5 Pravděpodobnostní funkce, hustoty a distribuční funkce, výpočet pravděpodobností pomocí distribučních funkcí

5.1 Binomické rozdělení $\mathrm{Bin}(n, \theta)$

- $X \sim \mathrm{Bin}(n, \theta)$
- $X \ldots$ počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je vyjádřena parametrem θ.
- pravděpodobnostní funcke:
$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \ldots, n; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
- distribuční funkce:
$$F(x) = \sum_{t=0}^{x} \binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}.$$
- vlastnosti: $E(X) = n\theta$; rozptyl: $D(X) = n\theta(1-\theta)$
- dbinom(x, N, p), pbinom(x, N, p)

Příklad 5.1. Předpokládejme, že pravděpodobnost výskytu dermatoglifického vzoru *vír* na palci pravé ruky mužů české populace, Pr(vír) = 0.533. Pravděpodobnost výskytu ostatních vzorů na palci pravé ruky u mužů potom bude Pr(ostatní) =......................... . Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 muži bude výskyt vzoru *vír*

a. právě u šesti mužů;

b. nejvýše u šesti mužů;

c. alespoň u šesti mužů;

d. u dvou, tří, čtyř nebo pěti mužů.

X . . . .
Počet pokusů: n = ..., pravděpodobnost úspěchu: θ = ...

ad a. ....

....

```
## [1] 0.2290077
```

S pravděpodobností .... % bude výskyt vzoru *vír* právě u šesti mužů z deseti.

ad b. ....

....

```
## [1] 0.7686567
## [1] 0.7686567
```

S pravděpodobností .... % bude výskyt vzoru *vír* nejvýše u šesti mužů z deseti.

ad c. ....

....

```
## [1] 0.4603509
## [1] 0.4603509
```

S pravděpodobností .... % bude výskyt vzoru *vír* alespoň u šesti mužů z deseti.

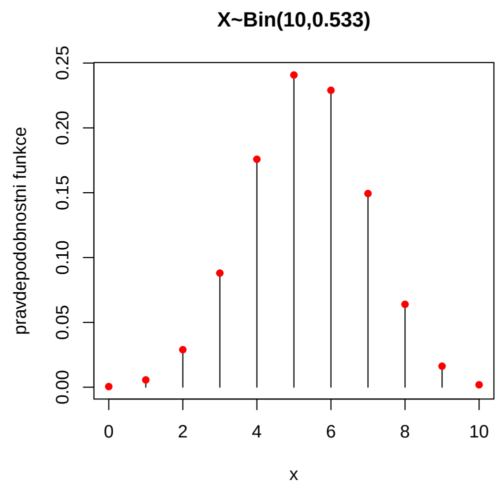
ad d. ....

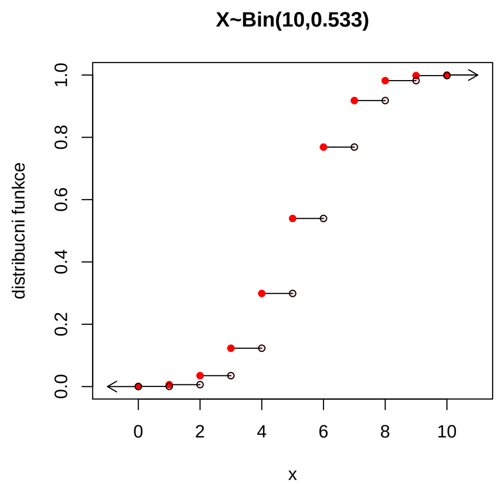
....

```
## [1] 0.5335248
## [1] 0.5335248
```

S pravděpodobností .... % bude výskyt vzoru *vír* u dvou, tří, čtyř nebo pěti mužů z deseti.

Příklad 5.2. Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Bin}(10, 0.533)$.





Analogickým způsobem můžeme získat grafy pravděpodobnostních a distribučních funkcí binomického rozdělení pro různá n a θ a sledovat vliv těchto parametrů na vzhled grafů.

Příklad 5.3. V rodině je 10 dětí. Za předpokladu, že chlapci i dívky se rodí s pravděpodobností 0.5 a pohlaví se formuje nezávisle na sobě, určete pravděpodobnost, že v této rodině je

a) právě 5 chlapců;

b) nejméně 3 a nejvýše 8 chlapců.

$n =$..........; úspěch = narození chlapce; pravděpodobnost úspěchu $\theta =$ ....;

ad a)
```
## [1] 0.2460938
```

ad b)
```
## [1] 0.9345703
```

Pravděpodobnost, že v 10 členné rodině je právě pět chlapců je .... %. Pravděpodobnost, že v 10 členné rodině je nejméně 3 a nejvýše 8 chlapců je .... %.

Příklad 5.4. Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět partií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?

Úspěch je výhra partie se stejně silným soupeřem, když remíza je vyloučena; pravděpodobnost úspěchu $\theta =$ ....;

a) $n_1 =$ .... , $x_1 =$ .... ;

b) $n_2 =$ .... , $x_2 =$ ....

ad a)
```
## [1] 0.25
## [1] 0.21875
```

Pravděpodobnější je, že se stejně silným soupeřem vyhrajeme .... partie/partií ze/z ....

Příklad 5.5. Dvacetkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padnou tři líce?

$n =$........... ; úspěch je padnutí tří líců při hodu třemi mincemi; $\theta =$ .... ;

```
## [1] 0.9307912
```

Pravděpodobnost, že v alespoň jednom hodu padnou tři líce je .... %.

5.2 Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$

- $X \sim Po(\lambda)$
- Náhodná veličina X udává počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu, přičemž k událostem dochází náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Parametr $\lambda > 0$ je střední počet těchto událostí. Píšeme $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.
- pravděpodobnostní funkce:
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & \text{pro x=0,1,...;} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$
- distribuční funkce:
$$F(x) = \sum_{t=0}^{x} \frac{\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}. \tag{2}$$
- vlastnosti: $E(X) = \lambda$; rozptyl: $D(X) = \lambda$
- dpois(x, lambda), ppois(x, lambda)

Příklad 5.6. Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozdělením Po(2). Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k alespoň jedné poruše?

X ... .;

časová jednotka ... .; $X \sim \mathrm{Po}(\lambda =$ ....);

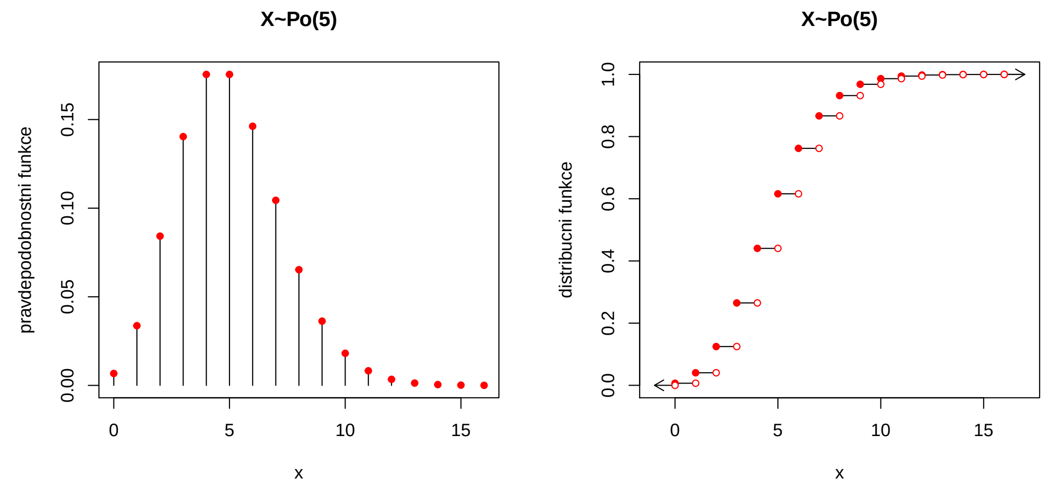
$\mathrm{P}(X \geq 1) =$ .... = ... = ... = ... = ...

....

```
## [1] 0.8646647
## [1] 0.8646647
```

Pravděpodobnost, že během směny dojde k alespoň jedné poruše je .... %.

Příklad 5.7. Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \text{Po}(5)$.



Příklad 5.8. Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí

a. právě jeden hovor?

```
## [1] 0.3678794
```

b. alespoň dva hovory?

```
## [1] 0.2642411
```

c. nejméně tři a nejvýše čtyři hovory?

```
## [1] 0.07664155
## [1] 0.07664155
```

d. nejvýše pět hovorů?

```
## [1] 0.9994058
```

X ....;

časová jednotka ....; $X \sim \text{Po}(\lambda =$ ....);

Pravděpodobnost, že během 4 minut zapojí ústředna právě jeden hovor je .... %. Pravděpodobnost, že během 4 minut zapojí ústředna právě alespoň dva hovory je .... %. Pravděpodobnost, že během 4 minut zapojí ústředna nejméně tři a nejvýše čtyři hovory je .... %. Pravděpodobnost, že během 4 minut zapojí ústředna právě nejvýše pět hovorů je .... %.