5 Spojité náhodné veličiny

5.1 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Náhodná veličina $X \sim (\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

- Pro $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ se jedná o standardizované normální rozdělení, píšeme $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Hustota má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2}$$

- $E[X] = \mu$, $D[X] = \sigma^2$
- dnorm(x, mu, sigma); pnorm(x, mu, sigma)

Příklad 5.1. Na základě datového souboru obsahujícího osteometrická data klíční kosti (clavicula) angického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916) byla odhadnuta střední hodnota a směrodatná odchylka délky pravé klavikuly u mužů. Střední hodnota $\mu = 151.74$ mm, směrodatná ochylka $s = 11$ mm. Za předpokladu, že data pochází z normálního rozdělení vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude

a. rovná 150 mm,

b. menší než 140 mm,

c. větší než 160 mm,

d. v rozmezí 140-160 mm.

X . . . .

$X \sim N($..............................., ...$)$.

a. rovná 150 mm;

....

....

b. menší než 140 mm;

....

....

c. větší než 160 mm;

....

....

d. v rozmezí 140–160 mm.

....

....

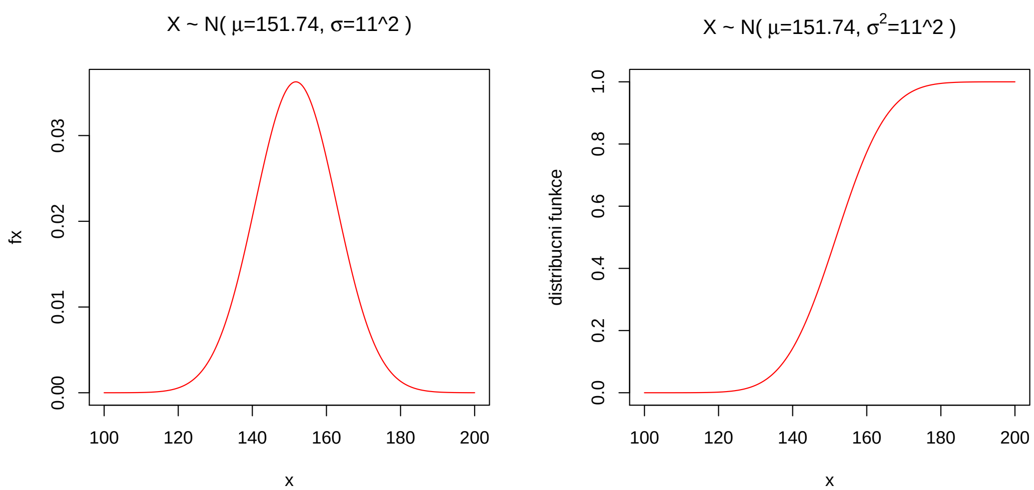
ad a. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude rovná 150 mm je ...., protože data pochází z normálního rozdělení, což je .... typ rozdělení a proto $\Pr(X = 150) =$ ....

ad b. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude menší než 140 mm je ....

ad c. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude větší než 160 mm je ....

ad d. Pravděpodobnost, že délka pravé klavikuly u mužů bude v rozmezí 140–160 mm je ....

Příklad 5.2. Nakreslete graf hustoty a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim N(151.74, 11)$.



Příklad 5.3. Výsledky u přijímacích zkoušek na jistou VŠ jsou normálně rozděleny s parametry $\mu = 550$ bodů, $\sigma = 100$ bodů. S jakou pravděpodobností bude mít náhodně vybraný uchazeč alespoň 600 bodů?

X . . . .; $X \sim N($...................., ...$)$.

$$\Pr(X \geq 600) = 1 - \Pr(X \leq 600) = 1 - \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{600-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(U \leq \frac{600-550}{100}\right)$$
$$= 1 - \Pr(U \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.3085.$$

....

....

```
[1] 0.3085375
[1] 0.3085375
```

Příklad 5.4. Životnost baterie v hodinách je náhodná veličina, která má normální rozdělení se střední hodnotou 300 hodin a směrodatnou odchylkou 35 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná baterie bude mít životnost

a) alespoň 320 hodin? (0.2838546)

b) nejvýše 310 hodin? (0.6124515)

5.2 Aplikace Moivrovy a Laplaceovy věty

- $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezáv. náh. veličiny, $X_1 \sim Alt(\theta), \ldots X_n \sim Alt(\theta)$. Pak jejich součet $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má binomické rozdělení $\mathrm{Bin}(n, \theta)$. Střední hodnota veličiny Y_n je $EY_n = n\theta$, rozptyl $DY_n = n\theta(1-\theta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná náhodná veličina $\dfrac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozdělením $Y_n \sim N(0,1)$.

Příklad 5.5. Pravděpodobnost výskytu dermatoglyfického vzoru *vír* $\Pr(\text{vír}) = 0.533$. Vypočítejte,

I. jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír*

   a. alespoň u 6 mužů;

   b. u dvou, tří, čtyř, nebo pěti mužů.

II. jaká je pravděpodobnost, že mezi 300 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír*

   a. alespoň u 180 mužů;

   b. u 160–180 mužů.

I-a. Pst, že mezi 10 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír* aspoň u šesti mužů je ....

I-b. Pst, že mezi 10 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír* 2–5 mužů je ....

II-a. Pst, že mezi 300 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír* aspoň u 180 mužů je ....

II-b. Pst, že mezi 300 muži bude výskyt dermatoglifického vzoru *vír* 160–180 mužů je ....

Příklad 5.6. Pravděpodobnost úspěchu při jednom pokusu je 0.3. S jakou pravděpodobností lze tvrdit, že počet úspěchů ve 100 pokusech bude v mezích od 20 do 40? Výpočet proveďte (i.) **přesně** a (ii.) **pomocí aproximace normálním rozdělením**.

```
[1] 0.9786144
[1] 0.9772632
```

Příklad 5.7. Pravděpodobnost, že zakoupený elektrospotřebič bude vyžadovat opravu během záruční doby, je rovna 0.2. Jaká je pravděpodobnost, že během záruční doby bude nutno ze 400 prodaných spotřebičů opravit 97 a více? Výpočet proveďte (i.) **přesně** a (ii.) **pomocí aproximace normálním rozdělením**.

```
[1] 0.02138855
[1] 0.02275013
```

Příklad 5.8. Pravděpodobnost, že určitý typ výrobku má výrobní vadu, je 0.05. Jaká je pravděpodobnost, že ze série 1000 výrobků bude mít výrobní vadu nejvýše 70? Výpočet proveďte (i.) **přesně** a (ii.) **pomocí aproximace normálním rozdělením**.

```
[1] 0.9976697
[1] 0.9981455
```