5 Spojité náhodné veličiny

- spojitá náhodná veličina: hustota, distribuční funkce
- graf hustoty, pst je vyjádřena jako plocha pod křivkou

5.1 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Náhodná veličina $X \sim (\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

- Pro $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ se jedná o standardizované normální rozdělení, píšeme $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Hustota má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2}$$

- $E[X] = \mu$, $D[X] = \sigma^2$
- dnorm(x, mu, sigma); pnorm(x, mu, sigma)

Příklad 5.1. Na základě datového souboru obsahujícího osteometrická data klíční kosti (clavicula) angického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916) byla odhadnuta střední hodnota a směrodatná odchylka délky pravé klavikuly u mužů. Střední hodnota $\mu = 151.74$ mm, směrodatná ochylka $s = 11$ mm. Za předpokladu, že data pochází z normálního rozdělení vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude

a. rovná 150 mm;

....

....

```
data <- read.delim('paired-means-clavicle2.txt', header=T)
#head(data)
length.l <- data$length.L
length.rm <- data$length.R[data$sex=='m']

m <- mean(length.rm) # 152
s <- round(sd(length.rm)) # 11
mu <- m
sigma <- 11
0
```

b. menší než 140 mm;

....

....

```
pnorm(140, mu, sigma)
```

c. větší než 160 mm;

....

....

```
1-pnorm(160,mu, sigma)
```

d. v rozmezí 140–160 mm.

....

....

```
pnorm(160, mu, sigma)-pnorm(140, mu, sigma)
```

X . . . .

$X \sim N($..............................., ...$)$.

ad a. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude rovná 150 mm je ...., protože data pochází z normálního rozdělení, což je .... typ rozdělení a proto $\Pr(X = 150) =$ ....

ad b. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude menší než 140 mm je ....

ad c. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude větší než 160 mm je ....

ad d. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude v rozmezí 140–160 mm je ....

5.2 Aplikace Moivrovy a Laplaceovy věty

- $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezáv. náh. veličiny, $X_1 \sim Alt(\theta), \ldots X_n \sim Alt(\theta)$. Pak jejich součet $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má binomické rozdělení $\mathrm{Bin}(n, \theta)$. Střední hodnota veličiny Y_n je $EY_n = n\theta$, rozptyl $DY_n = n\theta(1-\theta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná náhodná veličina $\dfrac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozldělením $Y_n \sim N(0, 1)$.

Příklad 5.2. Pravděpodobnost výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* Pr(vír) = 0.533. Vypočítejte,

I. jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír*

a. alespoň u 6 mužů;

```
# a)
p <- 0.553
N <- 10
1-pbinom(5, N, p)
# b)
1-pnorm(5, N*p, sqrt(N*p*(1-p)))
```

b. u dvou, tří, čtyř, nebo pěti mužů.

```
# a)
p <- 0.553
N <- 10
sum(dbinom(2:5, N, p))
#pbinom(5, N, p)-pbinom(1, N, p)
# b)
pnorm(5, N*p, sqrt(N*p*(1-p)))-pnorm(1, N*p, sqrt(N*p*(1-p)))
```

II. jaká je pravděpodobnost, že mezi 300 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír*

a. alespoň u 180 mužů;

```
# a)
p <- 0.553
N <- 300
x <- 180
1-pbinom(x, N, p)
# b)
1-pnorm(x, N*p, sqrt(N*p*(1-p)))
```

b. u 160–180 mužů.

```
# a)
p <- 0.553
N <- 300
sum(dbinom(160:180, N, p))
#pbinom(180, N, p)-pbinom(159, N, p)
# b)
pnorm(180, N*p, sqrt(N*p*(1-p)))-pnorm(159, N*p, sqrt(N*p*(1-p)))
```