

9 Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozdělení a jednom náhodném výběru z alternativního rozdělení

9.1 Testy o dvou nezávislých náhodných výběrech

Nechť $X_{11} \dots X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21} \dots X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly a

$$S_*^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

je vážený průměr výběrových rozptylů.

1. Pivotová statistika

$$U = \frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 známe.

2. Pokud $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak pivotová statistika

$$T = \frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné.

3. Pokud $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak pivotová statistika

$$K = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$$

slouží k řešení úloh o neznámém společném rozptylu σ^2 .

4. Pivotová statistika

$$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

slouží k řešení úloh o $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Dvouvýběrové testy - Kritické obory

1. Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ_1^2, σ_2^2 známe. Nechť c je konstanta.

- Testujeme $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = c$ oproti $H_{11} : \mu_1 - \mu_2 \neq c$, případně $H_{12} : \mu_1 - \mu_2 < c$, či $H_{13} : \mu_1 - \mu_2 > c$.
- Takovýto test se nazývá *dvouvýběrový z-test*
- Realizace testové statistiky:

$$t_0 = \frac{(m_1 - m_2) - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

- kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11} : $W = (-\infty; u_{\alpha/2}) \cup \langle u_{1-\alpha/2}; \infty \rangle$
- kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12} : $W = (-\infty; u_\alpha)$
- kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13} : $W = \langle u_{1-\alpha}; \infty \rangle$

u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... `qnorm(alpha,0,1)`.

2. Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma^2)$, a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.

- Testujeme $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = c$ oproti $H_{11} : \mu_1 - \mu_2 \neq c$, případně $H_{12} : \mu_1 - \mu_2 < c$, či $H_{13} : \mu_1 - \mu_2 > c$.
- Takovýto test se nazývá *dvouvýběrový t-test*
- Realizace testové statistiky:

$$t_0 = \frac{(m_1 - m_2) - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

- kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11} : $W = (-\infty; t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)) \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2); \infty \rangle$
- kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12} : $W = (-\infty; t_\alpha(n_1 + n_2 - 2))$
- kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13} : $W = \langle t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2); \infty \rangle$

$t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti ... `qt(alpha,n1+n2-2)`.

3. -

4. Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma^2)$, a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$.

- Testujeme $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ oproti $H_{11} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$, případně $H_{12} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ či $H_{13} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$.
- Takovýto test se nazývá *F-test*.
- Realizace testové statistiky:

$$t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11} : $W = (0; F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)) \cup \langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1); \infty \rangle$
- kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12} : $W = (0; F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1))$
- kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13} : $W = \langle F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1); \infty \rangle$

$F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$ je α kvantil Fisher-Snedecorova rozdělení o $n_1 - 1$ a $n_2 - 1$ stupních volnosti ... `qf(alpha,n1-1,n2-1)`.

Intervaly spolehlivosti

1. IS pro $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 známe (využití statistiky U)

(a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha/2}; m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{\alpha/2} \right)$$

(b) Levostranný IS ($d; \infty$):

$$\left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha}; \infty \right)$$

(c) Pravostranný IS ($-\infty; h$):

$$\left(-\infty; m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{\alpha} \right)$$

u_{α} je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... `qnorm(alpha,0,1)`.

2. IS pro $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné (využití statistiky T)

(a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2); m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \right)$$

(b) Levostranný IS ($d; \infty$):

$$\left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2); \infty \right)$$

(c) Pravostranný IS ($-\infty; h$):

$$\left(-\infty; m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \right)$$

$t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti ... `qt(alpha,n1+n2-2)`.

3. IS pro společný neznámý rozptyl σ^2 (využití pivotové statistiky K)

(a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n_1 + n_2 - 2)}; \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n_1 + n_2 - 2)} \right)$$

(b) Levostranný IS (d, ∞)

$$\left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n_1 + n_2 - 2)}; \infty \right)$$

(c) Pravostranný IS ($-\infty; h$)

$$\left(-\infty; \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi_{\alpha}^2(n_1 + n_2 - 2)} \right)$$

$\chi_{\alpha}^2(n_1 + n_2 - 2)$ je α kvantil χ^2 rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti ... `qchisq(alpha,n1+n2-2)`.

4. IS pro podíl rozptylů $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (využití pivotové statistiky F)

(a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}; \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

(b) Levostranný IS ($d; \infty$)

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}; \infty \right)$$

(c) Pravostranný IS ($-\infty; h$)

$$\left(-\infty; \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

$F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ je α kvantil Fisher-Snedecorova rozdělení o $n_1 - 1$ a $n_2 - 1$ stupních volnosti ... `qf(alpha,n1-1,n2-1)`.

9.2 Test o jednom náhodném výběru z alternativního rozdělení

- n -krát nezávisle na sobě provádíme tentýž pokus; sledujeme nastání úspěchu nějakého jevu
- pst nastání úspěchu je θ
- náh. výběr X_1, \dots, X_n , kde $X_i = 1$, pokud nastal úspěch, $X_i = 0$, pokud nenastal úspěch, je z alternativního rozdělení

$$X \sim \text{Alt}(\theta).$$

- bodový odhad parametru θ :

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

9.2.1 Podmínka dobré aproximace

$$n\theta(1 - \theta) > 9$$

- musí být splněna
- zaručuje nám spolehlivé testování a stanovení IS pro parametr θ alternativního rozdělení.

9.2.2 Testování hypotézy

- Nechť $X_1, \dots, X_n \sim \text{Alt}(\theta)$.
- Testujeme nulovou hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti alternativní hypotéze $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$.
- Nejprve ověříme podmínku dobré aproximace: $nc(1 - c) > 9$.

• Testování kritickým oborem

Testovací statistika

$$T_0 = \frac{M - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

1. kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11} : $W = (-\infty; u_{\alpha/2}) \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty$
2. kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12} : $W = (-\infty; u_{\alpha})$
3. kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13} : $W = \langle u_{1-\alpha}; \infty$

u_{α} je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... `qnorm(alpha,0,1)`.

• Testování intervalem spolehlivosti

1. oboustranná alt. $H_{11} \rightarrow$ oboustranný $100(1 - \alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro parametr θ

$$(d, h) = \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}; m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{\alpha/2} \right)$$

2. levostranná alt. $H_{12} \rightarrow$ pravostranný $100(1 - \alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro parametr θ

$$(-\infty, h) = \left(-\infty; m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{\alpha} \right)$$

3. pravostranná alt. $H_{13} \rightarrow$ levostranný $100(1 - \alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro parametr θ

$$(d, \infty) = \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha}; \infty \right)$$

u_{α} je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... `qnorm(alpha,0,1)`.

• Testování pomocí p -hodnoty

1. oboustranná alt. $H_{11} \rightarrow p\text{-val} = 2 \min\{\Pr(T_0 \leq t_0), \Pr(T_0 > t_0)\}$
2. levostranná alt. $H_{12} \rightarrow p\text{-val} = \Pr(T_0 \leq t_0)$
3. pravostranná alt. $H_{13} \rightarrow p\text{-val} = \Pr(T_0 > t_0) = 1 - \Pr(T_0 \leq t_0)$