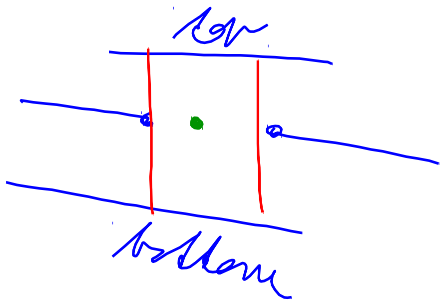
DOKONČENÍ LOKALIZACE BODU

Pro dané rovinné podrozdělení reprezentované úsečkami $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ jsme vytvořili lich. mapu $T(S)$ a vyhledávací strukturu $\mathcal{D}(S)$ … orient. graf pro nalezení oblasti, ve které leží bod.



Věta: Očekávaný čas vyhledávání je $O(\log n)$.

Důkaz: Vyhledáváme, ve kterém lichoběžníku leží bod q.
Na cestě ke kořenu lichoběžníku v $\mathcal{D}(S)$ je X_i vnitřních vrcholů

②

které vznikly v i-tém kroku.

$$0 \le X_i \le 3$$

Bereme X_i jako náhodnou veličinu

Očekávaný čas je

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \le \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot \text{pravděpodobnost, že } X_i \neq 0$$

$P(X_i \neq 0)$ Hledaný bod v leží v $\mathcal{T}(S_i)$ … lich. mapa na množině $S_i = \{s_1, s_2, \dots s_i\}$ v nějakém lichoběžníku Δ.

$X_i \neq 0 \iff \Delta$ vznikl v i-tém kroku $\iff$ top(Δ), bottom(Δ), rightp(Δ) nebo leftp(Δ) je určen pomocí s_i.

$$p(\mathrm{top}(\Delta) = s_i) = \frac{1}{i}, \quad p(\mathrm{bottom}(\Delta) = s_i) = \frac{1}{i}$$

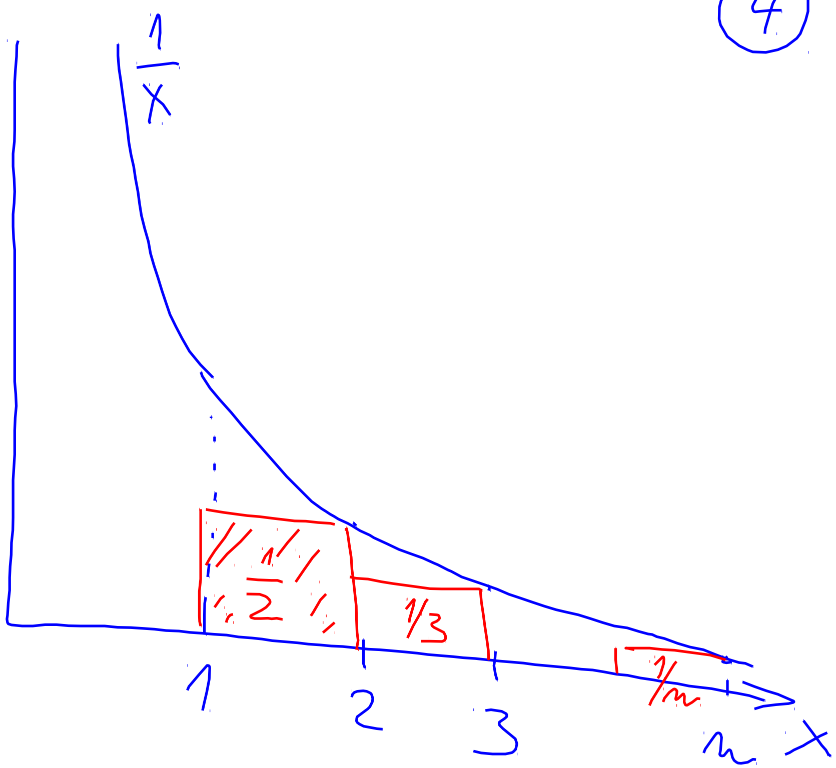
$$p(\mathrm{rightp}(\Delta) = p_i \text{ nebo } q_i) = \frac{1}{i}, \quad p(\mathrm{leftp}(\Delta) = p_i \text{ nebo } q_i) = \frac{1}{i}$$

$$p(X_i \neq 0) \leq \frac{4}{i}$$

Očekávaný čas $\leq$

$$\sum_{i=1}^{n} 3\, p(X_i \neq 0) = 12\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \overset{!}{\leq} 12\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx\right)$$

$$= 12(1 + \log n) = O(\log n)$$



Nerovnost

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \le \log n$$

Součet obsahů červ. obdélníků je $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ a je menší než plocha pod funkcí $\frac{1}{x}$ mezi 1 a n.

$$= \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

<u>Věta:</u> Očekávaná velikost datové struktury je $O(n)$.

<u>Důkaz:</u> Velikost naš. struktury je

$$= \text{počet listů} \ (= \text{lichoběžníků}) + \sum_{i=1}^{n} \text{počet vnitřních uzlů vzniklých v } i\text{-tém kroku}$$

$$\leq \underbrace{6n+4}_{\text{věta z minulé přednášky}} + \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1)$$

k_i je počet lichoběžníků vzniklých v kroku i.
Pak počet vnitřních uzlů je $k_i - 1$ — viz příklady z minulé přednášky.

n_i budeme brát jako náhodnou veličinu

Očekávaná velikost dat. struktury je $\leq$

$$\underset{6n+4}{O(n)} + \sum_{i=1}^{n} E(n_i)$$

Naším cílem je dokázat, že $E(n_i) = O(1)$.

$$\lambda(\underset{\in T(S_i)}{\Delta}, \underset{\in \{s_1, \dots, s_i\}}{s}) = \begin{cases} 1 & \Delta \text{ zanikl přidáním } s \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$n_i = \sum_{\Delta \in T(S_i)} \lambda(\Delta, s_i)$$

$$\sum_{s \in T(S_i)} \lambda(\Delta, s) \le 4 \quad \text{pro } \Delta \text{ pevné}$$

$$E(n_i) = \frac{1}{i} \sum_{s \in S_i} \left(n_i \text{ pro pořadí, kde je } s \text{ poslední} \right)$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{s \in S_i} \left(\sum_{\Delta \in T(S_i)} \lambda(\Delta, s) \right)$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{\Delta \in T(S_i)} \left(\sum_{s \in S_i} \lambda(\Delta, s) \right) \le \frac{1}{i} \sum_{\Delta \in T(S_i)} 4$$

$$\le \frac{1}{i} (6i + 4) \cdot 4 = O(1)$$

$$24 + \frac{16}{i} \le 25$$

Očekávaná velikost

$$\leq O(n) + \sum E(n_i) = O(n) + \sum_{1}^{n} O(1) = O(n).$$

<u>Věta</u> Očekávaný čas konstrukce $\mathcal{D}(S)$ je $O(n \log n)$.

Důkaz:

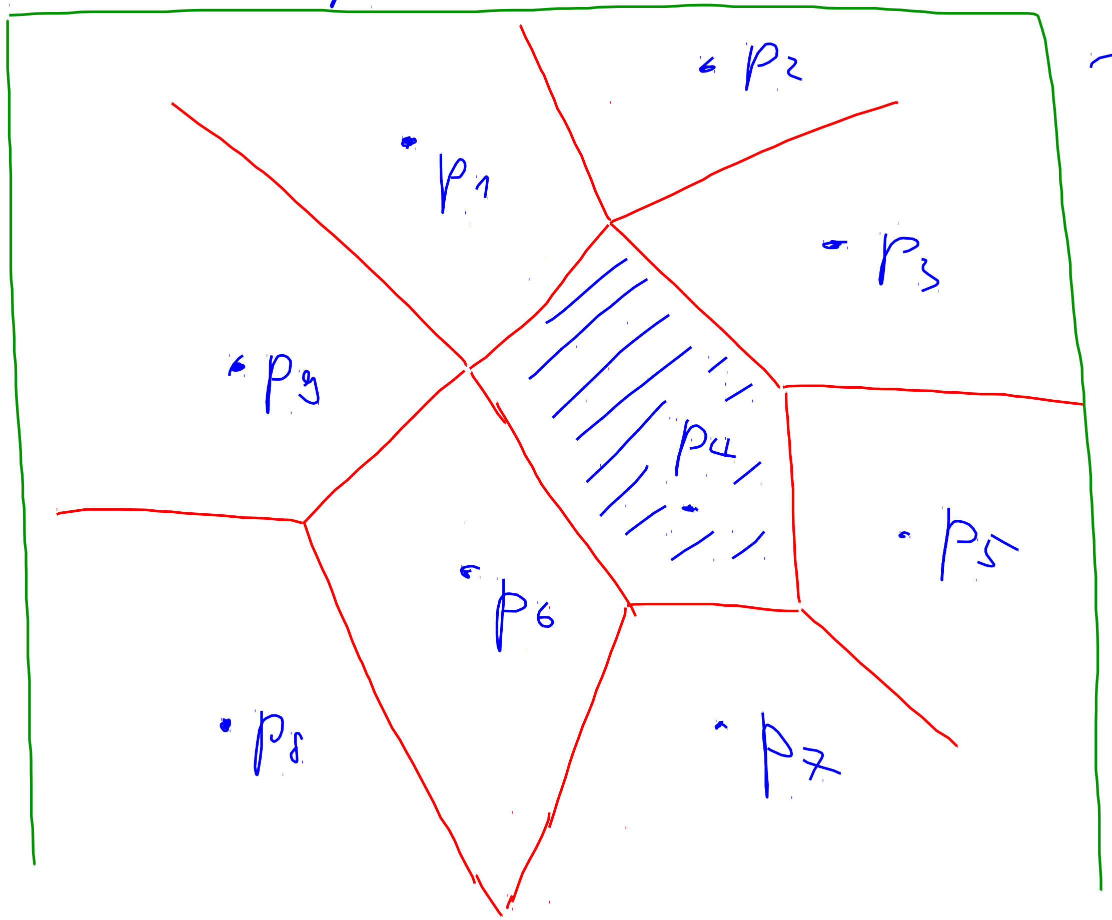
$$\leq O(1) + \sum_{i=1}^{n} \left(\text{čas pro vytvoření } \mathcal{D}(S_i) \text{ a } T(S_i) \text{ z } \mathcal{D}(S_{i-1}) \text{ a } T(S_{i-1}) \right)$$

$$= O(1) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\text{vyhledání } p_i \text{ v } T(S_{i-1})}_{\text{nalezení } \Delta_0} + O(n_i) \Big)$$

$$= O(1) + \sum_{i=1}^{n} \big(O(\log i) + O(1) \big) = O(n) + O\Big(\sum_{i=1}^{n} \log i\Big) \leq O(n) + O\Big(\sum_{i=1}^{n} \log n\Big) = O(n \log n)$$

Diagramy Voronoia

Problém je znám pod názvem post office problem



$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

V-diagram má oblasti

$V(p_i) = \{ q \in \mathbb{R}^2,\ dist(q, p_i) \leq dist(q, p_j)$ pro všechna $j \neq i \}$

$$h(p_i, p_j) = \{ q \in \mathbb{R}^2, \ dist(q, p_i) \le dist(q, p_j) \}$$

je polorovina

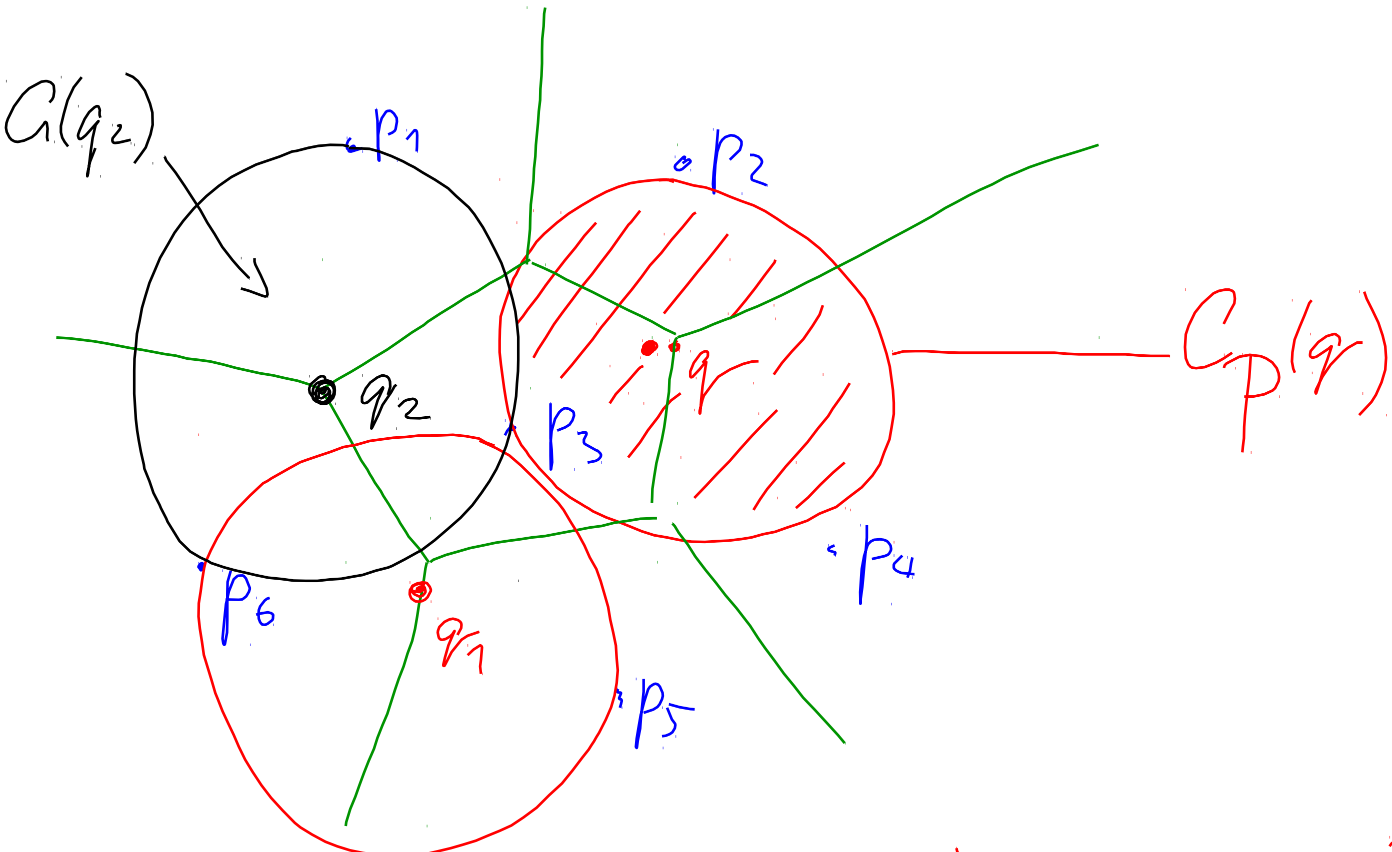
$$V(p_i) = \bigcap_{j \ne i} h(p_i, p_j)$$

Takto, ale konstrukci provádět nebudeme.

Pomocné pojmy

$q \in \mathbb{R}^2$, $P = \{p_1, p_2, \dots p_n\}$

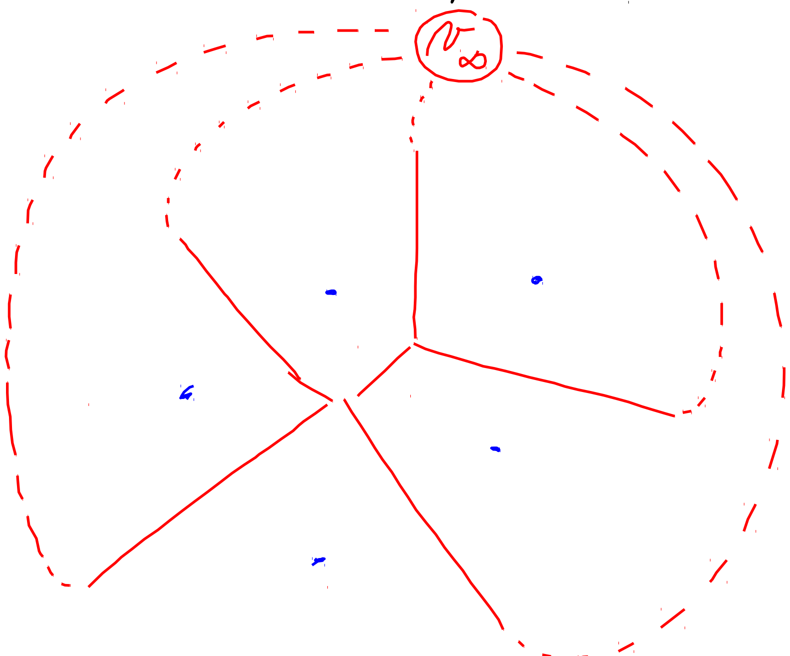
$C_P(q)$ = kruh se středem q, který uvnitř neobsahuje žádný bod z P maximálního poloměru (na hranici leží aspoň jeden bod z P)



$C(q_1)$ má na hranici aspoň dva body z $P \iff q_1$ leží na hraně V-diagramu

$C(q_2)$ má na hranici aspoň 3 body $\iff q_2$ je vrcholem V-diagramu

V-diagram má n oblastí. Odhadneme počet jeho uzlů a hran pomocí Eulerovy věty



V-diagram modifikujeme na rovinný graf s

$n_v + 1$ uzly

n_e hranami

n oblastmi

Eulerova věta říká, že $(n_v+1) - n_e + n = 2$

Stupeň každého uzlu je ≥ 3

Součet všech stupňů je $\geq 3(n_v+1)$

$= 2n_e$

$$2n_e \geq 3(n_v+1)$$

Z nerovnosti dosadíme do rovnosti

$$\frac{2}{3}n_e - n_e + n \geq 2$$

$$2n_e - 3n_e + 3n \geq 6$$

$$\boxed{3n - 6 \geq n_e}$$

$$(n_v+1) - \frac{3}{2}(n_v+1) + n \geq 2$$

$$-(n_v+1) + 2n \geq 4 \Rightarrow \boxed{2n - 5 \geq n_v}$$

Věta V-diagram pro n bodů má nejvýše

$2n-5$ vrcholů

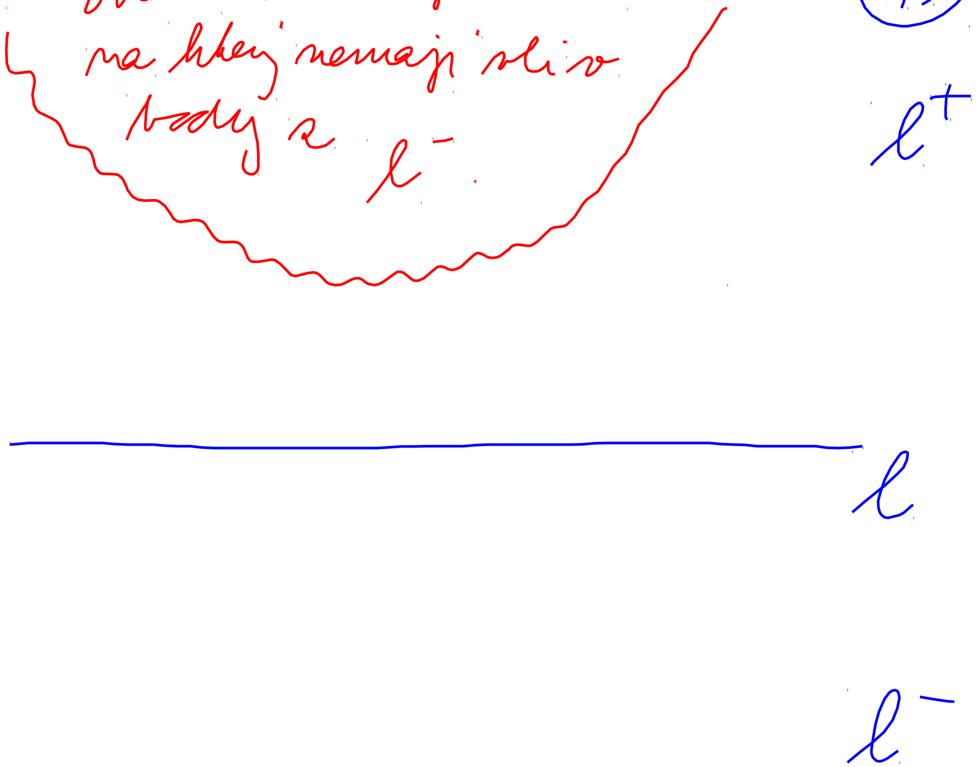
a

$3n-6$ hran.

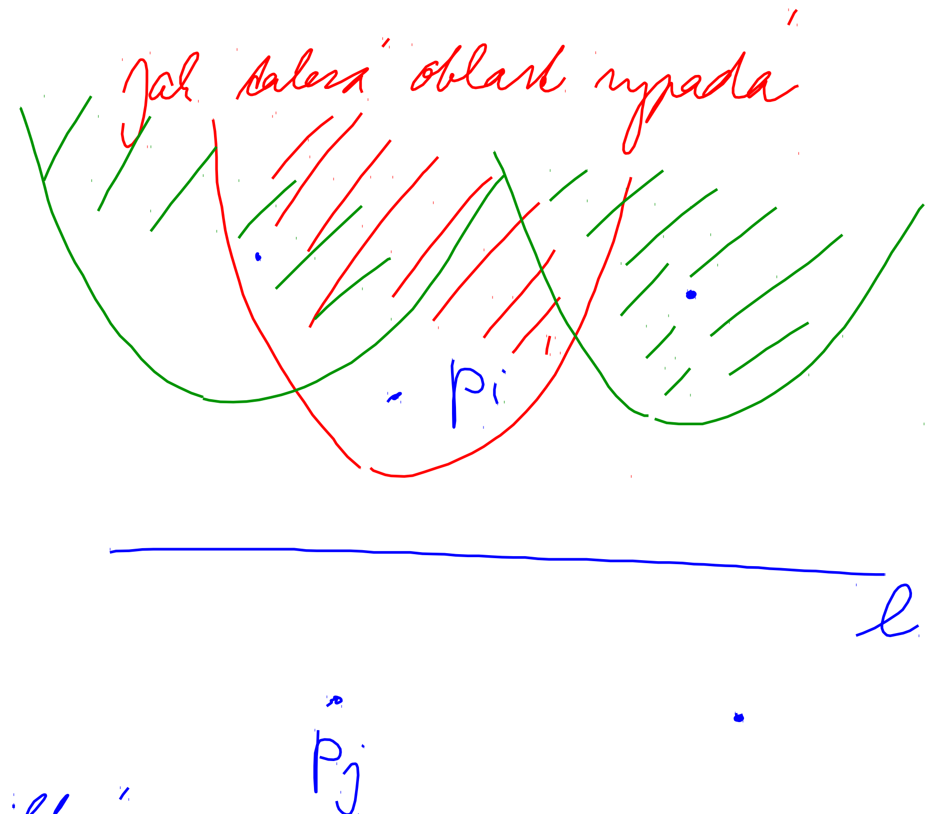
Algoritmus pro konstrukci $V(P)$

používá metodu zametací přímky. Zametací přímka l postupuje shora dolů a nad l se vytváří V-diagram. Tento diagram není v celé polorovině l^+ nad l, ale pouze v její části, která je sjednocením oblastí nad jistými parabolami.

oblast s V-diagramem na které nemají vliv body z ℓ^-



Jak daleká oblast vypadá



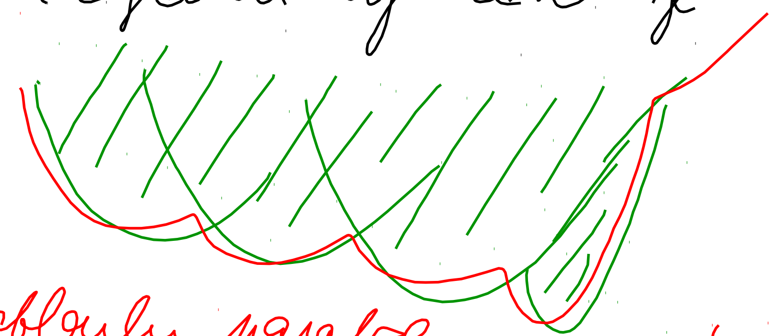
Bod q leží v této oblasti, jestliže nějaká $\mathrm{dist}(q, p_i)$ pro $p_i \in \ell^+$ je $\geq \mathrm{dist}(q, \ell) \geq \mathrm{dist}(q, p_j)$ pro všechny $j \in \ell^-$

Označme $\alpha(p,l)$ parabolu tvořenou body, které mají stejnou vzdálenost od p jako od l.

$\alpha^+(p,l)$ je množina bodů ležících nad nebo na parabole $\alpha(p,l)$.

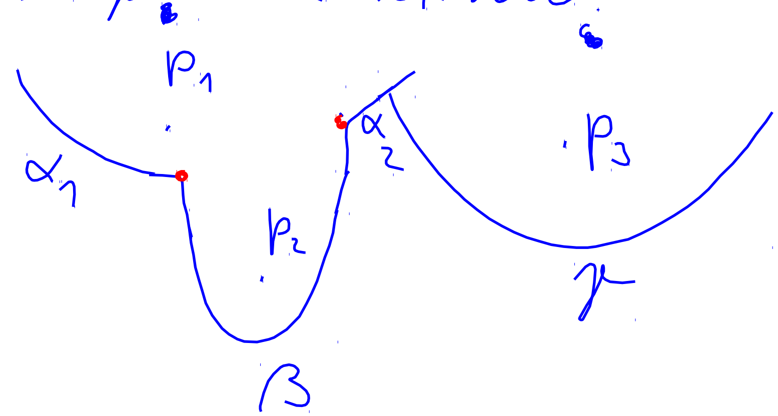
Oblast nad l, kde bude V-diagram vyřešen je

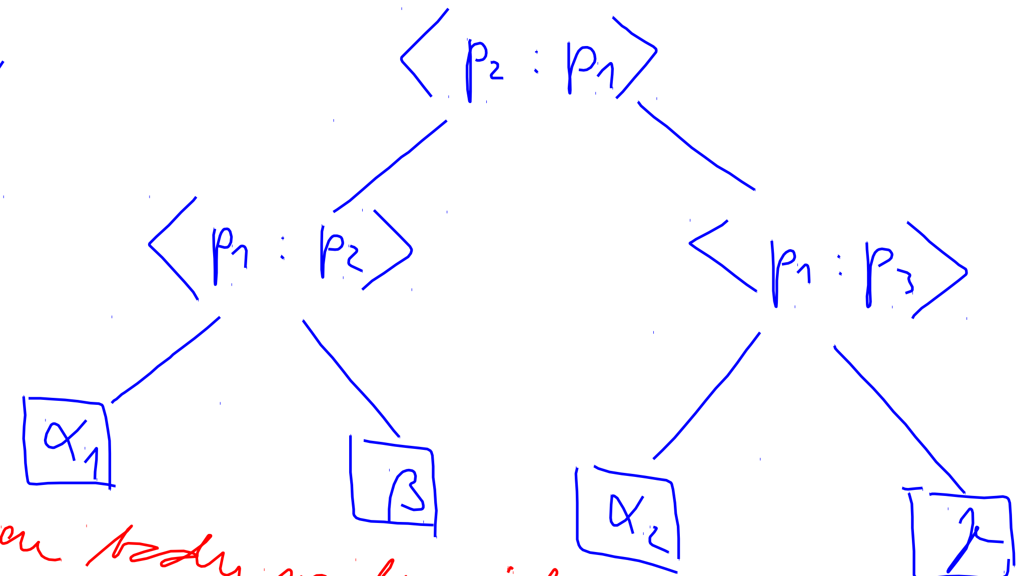
$$\bigcup_{p_i \in l^+} \alpha^+(l,p_i)$$



Hranice této oblasti, tvořená oblouky parabol, se nazývá beach line (plážová linie)

Strom T bude v tomto případě vyvážený binární strom, který ve svých listech drží pořadí oblouků parabol v plážové linii.





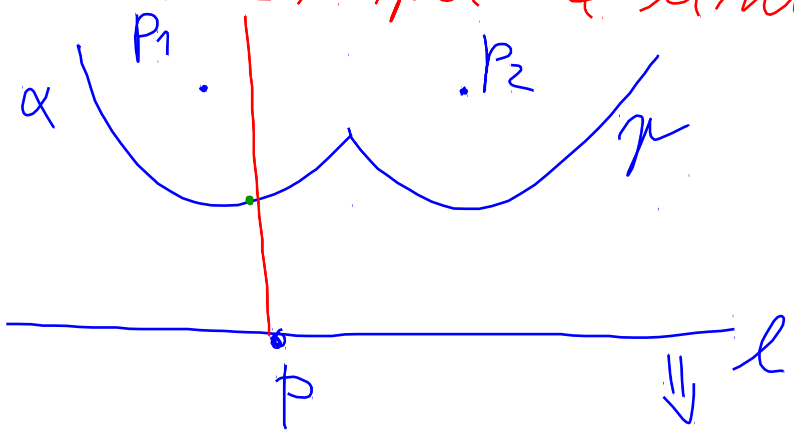
Zlomy plážové linie jsou body na hranách V-diagramu.

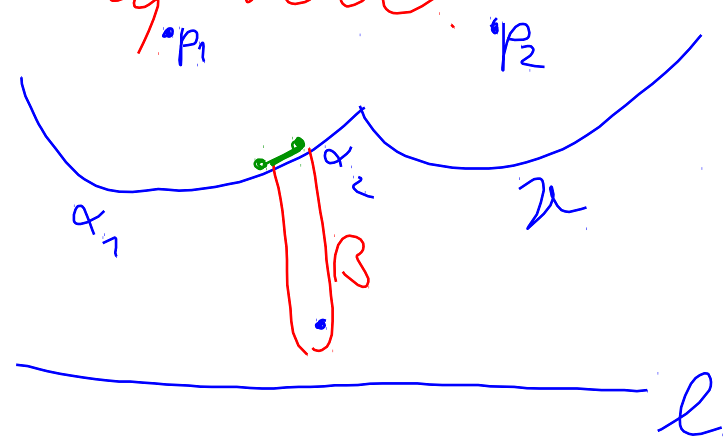
18

Dvě základní otázky — (1) Kdy je v plážové linii objevený oblouk?

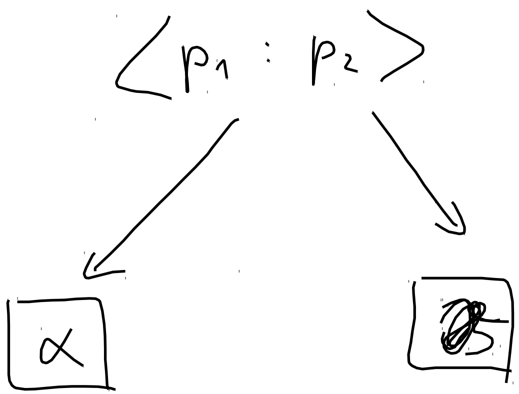
(2) Kdy v plážové linii nějaký oblouk zmizí.

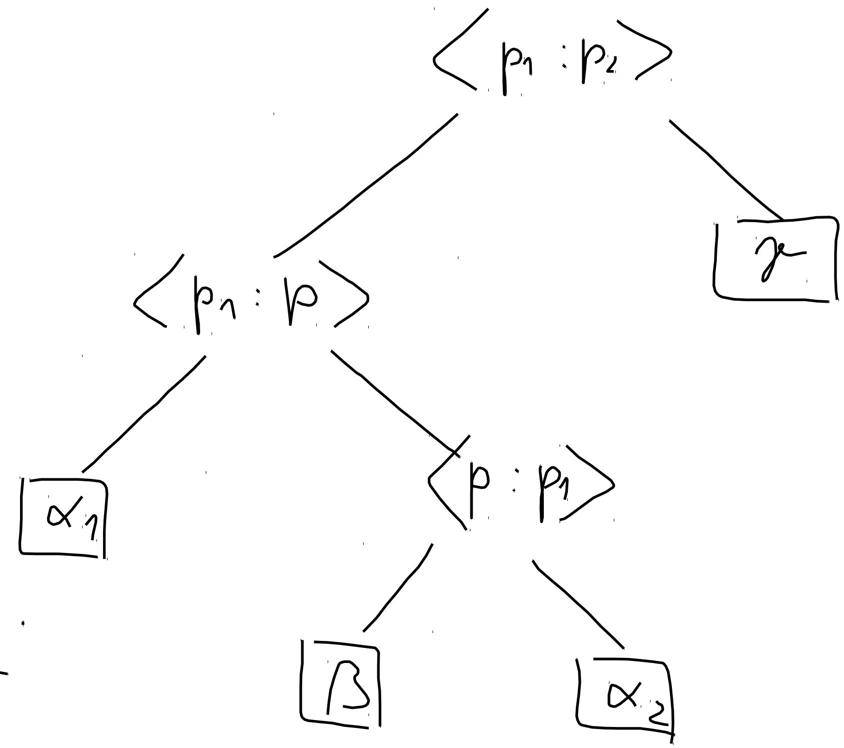
(1) Jestliže zametací přímka prochází přes bod p z množiny P, vznikne v plážové linii nový oblouk.





Na úrovni stromu vypadá celá záležitost takto





Těmto bodům z P říkáme místní události (site event)

Lemma: Nový oblouk v plážové linii vzniká pouze příchodem zametací přímky přes místní událost.