hran.

Důkaz: Mějme pro danou triangulaci m trojúhelníků.

Triangulace tvoří rovinný graf – souvislý, platí pro něj Eul. vztah

$$\underbrace{v}_{=n} - h + (m+1) = 2$$

Počet hran je

$$\frac{3m+k}{2} = h$$

Dosazením

$$n - \frac{3m+k}{2} + m + 1 = 2$$

3

Odtud vyjádřením dostaneme

$$m = 2n-2-k$$

$$h = \frac{3m+k}{2} = 3n-3-k$$

Nechť T je nějaká triangulace. Úhly jejích trojúhelníků uspořádáme podle velikosti

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots\ldots \leq \alpha_{3m}$$

Řekneme, že $T < T'$, jestliže

$$\alpha_i = \alpha_i' \text{ pro } i \leq k < 3m \text{ a } \alpha_{k+1} < \alpha'_{k+1}.$$

Jde o lexikografické uspořádání.

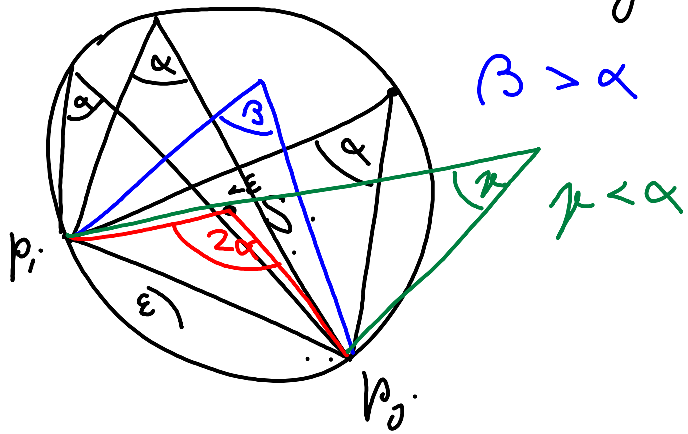
4

Maximální prvek v tomto uspořádání nazýváme

<u>úhlově optimální triangulací</u>

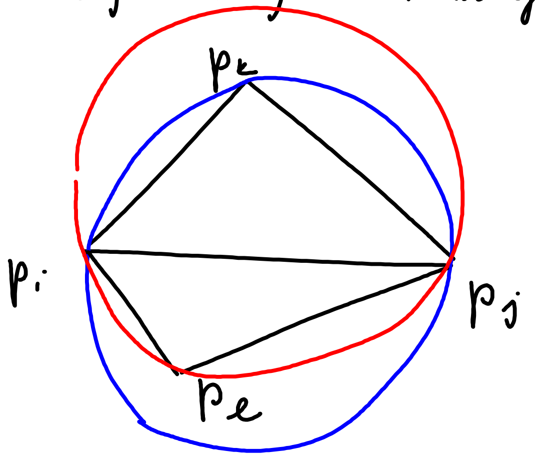
Geometrie z gymnázia

– obvodových a středové úhly



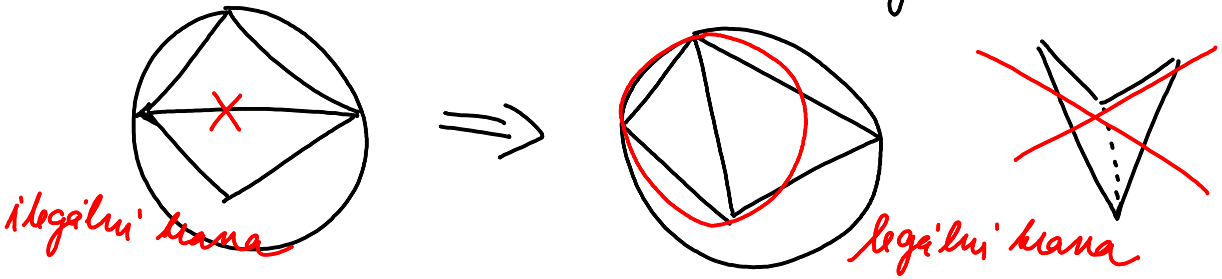
5

Mějme nějakou triangulaci, uvažujme hranu $p_i p_j$ této triangulace, která je hranou $2\,\Delta$.



Taková hrana $p_i p_j$ (kde p_l leží uvnitř kružnice určené $p_i p_j p_k$) se nazývá ilegální.

Flip je nahrazení jedné úhlopříčky v čtyřúhelníku druhou úhlopříčkou



$$\min_{i=1,\dots,6} \alpha_i < \min_{j=1,\dots,6} \beta_j$$

$\beta_1 > \alpha_1$

$\beta_4 > \alpha_4$

$\beta_5 > \alpha_1$

$\beta_6 > \alpha_4$

$\beta_3 > \alpha_2$

$\beta_2 > \alpha_5$

$\Rightarrow \mathcal{T} < \mathcal{T}'$

7

Triangulaci nazýváme LEGÁLNÍ, jestliže neobsahuje žádnou ilegální hranu.

Jednoduchý algoritmus pro nalezení legální triangulace spočívá v nahrazování ilegálních hran. Po konečném, leč neznámém počtu kroků tento algoritmus nalezne legální triangulaci.

ÚHLOVĚ OPTIMÁLNÍ TRIANGULACE JE LEGÁLNÍ.

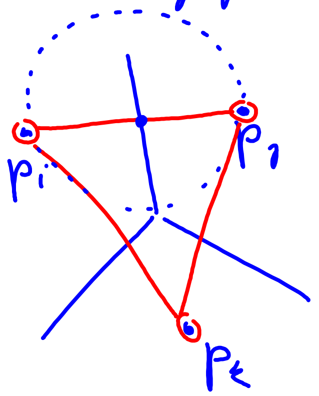
(8)

Delaunayova triangulace

Připomenutí: je zadána množina P bodů v rovině.

Pro tuto množinu máme diagram Voronoi – to je rovinný graf.

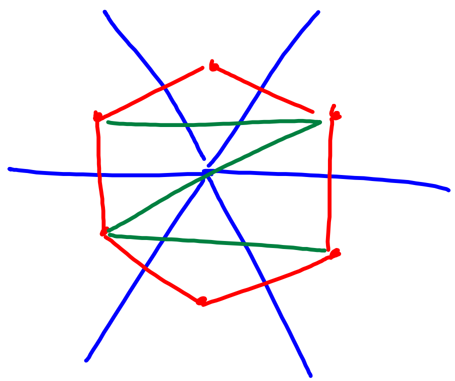
Duální graf k tomuto grafu nazýváme <u>Delaunayův graf</u>.



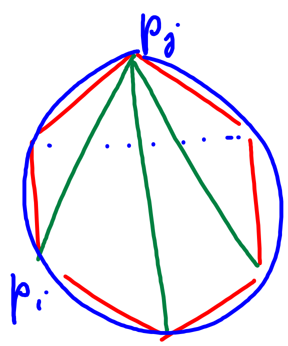
$p_i p_j$ je hranou Delaunayova grafu, jestliže existuje kružnice C s p_i, p_j na hranici, která uvnitř nemá žádný další bod z množiny P.

9

Obecně není Delaunayův graf triangulací.



Delaunayova triangulace vznikne z Delaunayova grafu nějakou triangulací



– není určen jednoznačně.

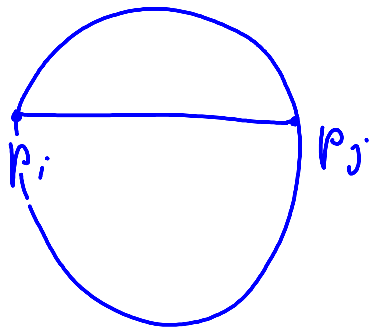
V každém případě platí

Jestliže $p_i p_j$ je hrana Delaunayovy triangulace, pak existuje kružnice C, na které leží $p_i p_j$ a uvnitř neleží žádný další bod množiny P.

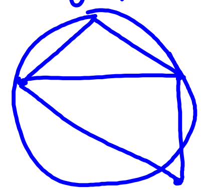
10

Jiná charakterizace Delaunayovy triangulace

– je to triangulace, která ke každé její hraně $p_i p_j$ existuje kružnice C tak, že $p_i p_j$ na ní leží a uvnitř neleží žádný bod z množiny P.



Toto je přesnější podmínka než to, co chceme po legální triangulaci: každá hrana legální triangulace $p_i p_j$ určuje kružnici C takovou, že v ní (uvnitř) neleží nikdy p_k a p_l přilehlých trojúhelníků

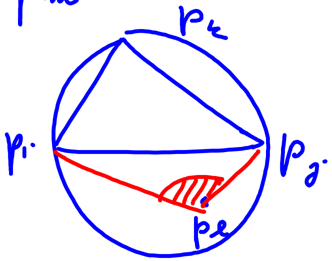


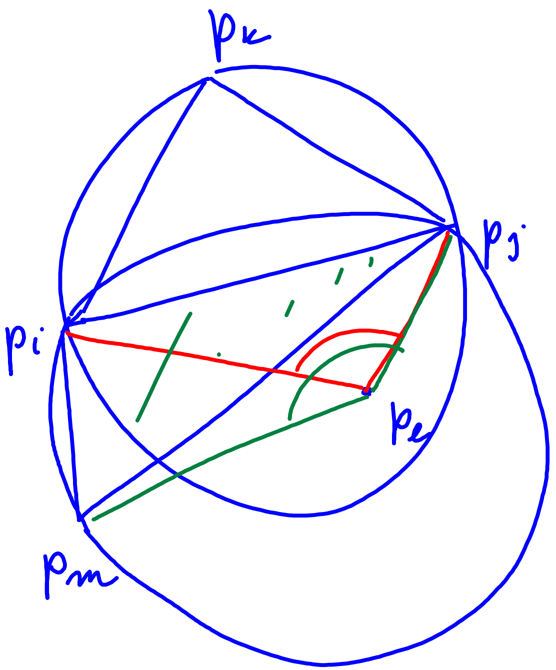
11

Závěr. Každá Delaunayova triangulace je legální.

Věta: Každá legální triangulace je Delaunayova.

Důkaz: Předp. že existuje legální triangulace, která není Delaunayova. Pak existuje △ $p_i p_j p_k$ z triangulace a bod p_ℓ tak, že p_ℓ leží uvnitř kružnice určené body p_i, p_j, p_k a p_m nedosoví △ s $p_i p_j$. Z dvojic △ a bod vezmeme takovou, že úhel $\measuredangle p_i p_\ell p_j$ je maximální





$\exists\, \Delta p_i p_j p_m$ v němž p_l neleží

Uvažujme $\Delta p_i p_j p_m$ a bod p_l

Úhel $\measuredangle p_m p_l p_j > \measuredangle p_i p_l p_j$,

spor s předpokladem, že $\measuredangle p_i p_l p_j$ je maximální.

Dokázali jsme, že D. triangulace = legální triangulace.

Úhlově optimální $\Longrightarrow$ legální = Delaunayova

13

Delaunayova triangulace dané množiny bodů je daná jednoznačně

$\Longleftrightarrow$? je triangulací

$\Longleftrightarrow$ žádné 4 body z množiny P neleží na kružnici

<u>Věta:</u> Jestliže žádné 4 body množiny P neleží na kružnici, pak úhlově optimální triangulace = jediná D triangulace = jediná legální triangulace.

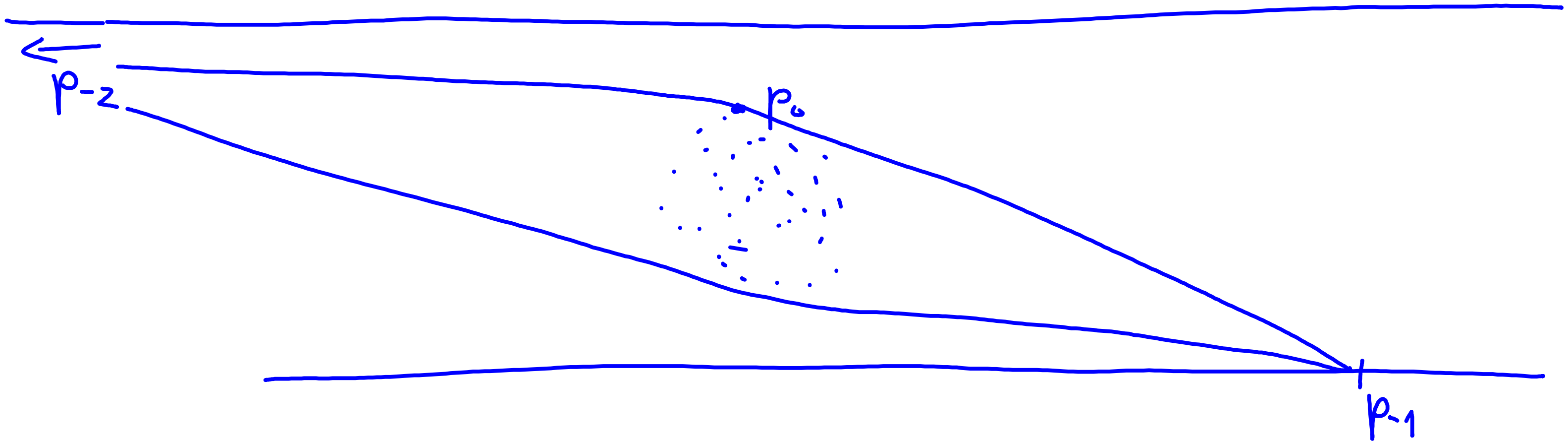
Algoritmus k nalezení D triangulace

1. najdeme diagram Voronoia a uděláme duální graf a ten rozdělíme na $\triangle$
2. hledáme legální triangulaci

14

Přírůstkový náhodnostní algoritmus k nalezení Delaunayovy triangulace

Mějme množinu bodů $P = \{p_0, p_1, \dots p_n\}$ v rovině takovou, že p_0 má největší y-ovou souřadnici (resp. x-ovou).



15

Začneme s trojúhelníkem $\Delta p_{-2} p_{-1} p_0$ a postupně přidáváme náhodně uspořádané body $p_1, p_2, \ldots p_n$. Z D triangulace pro $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \ldots p_{r-1}\}$ vytvoříme D. triangulaci pro

$$\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \ldots p_{r-1}, p_r\}$$

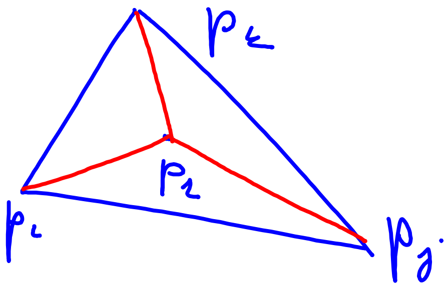
Na konci odstraníme body p_{-1}, p_{-2} a přilehlé úsečky. Body p_{-2}, p_{-1} jsou zvoleny tak, že po jejich odstranění zbyde D. triangulace pro množinu

$$\{p_0, p_1, \ldots p_n\}.$$

16

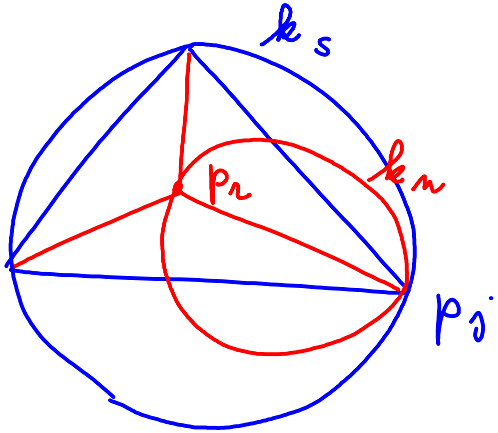
Pro přechod od bodů $\{p_{-2}, \ldots p_{r-1}\}$ k bodům $\{p_{-2}, \ldots p_{r-1}, p_r\}$ udržujme vyhledávací strukturu, která určí, ve kterém $\triangle$ Delaunayovy triangulace bodů $\{p_{-2}, p_{-1}, \ldots p_{r-1}\}$ leží bod p_r.

Zjistíme-li, že bod p_r leží uvnitř $\triangle\, p_i p_j p_k$, vytvoříme nové hrany $p_i p_r$, $p_j p_r$ a $p_k p_r$



17

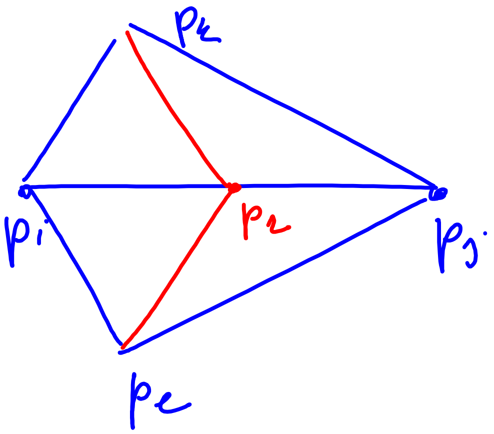
Tvrzení: Nové hrany vycházející z p_r ($p_r p_i$, $p_r p_j$, $p_r p_k$) jsou legální, ale $p_i p_j$, $p_j p_k$ a $p_i p_k$ nemusí být v nové situaci již legální.



Kružnice k_n s tětivou $p_r p_j$ je stejnolehlá s k_s a proto v ní neleží žádný uzel z množiny P.

$\Longrightarrow$ hrana $p_r p_j$ je legální

Další možnost p_r leží na hraně p_ip_j, potom přidáme 2 nové hrany podle obrázku



Nové hrany p_rp_k a p_rp_l jsou opět legální.