8 Testování hypotéz

- Datový soubor = Náhodný výběr → stanovíme předpoklady → ověřujeme, zda platí;
  - předpoklady
    - o charakteristikách: μ, σ^2, σ, ...
    - o rozdělení: normální, poissonovo, exponenciální,...
    - o nezávislosti dvou náh. výběrů...
- REÁLNÁ DATA → jsou variabilní → dva náhodné výběry zkoumající totéž → výsledek nikdy nevyjde stejný
- zkoumáme, zda se vzorky liší pouze variabilitou, nebo je skutečně rozdíl v hodnotách parametru

Postup testování hypotéz:

1. Formulace problému ... přesná, jednoznačná
2. stanovení nulové hypotézy H_0
   - hypotéza o níž test rozhodne, zda se zamítne, nebo ne
   - 1 náhodný výběr a publikovaná hodnota c; $H_0 : \mu = c$
3. stanovení alternativní hypotézy H_1
   - alt. hypotézu přijímáme, pokud H_0 zamítáme
     - $H_{11} : \mu_1 \neq c$ (oboustranná alt.);
     - $H_{12} : \mu_1 < c$ (levostranná alt.);
     - $H_{13} : \mu_1 > c$ (pravostranná alt.).
4. volba hladiny významnosti α
   - pst(riziko), že H_0 zamítneme, když platí - snažíme se tuto hodnotu snížit na minimum
5. provedení měření
6. Testování H_0 (tři různé způsoby):
   - Kritický obor
   - Interval spolehlivosti
   - p-hodnota
7. rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí H_0
8. interpretace výsledků

8.1 Testování pomocí kritického oboru

- Testujeme hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$
- vybereme vhodnou testovací statistiku T_0
- vypočítáme hodnotu testovací statistiky t_0
- stanovíme kritický obor W:
  - oboustranná alt.: $W = (T_{min}; K_{\alpha/2}\rangle \cup \langle K_{1-\alpha/2}; T_{max})$
  - pravostranná alt.: $W = \langle K_{1-\alpha}; T_{max})$
  - levostranná alt.: $W = (T_{min}; K_{\alpha}\rangle$
- Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině význ. α.

8.2 Testování pomocí IS:

- Testujeme hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$
- Sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ IS:
  - oboustranná alt. $H_{11} \to$ oboustranný IS
  - levostranná alt. $H_{12} \to$ pravostranný IS
  - pravostranná alt. $H_{13} \to$ levostranný IS
- pokud $c \in IS$, H_0 nezamítáme na hladině význ. α.

Testování pomocí p-hodnoty

- Testujeme hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$
- p-hodnota:
  - pro oboustrannou alt. H_{11}: $p = 2\min\{P(T_0 \leq t_0); P(T_0 > t_0)\}$
  - pro levostrannou alt. H_{12}: $p = P(T_0 \leq t_0)$
  - pro pravostrannou alt. H_{13}: $p = P(T_0 > t_0) = 1 - P(T_0 \leq t_0)$
- Je-li $p \leq \alpha$, H_0 zamítáme na hladině význ. α.

Příklad 8.1. Víme, že výška hochů ve věku 9.5 až 10 let má normální rozdělení s neznámou střední hodnotou μ a známým rozptylem $\sigma^2 = 39.112$ cm^2. Dětský lékař náhodně vybral 15 hochů uvedeného věku, změřil je a vypočítal realizaci výběrového průměru $m = 139.13$ cm. Podle jeho názoru by výška hochů v tomto věku neměla přesáhnout 142 cm s pravděpodobností 0.95. Lze tvrzení lékaře akceptovat?

Testujeme $H_0 : \mu \geq 142$ proti $H_1 : \mu < 142$ na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.
Pro úlohy o střední hodnotě normálního rozdělení při známém rozptylu používáme pivotovou statistiku

$$U = \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1).$$

Testovací statistika bude mít tedy tvar

$$T_0 = \frac{M - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1).$$

Vypočítáme realizaci testového kritéria:

$$t_0 = \frac{139.13 - 142}{\frac{\sqrt{39.112}}{\sqrt{15}}} = -1.7773.$$

```
sigma <- sqrt(39.112)
n <- 15
m <- 139.13
c <- 142
alpha <- 0.05

# ad a)
t0 <- (m-c)/(sigma/sqrt(n))
qnorm(alpha)
```

Stanovíme kritický obor: $W \in (-\infty, u_\alpha\rangle = (-\infty, u_{0.05}\rangle = (-\infty, -u_{0.95}\rangle = (-\infty, -1.6449\rangle$. Protože $-1.7773 \in W$, nulovou hypotézu H_0 zamítáme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Tvrzení lékaře lze tedy akceptovat s rizikem omylu 5 %.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.
Meze $100(1 - \alpha)$ % empirického pravostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 jsou

$$(-\infty, h) = (-\infty, m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha).$$

V našem případě dostáváme:

$$h = 139.13 - \frac{\sqrt{39.112}}{\sqrt{15}} u_{0.05} = 139.13 + \frac{\sqrt{39.112}}{\sqrt{15}} 1.645 = 141.79.$$

```
hh <- m-(sigma/sqrt(n))*qnorm(alpha)
```

Protože $142 \notin (-\infty; 141.79)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0.05.

c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.

$$p = \Pr(T_0 \leq t_0) = \Phi(-1.7773) = 0.0378$$

```
pval <- pnorm(t0)
```

Jelikož $0.0378 \leq 0.05$, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0.05.

Testování normality

- Normalita = nepostradatelný předpoklad parametr. testů (jednovýběrových, párových, dvouvýběrových, ...)
- Testování normality
  - H_0: Data pochází z normálního rozd.
  - H_1 : Data nepochází z normálního rozd.
- Testy normality
  - Shairo-Wilkův test `shapiro.test()`
  - Lillie-Forsův test `lillie.test()` [`nortest`]
  - Anderson-Darlingův test `ad.test()` [`nortest`]
- výstup testů = p-hodnota: $p > \alpha \to H_0$ nezamítáme; $p \leq \alpha \to H_0$ zamítáme
- grafické ověření normality:
  - Q-Q plot `qqnorm` a `qqline`.

Párový test:

- porovnání rozdílů párových součástí objektu, párových orgánů člověka
- porovnání délky uší, výšky/šířky nadočnicového oblouku, zkoumání podobných rysů dvojčat apod.
- Nechť $(X_1, Y_1) \ldots (X_n, Y_n)$ je náh. výběr z dvourozměrného norm. rozd., přičemž $n \geq 2$. Střední hodnota znaku X je μ_1, střední hodnota znaku Y je μ_2.
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \to \mu_1 - \mu_2 = 0$
- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \to \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
- utvoříme rozdíly $Z_1 = X_1 - Y_1, \ldots, Z_n = X_n - Y_n$.
- $Z_1, \ldots Z_n$ je náh. výběr z norm. rozdělení $\to$ jednovýběrový test o μ, když σ^2 neznáme.