4 Pravděpodobnostní funkce, hustoty a distribuční funkce-OSNOVA

4.1 Základy psti

- Motivace:
  - snaha popsat reálnou situaci nějakým známým pravděpodobnostním rozdělením (normální, binomické, poissonovo)
  - důvod: reálnou situaci popíšeme nějakým známým rozdělením → parametry rozdělení odhadneme z rálné situace → nové závěry stanovíme na základě vlastností známého rozdělení
- každý experiment je založen na *náhodném pokusu*
  - výzkum: výška člověka: náhodný pokus ... změříme 1 člověka;
  - výzkum: oblíbená značka auta ... zeptáme se jednoho náhodného muže;
  - výzkum: které číslo padne na kostce ... hodíme kostkou;
- *základní prostor* Ω ... množina všech možných výsledků
  - výška člověka ... $0 - \infty$; $0 - 4m$;
  - auta ... škoda, bmw, VW, mazda, jiné;
  - kostka ... 1-6;
- *možné výsledky* ω ... prvky základního prostoru
  - náhodný pokus - hodím kostkou - základní prostor = 6 možností : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - možné výsledky: $\{\omega_1 = 1; \omega_2 = 2; \omega_3 = 3; \omega_4 = 4; \omega_5 = 5; \omega_6 = 6\}$
- hodila jsem kostkou: nastal *jev*:
  - padla 1, padla 2, ... padla 6
  - padlo liché číslo
  - padlo číslo větší než 3 ...
  - *jev nemožný:* padne 7
  - *jev jistý:* padne 1,2,3,4,5,nebo 6
  - *jev opačný:* K jevu A padne 1-3 je opačný jev A' padne 4-6
  - *jevy neslučitelné:* padne 1 a padne sudé číslo
- *pravděpodobnost* - vyjadřuje, jak velká je naděje, že nějaký jev nastane
  - $\Pr(A) = \Pr(\text{nastal jev A})$
  - $\Pr(A) \in \langle 0; 1 \rangle$; resp. $\langle 0\,\% - 100\,\% \rangle$
  - příklad: hodím kostkou:
    - $\Pr(\text{padne 1}) = 1/6 = 16.7\,\%$
    - $\Pr(\text{padne liché číslo}) = 1/2 = 50\,\%$

    * Pr(padne 1,2,3,4,5 nebo 6) = 1 = 100 %
    * Pr(padne 7) = 0 %
- Vlastnosti psti:
    * pst je nezáporná ... $\Pr(A) \geq 0$
    * pst jistého jevu je vždy 1
        · $\Pr(padne\, 1,2,3,4,5\, nebo\, 6) = 1;$

    * jsou-li jevy **neslučitelné**, tak
        · $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ ... **aditivita**
        · $n = 3$ ... Pr(padne liché číslo) = Pr(padne 1 ∪ padne 3 ∪ padne 5) = 1/2
        · $\Pr(1) + \Pr(3) + \Pr(5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$
        · analogie pro $n = 2$: $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

    * (**nejsou-li jevy neslučitelné**, tak (pro $n = 2$)
        · $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
        · Jev A ... padne liché číslo, jev B ... padne 1 nebo 2)
        · $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3$
        · sloučení jevů A a B odpovídá možnosti 1, 2, 3, 5 a pst, že padne jedno z těchto 4 čísel je 4/6=2/3.)

    * jevy, které jsou časově, prostorově nebo věcně odděleny nazýváme **nezávislé**
    * jsou-li jevy **nezávislé**, tak
        · $\Pr(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$
        · **Př.:** $n = 2$ ... házíme dvěma kostkami: fialovou a žlutou
        · $\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1) * \Pr(A_2)$
        · Pr(na obou kostkách padne 1) = Pr(na fialové padne 1 ∩ na žluté padne 1) = 1/36 = 0.0277
        · $\Pr(1) * \Pr(1) = 1/6 * 1/6 = 1/36 = 0.0277$
        · **Př.:** $n = 3$ ... házíme třemi kostkami: modrou, zelenou, červenou
        · $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(A_1) * \Pr(A_2) * \Pr(A_3)$
        · Pr(na všech třech kostkách padne 1) = Pr(na modré padne 1 ∩ na zelené padne 1 ∪ na červené padne 1) = 1/216 = 0.00463
        · $\Pr(1) * \Pr(1) * \Pr(1) = 1/6 * 1/6 * 1/6 = 1/216 = 0.00463$
    * naopak, platí-li $\Pr(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \Pr(A_1) * \cdots * \Pr(A_n)$, tak jsou jevy $A_1, \ldots, A_n$ nezávislé.

- Je-li jev A' opačný k jevu A, pak $\Pr(A) + \Pr(A') = 1$ ... **komplementarita**
    * Jev A ... padne sudé číslo $\Pr(A) = 0.5$
    * Jev A' ... padne liché číslo $\Pr(A') = 0.5$
    * Jev: buď padne sudé číslo nebo padne liché číslo: $\Pr(A \cup A') = 1$

- spojení **komplementarity** a **nezávislosti**
  * chceme odpověď na otázku: Jaká je pst, že nastane **alespoň 1 z n jevů**? Za podmínky, že jevy jsou nezávislé.
  * nastane alespoň jeden jev: nastane 1, 2, 3, nebo více jevů (klidně všechny najednou)
  * Pst že nastane alespoň jeden = 1 − Pr(nenastane žádný).
  * $\Pr(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \Pr(A_1' \cap \cdots \cap A_n') = 1 - \Pr(A_1') * \cdots * \Pr(A_n')$

    Příklad 4.2. Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu při prvním, druhém a třetím výstřelu jsou postupně 0.4, 0.5 a 0.7. Jaká je pravděpodobnost, že střelec zasáhne cíl

    a. alespoň jedenkrát?

    ```
    # A1 ... zasah v prvnim vystrelu
    # A2 ... zasah v druhem vystrelu
    # A3 ... zasah ve tretim vystrelu
    #P(A1 v A2 v A3) = 1- P(NA1 a NA2  a NA3)

    pA1 <- 0.4
    pA2 <- 0.5
    pA3 <- 0.7

    pNA1 <- 1- pA1
    pNA2 <- 1- pA2
    pNA3 <- 1- pA3

    pst <- 1-pNA1*pNA2*pNA3
    round(pst, 4)
    ```

    právě třikrát?

    ```
    #P(A1 a A2 a A3)

    pst <- pA1*pA2*pA3
    round(pst, 4)
    ```

    právě jedenkrát?

    ```
    #P(A1 a NA2 a NA3) + P(NA1 a A2 a NA3) + P(NA1 a NA2 a A3)
    pst <- pA1*pNA2*pNA3 + pNA1*pA2*pNA3 + pNA1*pNA2*pA3
    round(pst, 4)
    ```

- *podmíněná pravděpodobnost* $\Pr(A|B)$
  - máme jevy A a B, přičemž $\Pr(B) \neq 0$ (jev B není nemožný)
  - $\Pr(A|B)$ … pravděpodobnost nastání jevu A za podmínky že nastal jev B
  - $\Pr(A|B) = \dfrac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$

    Příklad 4.3. Házíme jednou kostkou. Jaká je pst, že padne **2** za předpokladu, že padne sudé číslo?

    * A … Padne 2. B … padne sudé číslo … 1, 2, 3, 4, 5, 6;   1, 2, 3, 4, 5, 6

* $\Pr(A|B) = \dfrac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \dfrac{\Pr(\text{padne } 2 \cap \text{padne sudé číslo})}{\Pr(\text{padne sudé číslo})} = \dfrac{1/6}{1/2} = 1/3$

Házíme jednou kostkou. Jaká je pst, že padne **1** za předpokladu, že padne sudé číslo?

* A …Padne 1. B …padne sudé číslo …1, 2, 3, 4, 5, 6
* $\Pr(A|B) = \dfrac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \dfrac{\Pr(\text{padne } 1 \cap \text{padne sudé číslo})}{\Pr(\text{padne sudé číslo})} = \dfrac{0}{1/2} = 0$

Příklad 4.4. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li známo, že součet padnutých teček je dělitelný pěti?

```
# pocet moznosti pri hodu dvema kostkami je 36
# pocet moznosti, kdy soucet je 5 je 7: [1 4], [2 3], [3 2], [4 1], [6
   4], [5 5]
# ze vsech moznych moznosti splnuje podminku jedna moznost [1 1]
# P(A|B) ... padly dve petky za podminky soucet byl delitelny 5
pAaB <- 1/36
pB <- 7/36
pAB <- pAaB/pB

round(pAaB/pB, 4)
```

- *Bayesův vzorec*
  - umožňuje nám spočítat $\Pr(A|B)$ v případě, kdy neznáme $\Pr(A \cap B)$, ale známe / umíme získat $\Pr(B|A)$.
  - máme jevy A a B, přičemž $\Pr(B) \neq 0$ (jev B není nemožný), chceme spočítat $\Pr(A|B)$
  - $\Pr(A|B) = \dfrac{\Pr(B|A) * \Pr(A)}{\Pr(B)}$

Příklad 4.3. Předpokládejme, že máme školu s 60 % chlapců a 40 % dívek. Všichni chlapci nosí kalhoty. Z dívek nosí kalhoty polovina. Pozorovatel vidí z dálky studenta v kalhotách. Jaká je pravděpodobnost, že tento student je dívka?

```
# A ... student je divka
# B ... student nosi kalhoty = student je kluk * nosi kalhoty + student je
   divka * nosi kalhoty
# P(B|A) ... student nosi kalhoty | student je divka
# P(A|B)=P(B|A)*P(A)/P(B)

pA <- 0.4
pBA <- 0.5
pB <- 0.6*1+0.4*0.5
pAB <- pBA*pA/pB

round(pAB,4)
```