Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozložení

Motivace: V této situaci je naším úkolem porovnat střední hodnoty či rozptyly dvou normálních rozložení na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů pořízených z těchto rozložení. Zpravidla konstruujeme intervaly spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot respektive hodnotíme shodu středních hodnot pomocí dvouvýběrového t-testu či dvouvýběrového z-testu a shodu rozptylů pomocí F-testu.

Rozložení statistik odvozených z výběrových průměrů a výběrových rozptylů

Máme dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a má rozsah $n_1 \geq 2$, druhý pochází z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ a má rozsah $n_2 \geq 2$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry, S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly a $S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ vážený průměr výběrových rozptylů.

Pak platí:

a) Statistiky $M_1 - M_2$ a $S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ jsou stochasticky nezávislé.

b) $U = \frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$. (Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 známe.)

c) Nechť $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $K = \frac{(n_1+n_2-2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$. (Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o neznámém rozptylu σ^2.)

d) Jestliže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, pak $T = \frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$. (Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné.)

e) $F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$. (Pivotová statistika F slouží k řešení úloh o σ_1^2 / σ_2^2.)

Vysvětlení:

ad b) M_1-M_2 je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry
$E(M_1-M_2) = \mu_1 - \mu_2$,
$D(M_1-M_2) = \sigma_1^{\,2}/n_1 + \sigma_2^{\,2}/n_2$.
U se získá standardizací M_1-M_2.

ad c) $K_1 = \dfrac{(n_1-1)S_1^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$ a $K_2 = \dfrac{(n_2-1)S_2^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy $K = K_1+K_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$.

ad d) $U = \dfrac{(M_1-M_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1}+\dfrac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$, $K = \dfrac{(n_1+n_2-2)S_*^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$ jsou stochasticky nezávislé, protože $M_1 - M_2$ a $S_*^{\,2}$ jsou stochasticky nezávislé. $T = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{K}{n_1+n_2-2}}} = \dfrac{(M_1-M_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_*\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

ad e) $K_1 = \dfrac{(n_1-1)S_1^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}} \sim \chi^2(n_1-1)$ a $K_2 = \dfrac{(n_2-1)S_2^{\,2}}{\sigma_2^{\,2}} \sim \chi^2(n_2-1)$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy

$$F = \frac{\frac{K_1}{n_1-1}}{\frac{K_2}{n_2-1}} = \frac{S_1^{\,2}/S_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}/\sigma_2^{\,2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Příklad: Nechť jsou dány dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení N(0,28; 0,09) a má rozsah 16, druhý pochází z rozložení N(0,25; 0,04) a má rozsah 25. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový průměr 1. výběru bude větší než výběrový průměr 2. výběru?

Řešení:

$$P(M_1 > M_2) = P(M_1 - M_2 > 0) = 1 - P(M_1 - M_2 \le 0) = 1 - P\left(\frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) =$$

$$= 1 - P\left(U \le \frac{-0,28 + 0,25}{\sqrt{\frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25}}} \right) = 1 - P(U \le -0,35294) = 1 - \Phi(-0,35) = \Phi(0,35) = 0,63683$$

S pravděpodobností přibližně 63,7% je výběrový průměr 1. výběru větší než výběrový průměr 2. výběru.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistika M_1 - M_2 se podle bodu (a) řídí rozložením N($\mu_1 - \mu_2$, $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$),

kde $\mu_1 - \mu_2 = 0,28 - 0,25 = 0,03$, $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25} = 0,007225$, tj. statistika M_1 - M_2 ~ N(0,03;0,007225).

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme
= 1-INormal(0;0,03;sqrt(0,007225)).
V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,637934.

Intervaly spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1-\mu_2$, σ_1^2/σ_2^2

Uvedeme přehled vzorců pro meze 100(1-α)% empirických intervalů spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2.

a) Interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 známe (využití pivotové statistiky U)

Oboustranný: $(d, h) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2},\ m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2}\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha},\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{1-\alpha}\right)$

b) Interval spolehlivosti pro $\mu_1-\mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné (využití pivotové statistiky T)

Oboustranný:

$(d, h) = \left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\ m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2),\ \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty,\ m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\right)$

c) Interval spolehlivosti pro společný neznámý rozptyl σ^2 (využití pivotové statistiky K)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\frac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)}, \frac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)}\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\frac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)}, \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{(n_1+n_2-2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha}(n_1+n_2-2)}\right)$

d) Interval spolehlivosti pro podíl rozptylů $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (využití pivotové statistiky F)

Oboustranný: $(d, h) = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right)$

Levostranný: $(d, \infty) = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)}, \infty\right)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)}\right)$

Upozornění: Není-li v bodě (b) splněn předpoklad o shodě rozptylů, lze sestrojit aspoň přibližný 100(1-α)% interval spolehlivosti pro μ_1-μ_2.

V tomto případě má statistika T přibližně rozložení $t(\nu)$, kde počet stupňů volnosti $\nu = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$. Není-li ν celé číslo, použijeme v tabulkách kvantilů Studentova rozložení lineární interpolaci.

Příklad: Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru (v g/l). Z první nádrže bylo odebráno 25 vzorků, z druhé nádrže 10 vzorků. Byly vypočteny realizace výběrových průměrů a rozptylů: $m_1 = 34{,}48$, $m_2 = 35{,}59$, $s_1^2 = 1{,}7482$, $s_2^2 = 1{,}7121$. Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$.

Řešení:
Úloha vede na vzorec z bodu (b). Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů a najdeme odpovídající kvantily Studentova rozložení:

$$s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{24\cdot 1{,}7482 + 9\cdot 1{,}7121}{33} = 1{,}7384\,,\ t_{0,975}(33) = 2{,}035$$

Dosadíme do vzorců pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti:

$$d = m_1 - m_2 - s_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34{,}48 - 35{,}59 - \sqrt{1{,}7384}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{10}}\cdot 2{,}035 = -2{,}114$$

$$h = m_1 - m_2 + s_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34{,}48 - 35{,}59 + \sqrt{1{,}7384}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{10}}\cdot 2{,}035 = -0{,}106$$

$-2{,}114$ g/l $< \mu_1 - \mu_2 < -0{,}106$ g/l s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

=34,48-35,59-sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

=34,48-35,59+

sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)

	1 d	2 h
1	-2,11368	-0,10632

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy -2,114 g/l < μ_1 - μ_2 < -0,106 g/l.

Příklad: V předešlém příkladě nyní předpokládáme, že dané dva náhodné výběry pocházejí z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.

Řešení:
Úloha vede na vzorec z bodu (d).

$$d = \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{F_{0{,}975}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{3{,}6142} = 0{,}28$$

$$h = \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{F_{0{,}025}(24{,}9)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{1/F_{0{,}975}(9{,}24)} = \frac{1{,}7482/1{,}7121}{1/2{,}7027} = 2{,}76$$

$0{,}28 < \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}76$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.
Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme
=(1,7482/1,7121)/VF(0,975;24;9)
(Funkce VF(x;ný;omega) počítá x-kvantil Fisherova – Snedecorova rozložení F(ný, omega).)
Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme
=(1,7482/1,7121)/VF(0,025;24;9)

	1 d	2 h
1	0,282521	2,759698

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy platí: $0{,}28 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 2{,}76$.

Jednotlivé typy testů o parametrických funkcích μ_1-μ_2, $\sigma_1^2/\sigma_2^{\,2}$

a) Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ_1^2) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení N(μ_2, σ_2^2), přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ_1^2, σ_2^2 známe. Nechť c je konstanta.
Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový z-test.

b) Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ^2) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení N(μ_2, σ^2), přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.
Test H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá dvouvýběrový t-test.

c) Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ_1^2) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení N(μ_2, σ_2^2), přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Test H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ se nazývá F-test.

Provedení testů o parametrických funkcích μ_1-μ_2, σ_1^2/σ_2^2 pomocí kritického oboru

a) Provedení dvouvýběrového z-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \dfrac{(m_1 - m_2) - c}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

Stanovíme kritický obor W.

Pokud $t_0 \in$ W, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$.

b) Provedení dvouvýběrového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \dfrac{(m_1 - m_2) - c}{s_* \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$.

Stanovíme kritický obor W.
Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq c$. Kritický obor má tvar:
$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty\right)$.

Levostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\right\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = c$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \left\langle t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2), \infty\right)$.

c) Provedení F-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$.

Stanovíme kritický obor W.
Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1.

Oboustranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Kritický obor má tvar:

$$W = \left(0, F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\rangle \cup \left\langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right).$$

Levostranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left(0, F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\rangle$.

Pravostranný test: Testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$. Kritický obor má tvar: $W = \left\langle F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty\right)$.

Příklad: V restauraci "U bílého koníčka" měřili ve 20 případech čas obsluhy zákazníka. Výsledky v minutách: 6, 8, 11, 4, 7, 6, 10, 6, 9, 8, 5, 12, 13, 10, 9, 8, 7, 11, 10, 5. V restauraci "Zlatý lev" bylo dané pozorování uskutečněno v 15 případech s těmito výsledky: 9, 11, 10, 7, 6, 4, 8, 13, 5, 15, 8, 5, 6, 8 ,7. Za předpokladu, že uvedené hodnoty pocházejí ze dvou normálních rozložení, na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnoty doby obsluhy jsou v obou restauracích stejné.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Je to úloha na dvouvýběrový t-test. Před provedením tohoto testu je však nutné pomocí F-testu ověřit shodu rozptylů. Na hladině významnosti 0,05 tedy testujeme H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ proti H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$. Nejprve vypočteme $m_1 = 8{,}25$, $m_2 = 8{,}13$, $s_1^2 = 6{,}307$, $s_2^2 = 9{,}41$,

$s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{19 \cdot 6{,}307 + 14 \cdot 9{,}41}{33} = 7{,}623$. Podle vzorce z bodu (c) vypočteme realizaci testové statistiky:

$t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6{,}307}{9{,}41} = 0{,}6702$. Stanovíme kritický obor:

$$W = \left\langle 0, F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\rangle \cup \left\langle F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \infty\right) = \left\langle 0, F_{0,025}(19,14)\right\rangle \cup \left\langle F_{0,975}(19,14), \infty\right) =$$

$$= \left\langle 0, 1/F_{0,975}(14,19)\right\rangle \cup \left\langle F_{0,975}(19,14), \infty\right) = \left\langle 0, 1/2{,}6469\right\rangle \cup \left\langle 2{,}8607, \infty\right) = \left\langle 0; 0{,}3778\right\rangle \cup \left\langle 2{,}8607, \infty\right)$$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Rozptyly tedy můžeme považovat za shodné.

Nyní se vrátíme k dvouvýběrovému t-testu. Podle vzorce z bodu (b) vypočteme realizaci testové statistiky:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2 - c}{s_*\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{8{,}25 - 8{,}13}{\sqrt{7{,}623}\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}}} = 0{,}124.$$

Stanovíme kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(33)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(33), \infty\right) =$$

$$= \left(-\infty, -2{,}035\right\rangle \cup \left\langle 2{,}035, \infty\right)$$

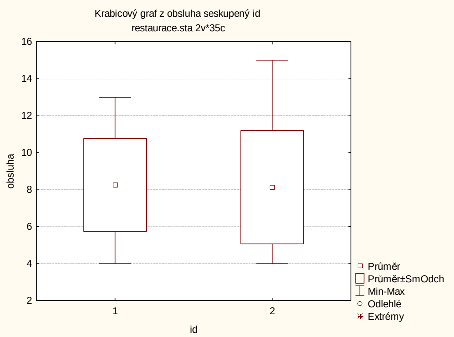
Protože testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a 35 případech. První proměnnou nazveme OBSLUHA, druhou ID. Do proměnné OBSLUHA napíšeme nejprve doby obsluhy v první restauraci a poté doby obsluhy ve druhé restauraci. Do proměnné ID, která slouží k rozlišení první a druhé restaurace, napíšeme 20 krát jedničku a 15 krát dvojku.
Provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů: Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné –Závislé proměnné OBSLUHA, Grupovací proměnná ID – OK.
Po kliknutí na tlačítko Souhrn dostaneme tabulku

	t-testy; grupováno: ID (restaurace) Skup. 1: 1 Skup. 2: 2										
Proměnná	Průměr 1	Průměr 2	t	sv	p	Poč.plat 1	Poč.plat. 2	Sm.odch. 1	Sm.odch. 2	F-poměr rozptyly	p rozptyly
OBSLUHA	8,250000	8,133333	0,123730	33	0,902279	20	15	2,510504	3,067495	1,492952	0,410440

Vidíme, že testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,492952 (je to převrácená hodnota k číslu 0,6702, které jsme vypočítali při ručním postupu), odpovídající p-hodnota je 0,41044, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů. (Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)
Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 0,12373, počet stupňů volnosti je 33, odpovídající p-hodnota 0,902279, tedy hypotézu o shodě středních hodnot nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se neprokázal rozdíl ve středních hodnotách dob obsluhy v restauracích "U bílého koníčka" a „Zlatý lev“.
Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/Min-Max.



Z grafu je vidět, že průměrná doba obsluhy v první restauraci je nepatrně delší a má menší variabilitu než ve druhé restauraci. Extrémní ani odlehlé hodnoty se zde nevyskytují.

Cohenův koeficient věcného účinku – doplnění významu dvouvýběrového t-testu:

Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozložení N(μ_1, σ^2) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení N(μ_2, σ^2), přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.
Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Označme m_1, m_2 realizace výběrových průměrů hodnot dané veličiny v těchto dvou skupinách, s_1^2, s_2^2 realizace výběrových rozptylů a $s_*^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$ realizaci váženého průměru výběrových rozptylů.

Cohenův koeficient d vypočteme podle vzorce: $d = \frac{|m_1 - m_2|}{s_*}$.

Tento koeficient slouží k posouzení velikosti rozdílu průměrů, který je standardizován pomocí odmocniny z váženého průměru výběrových rozptylů. Jedná se o tzv. věcnou významnost neboli velikost účinku skupiny na variabilitu hodnot sledované náhodné veličiny. Velikost účinku hodnotíme podle následující tabulky:

Hodnota d	účinek
aspoň 0,8	velký
mezi 0,5 až 0,8	střední
mezi 0,2 až 0,5	malý
pod 0,2	zanedbatelný

(Uvedené hodnoty nemají samozřejmě absolutní platnost, posouzení, jaký účinek považujeme za velký či malý, závisí na kontextu.)

Je zapotřebí si uvědomit, že při dostatečně velkých rozsazích náhodných výběrů i malý rozdíl ve výběrových průměrech způsobí zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α, i když z věcného hlediska tak malý rozdíl nemá význam. Naopak, máme-li výběry malých rozsahů, pak i značně velký rozdíl ve výběrových průměrech nemusí vést k zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti α.

Příklad:

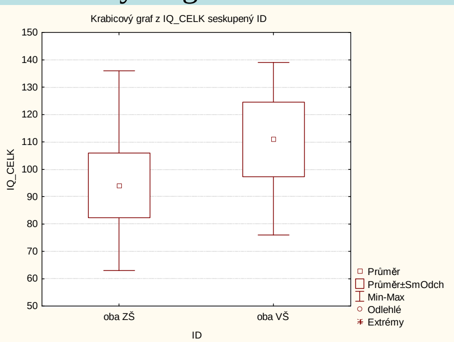
Máme k dispozici údaje o celkovém IQ 856 žáků ZŠ. Zajímáme se jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají pouze základní vzdělání (je jich 296) a jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají vysokoškolské vzdělání (těch je 75). Na hladině významnosti 0,05 budeme testovat hypotézu, že střední hodnota celkového IQ je v obou skupinách stejná a také vypočteme Cohenův koeficient věcného účinku.

Řešení: Provedeme dvouvýběrový t-test:

	t-testy; grupováno:ZŠ a VŠ (IQ) Skup. 1: oba ZŠ Skup. 2: oba VŠ										
Proměnná	Průměr oba ZŠ	Průměr oba VŠ	t	sv	p	Poč.plat oba ZŠ	Poč.plat. oba VŠ	Sm.odch. oba ZŠ	Sm.odch. oba VŠ	F-poměr Rozptyly	p Rozptyly
IQ_CELK	94,13851	110,9067	-10,6295	369	0,000000	296	75	11,82604	13,60164	1,322829	0,110124

Hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05, protože odpovídající p-hodnota je velmi blízká 0 (hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05, p-hodnota F-testu je 0,110124, což je větší než 0,05).

Krabicový diagram:



Vidíme, že průměrné celkové IQ dětí v 1. skupině je 94,1, zatímco ve 2. skupině 110,9. Vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ posoudíme pomocí Cohenova koeficientu.

	1 n1	2 n2	3 m1	4 m2	5 s1	6 s2	7 d
1	296	75	94,13851	110,9067	11,82604	13,60164	1,374117

Cohenův koeficient nabývá hodnoty 1,37, tudíž vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ lze považovat za velký.

Příklad: Výrobce limonád chtěl zjistit, zda změna technologie výroby se projeví v prodeji limonád. Proto sledoval po 14 náhodně vybraných dnů před zavedením nových limonád tržby v určitém regionu a zjistil, že za den utržil v průměru 39 600 Kč se směrodatnou odchylkou 5 060 Kč. Po zavedení nových limonád prověřil stejným způsobem tržby v 11 náhodně vybraných dnech v témž regionu a zjistil průměrný příjem 41 200 Kč se směrodatnou odchylkou 4 310 Kč. Předpokládejte, že tržby za starý typ limonád se řídí rozložením $N(\mu_1, \sigma^2)$ a tržby za nový typ limonád se řídí rozložením $N(\mu_2, \sigma^2)$.
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

Řešení:
Za odhad společného neznámého rozptylu vezmeme vážený průměr výběrových rozptylů:

$$s_*^2 = \frac{13 \cdot 5060^2 + 10 \cdot 4310^2}{23} = 22548165{,}217 .$$

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2 - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{39600 - 41200}{\sqrt{22548165{,}217}\sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{11}}} = -0{,}8363$$

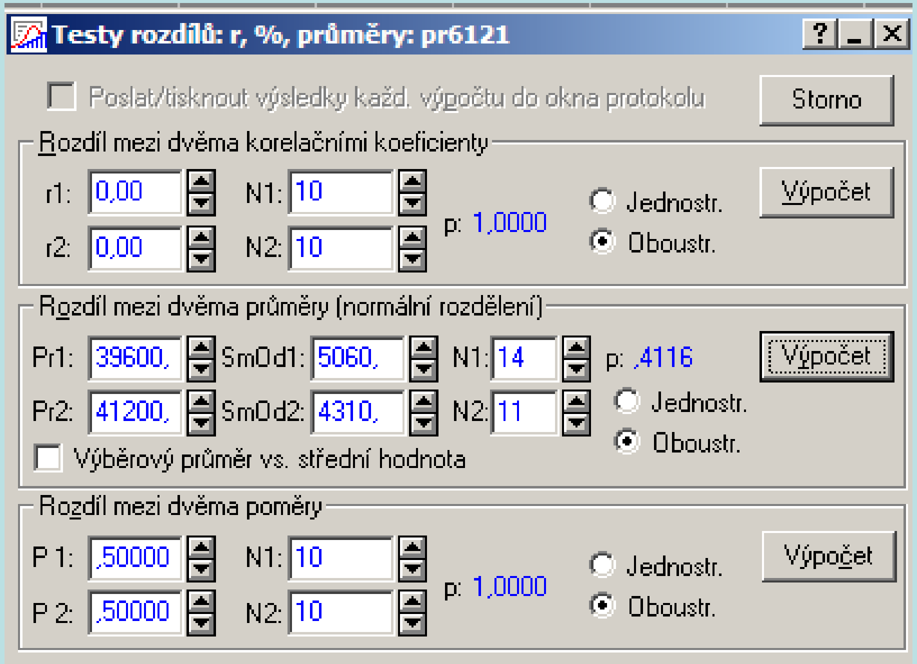
Kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -t_{0,975}(23)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(23), \infty\right) = \left(-\infty, -2{,}0687\right\rangle \cup \left\langle 2{,}0687, \infty\right)$$

Protože testové kritérium se nerealizuje v kritickém oboru, na hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu o shodě středních hodnot.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – do políčka Pr1 napíšeme 39600, do políčka SmOd1 napíšeme 5600, do políčka N1 napíšeme 14, do políčka Pr2 napíšeme 41200, do políčka SmOd1 napíšeme 4310, do políčka N1 napíšeme 14 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,4116 tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Jelikož p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že změna technologie výroby se neprojevila ve střední hodnotě tržeb.

Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z alternativního rozložení

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ. Píšeme X ~ A(ϑ).

$$\pi(x) = \begin{cases} 1-\vartheta \text{ pro } x=0 \\ \vartheta \text{ pro } x=1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x(1-\vartheta)^{1-x} \text{ pro } x = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ. Píšeme X ~ Bi(n, ϑ).

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x} \text{ pro } x = 0, \ldots, n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$E(X) = n\vartheta$, $D(X) = n\vartheta\,(1-\vartheta)$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro n = 1.

Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, ..., n, pak $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, \vartheta)$.)

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně píšeme

$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$. Pokud součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru.

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení A(ϑ) a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$. Pak statistika $U = \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení N(0,1) a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Vysvětlení:

Protože $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení A(ϑ), bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (výběrový úhrn) rozložení Bi(n, ϑ). Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením N(0,1). Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n, dostaneme vyjádření: $U = \frac{\frac{Y_n}{n} - \vartheta}{\sqrt{\frac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ:

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}, \; h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta \in \Xi : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= P\left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

Příklad: Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich používá zubní kartáček zahraniční výroby. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba používá zubní kartáček zahraniční výroby.

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{100}$, přičemž
$X_i = 1$, když i-tá osoba používá zahraniční zubní kartáček a
$X_i = 0$ jinak,
$i = 1, ..., 100$.
Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem.
Pak $100.0,34.0,66 = 22,44 > 9$.
Dosadíme do vzorce: $d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}$, tedy
$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}1,96 = 0,2472$, $h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}1,96 = 0,4328$.
S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \vartheta < 0,4328$.
Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 0,95 tedy můžeme očekávat, že v populaci je 24,7% až 43,3% osob, které používají zubní kartáček zahraniční výroby.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,34, Velikost vzorku: 100, Spolehlivost: 0,95 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,3400
Velikost vz. ve skup. (N)	100,0000
Interval spolehlivosti	0,9500
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,2482
Horní mez	0,4415
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,2501
Horní mez	0,4423
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,2472
Horní mez	0,4328

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.). Zjišťujeme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2472 až 0,4328.

Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:
Šířka 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ:

$$h-d=m+\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}-\left(m-\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}\right)=2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby h – d ≤ Δ, tedy $2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}\leq\Delta$. Odtud vyjádříme $n\geq\frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m, aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m)=m-m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1-2m=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$.V tomto případě volíme relativní četnost m = 0,5.

ad a) $n\geq\frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}=\frac{4\cdot0{,}5\cdot0{,}5\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}06^2}=\frac{4\cdot0{,}5\cdot0{,}5\cdot1{,}645^2}{0{,}06^2}=751{,}67$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

ad b) $n\geq\frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}=\frac{4\cdot0{,}5\cdot0{,}5\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}01^2}=\frac{4\cdot0{,}5\cdot0{,}5\cdot1{,}645^2}{0{,}01^2}=27060{,}25$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost m = 0,3.

ad a) $n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^{\ 2}}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot u_{0,95}^{\ 2}}{0{,}06^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}645^2}{0{,}06^2} = 631{,}41$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.
Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^{\ 2}}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot u_{0,95}^{\ 2}}{0{,}01^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}645^2}{0{,}01^2} = 22730{,}61$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť X_1, ..., X_n je náhodný výběr z rozložení A(ϑ) a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

H_0: ϑ = c proti alternativě H_1: $\vartheta \neq c$ (resp. H_1: $\vartheta < c$ resp. H_1: $\vartheta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \dfrac{M-c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$ (resp. $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$ resp. $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$).

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí ϑ = 0,01. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: ϑ = 0,01 proti oboustranné alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 1000. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
Testujeme hypotézu H_0: ϑ = 0,01 proti alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.
Známe: n = 1000, $m = \frac{16}{1000} = 0{,}016$, c = 0,01, α = 0,05, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1{,}96$
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: 1000.0,01.0,99 = 9,9 > 9.

a) Testování pomocí kritického oboru:
Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m-c}{\sqrt{\frac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \frac{0{,}016-0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}01\cdot 0{,}99}{1000}}} = 1{,}907$.
Kritický obor: $W = \left(-\infty, -u_{0,975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0,975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$. Protože 1,907 $\notin$ W, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 - \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{1000}}1{,}96 = 0{,}0082$$

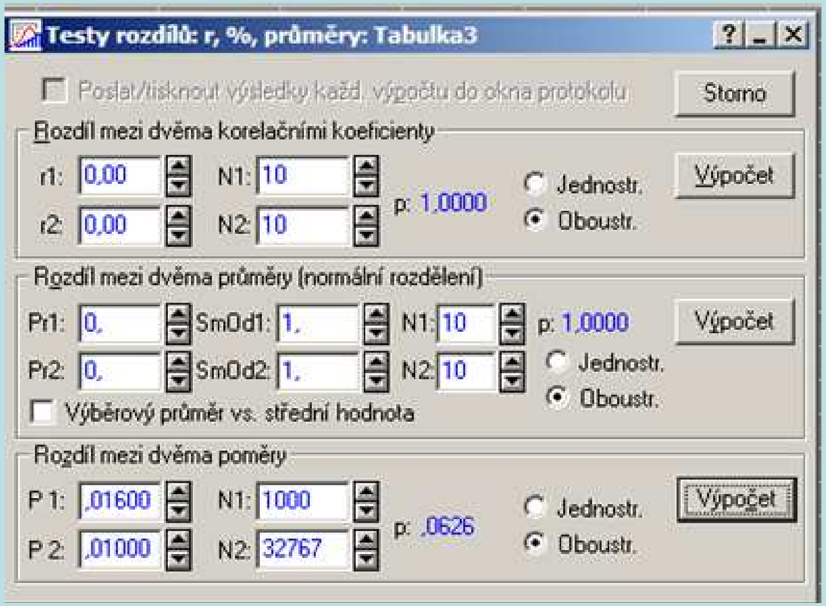
$$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 + \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{1000}}1{,}96 = 0{,}0238$$

Protože číslo c = 0,01 leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty
Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:
p = 2 min{ Φ(1,907), 1–Φ(1,907) } = 2 min { 0,97104, 1 – 0,97104 } = 0,05792.
Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob, tj. u 60%. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_{40}$, přičemž

$X_i = 1$, když terapie u i-tého pacienta byl úspěšná a

$X_i = 0$ jinak,

$i = 1, \ldots, 40$.

Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta \leq 0{,}5$ proti pravostranné alternativě H_1: $\vartheta > 0{,}5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0{,}6$, $c = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1{,}645$

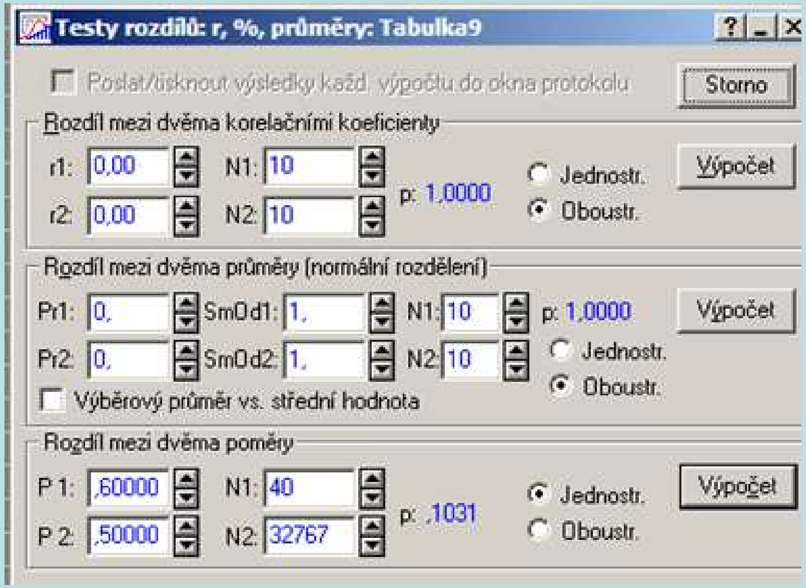
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $40.0{,}6.0{,}4 = 9{,}6 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m-c}{\sqrt{\dfrac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \dfrac{0{,}6-0{,}5}{\sqrt{\dfrac{0{,}5\cdot 0{,}5}{40}}} = 1{,}2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0,95}, \infty) = \langle 1{,}645, \infty)$.

Protože $1{,}2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:



Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy větší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.