HISTORIA MATHEMATICA 12 (1985), 123-141

Felix Klein's *"Erlanger Antrittsrede"*

A Transcription with English Translation and Commentary

DAVID E. ROWE*

Pace University, Pleasantville, New York 10570

One of Felix Klein's leading interests was the role of mathematics education not only in the German universities but in the secondary schools as well. Klein played a leading role in the educational reform movements that flourished during the twenty-year period prior to World War I, and in 1908 he was elected President of the International Mathematics Instruction Commission. The *"Erlanger Antrittsrede"* of 1872, presented herein, gives a clear expression of Klein's views on mathematics education at the very beginning of his career. While previous writers, including Klein himself, have stressed the continuity between the *Antrittsrede* and his later views on mathematics education, the following commentary presents an analysis of the text together with external evidence supporting exactly the opposite conclusion. © 1985 Academic Press, Inc.

Eines der Leitmotive im Leben Felix Kleins waren sein Interesse und seine Bemühungen um den mathematischen Unterricht in Schule und Hochschule. Klein spielte eine führende Rolle in der Unterrichtsreformbewegung der zwanzig Jahre vor dem ersten Weltkrieg. Im Jahre 1908 wurde er zum Vorsitzenden der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission gewählt. Seine hier wiedergegebene Erlanger Antrittsrede von 1872 ist ein klarer Ausdruck von Kleins Gedanken zu diesem Thema am Anfang seiner Karriere. Frühere Autoren, darunter Klein selbst, haben die Kontinuitäten zwischen der Antrittsrede und seinen späteren Ideen betont. Der folgende Kommentar dagegen kommt aufgrund einer Analyse des Textes und weiterer Belege zum gegenteiligen Schluß. © 1985 Academic Press, Inc.

Une des préoccupations majeures de Felix Klein fut le rôle de l'enseignement des mathématiques, pas seulement dans les universités allemandes mais aussi dans l'enseignement secondaire. Klein eut une influence déterminante sur les mouvements de réforme de l'enseignement qui fleurirent durant les vingt années précédant la première guerre mondiale, et en 1908 fut élu président de la commission internaionale sur l'enseignement des mathématiques. L' "Erlager Antrittsrede" de 1872, présenté ci-dessous, exprime clairement les idées de Klein sur l'enseignement des mathématiques au tout début de sa carrière. Alors que les analyses précédentes, y compris de Klein lui même, ont souligné la continuité entre l'Antrittsrede et ses points de vue ultérieurs sur l'enseignement des mathématiques, le commentaire qui suit présente une analyse du texte ainsi que d'autres documents conduisant à la conclusion contraire. © 1985 Academic Press, Inc.

As was pointed out in [Rowe 1983], Felix Klein's *Erlanger Programm* [Klein 1872] has often been mistaken for the speech Klein gave on accepting the position of *Professor Ordinarius* at Erlangen, his *"Erlanger Antrittsrede."* What is more, those commentators who have avoided this error and emphasized the significance

* Partially supported by grants from the Alexander von Humboldt-Stiftung and the National Science Foundation.

0315-0860/85 $3.00

of Klein's speech in its own right have presented widely divergent interpretations of its actual content [1]. Partly to clarify this situation, but primarily because of its own intrinsic interest, this speech is presented herein along with the following English translation and commentary. Klein's "*Erlanger Antrittsrede*" can also be found in [Klein 1977], where the transcription appears alongside a photocopy of the original manuscript [2]. Portions of the text can also be found in [Lorey 1916, 150, 165–166], although these deviate somewhat from the original. The author wishes to express thanks to the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen for permission to publish the manuscript and to quote from other documents in the Klein *Nachlass*.

COMMENTARY

In his recent study of Felix Klein's role in the educational reform movements of the 1890s and early 1900s, Lewis Pyenson wrote that "the text of Klein's unpublished inaugural lecture of 1872 was as probing as his printed message [i.e., the *Erlanger Programm*]. He ranged over all the issues that two decades later would come to dominate the mathematics reform movement" [Pyenson 1983, 54]. Another recent commentator who has stressed the importance of Klein's "*Erlanger Antrittsrede*," Karl-Heinz Manegold, maintains that this speech already contained the essential elements of Klein's later teaching and organizational activity [Manegold 1970, 92]. Indeed, similar remarks have been made by a number of writers who have mentioned Klein's *Antrittsrede*, many of whom follow Klein's own testimony in his Autobiographical Sketch of 1923 [3], where he wrote that the viewpoints and proposals in the *Antrittsrede* "have also remained the essential guiding principles for my later activity" [Klein 1923, 18].

Unfortunately, this testimonial of Klein's is highly unreliable, and gives a distorted impression of the actual content of his speech. On the basis of his commentary, one should expect to find a "detailed program" for his teaching plans in Erlangen, including among other things "regularly repeated elementary lectures . . . along with the special lectures intended for a small number of serious students . . . backed up by means of exercises and seminar activity . . . as well as the establishment of . . . a reading room and library with open-shelves [*Präsenzbibliothek*] . . . which would make it possible for students to study the published literature" [Klein 1923, 18]. When one searches the text itself, however, the "detailed program" Klein promises seems to have mysteriously disappeared. The greater part of his speech is taken up instead by a rather rambling attempt to characterize the nature of mathematical thought and its relation to other disciplines, particularly physics. Only scant mention is made of any concrete proposals for new teaching facilities and conditions, and not a word, moreover, is devoted to the "repeated elementary lectures . . . special lectures . . . reading room and library with open-shelves."

One might surmise from this that Klein's later account of the *Antrittsrede* must have been written without direct reference to the manuscript, and that his memory of the actual content of the speech was probably blurred by subsequent events.

The point to be emphasized, however, is that those writers who have utilized this account in claiming there is a continuity between the *Antrittsrede* and Klein's later views on mathematics education have been basing their argument on an unreliable source. That this contention is faulty can be shown most directly by referring to another document in the Klein *Nachlass*—the Autobiographical Notes from 1913 [4]. These contain a summary of the *Antrittsrede* in fifteen points together with four additional, rather illuminating marginal remarks. This unpublished document, unlike the commentary on the *Antrittsrede* in his Autobiographical Sketch of ten years later, presents a very accurate synopsis which leaves no doubt that this time Klein was writing with the text in hand [5]:

1. Geringe Verbreitung der Mathematik.
2. Fatale Zweiteilung unserer Bildung.
3. Zweck d[es] math[ematischen] U[nterrichts] überhaupt u[nd] s[eine] Form a[n] d[en] Universitäten.
4. Math[ematik] als Selbstzweck. Genuß. Fortschreiten der Wissenschaft. Math[ematik] + Musik.
5. Anwendungen, zumal zum Aufbau anderer Wissenschaften.
6. G[ebrauch] mathematische Physik. In verschiedener Fassung immer dieselbe Rolle [6]—wie bei der Geometrie.
7. Umgekehrt Bedeutung der anderen Disziplinen für die Math[ematik]. "physikalische Mathematik."
8. Math[ematik] als formales Bildungsmittel, gerade auch für Naturwissenschaftler. (u[nd] Mediziner!).
9. *Welche* Vorlesung, ist gleichgültig.
10. An den Gymnasien auszubauen: Interesse, Leben und Geist. Kein neuer Stoff.
11. Daher zweckmässige Ausbildung der Lehramtskandidaten wichtig.
12. Wir verlangen Spezialarbeit von Jedem.
13. Ergänzung der Vorlesungen durch Einrichtungen = math[ematisches] Institut. (Ausdruck von Ehlers).
14. Vorträge im Seminar, Zeichnen und Modellieren.
15. Vergleich mit Polytechnikum, für die U[niversität] ungünstig.

The four marginal remarks read as follows:

Referring to point 6: "Ich würde jetzt die Beherrschung der spez[iell] Anschauung doch auch dem Math[ematik] zuweisen."

Referring to points 9 and 10: "Da bin ich nun anderen Sinnes geworden."

Referring to points 14 and 15: "Zahlenrechnen u[nd] Messen liegen ganz außerhalb meines Gesichtskreises."

At the bottom: "Man arbeitet, wenn man jung ist, soviel rascher und unstetiger. Man glaubt auch die Ideale bald erreicht."

One sees at a glance that this is no "detailed program" for Klein's teaching plans at Erlangen: of the fifteen theses, only three (Nos. 12–14) deal with actual proposals for mathematics students at the university. The key points to consider are numbers 8, 9, and 10. Points 8 and 9 deal with Klein's advice to students of the natural sciences and medicine, quoted earlier in another connection. The marginal note again confirms that by 1913 Klein was of a different opinion. The tenth point, a plea for livelier teaching rather than new subject matter in the schools, is also rejected, which is not very surprising when one remembers that Klein later campaigned actively for calculus instruction in the *Gymnasien* [Tobies 1979]. The final remark, "When one is young, one works much more hastily and unsteadily, one also believes the ideals will soon be attained," has a melancholy wisdom about it that suggests the distance Klein felt from the impetuous idealism of his youth.

Lewis Pyenson's account of the *"Erlanger Antrittsrede"* concentrates primarily on those portions that stress the interrelationship between mathematics and physics (points 5–9 in Klein's synopsis above). According to Pyenson, Klein later put this educational program into practice by diverting a grass roots reform movement in experimental physics that called for a new science curriculum with substantial laboratory work in the secondary schools throughout Germany. Sensing the threat this posed to the privileged discipline of pure mathematics, Klein and his cohorts "devoted all their energies to redirecting the reform movement toward recognizing how pure mathematics could organize learning to achieve both practical and spiritual goals in physical sciences and industry" [Pyenson 1983, 126]. One of the problems with this thesis is that Pyenson fails to emphasize the degree to which Klein's views regarding pure mathematics soon departed from the neohumanist ideals set out in his *"Erlanger Antrittsrede."* The six years from 1875 to 1880 during which Klein taught at the *Technische Hochschule* in Munich were, in fact, decisive for his later development. The mathematics club that met every other Saturday concentrated its interests on topics at the interface of science and technology, and one of its members, Carl von Linde, was among Klein's staunchest allies throughout his career. At the end of this period, when Klein returned to a university career as Professor of Geometry at Leipzig, his views on mathematics education had already undergone substantial change. One need only read the *Antrittsrede* he delivered at Leipzig in 1880 in order to realize how far he had come from the views set down in his Erlangen speech eight years earlier.

It is interesting to note that Manegold's reading of the *"Erlanger Antrittsrede"* squares very nicely with Klein's *later* views on the mutual roles of mathematics, science, and technology in modern education. For example, he suggests that Klein's proposals for "constructive exercises" in suitable "practical courses" were set forth with two model institutions in mind: the École Polytechnique and the Eidgenössische Polytechnikum in Zürich. He cites the same passage from [Klein 1967] (which was based on lectures of 1914–1915) twice, in order to emphasize Klein's affinity with the tradition of the École Polytechnique and to compare his activities with those of its founder, Gaspard Monge [Manegold 1970, 88, 95–96]. Indeed, there is ample evidence in Klein's later writings indicating that he was a partisan of the teaching traditions at these two schools [Klein 1967, 63–66]. One also finds a certain antipathy toward the neohumanist tradition, which Klein wrote "supported the free development of the personality, a doctrine that turned interest decidedly away from the exact sciences" [Klein 1967, 93]. The question that needs to be considered, however, is whether or not these views accurately reflect the content of the *"Erlanger Antrittsrede."* According to Manegold, they do: he contends that Klein's point of departure in the *Antrittsrede*, rather than being "based on the neohumanistic conception of mathematics as a purely *formal* educational value [*Bildungswert*], centers on the power of functional thinking." There is little evidence, however, in the text to support this claim. In fact, the views in Klein's speech of 1872 are much closer to the traditional neohumanist position than they are to the modernist approach that came to be associated with his name shortly after the turn of the century.

Manegold passes over the long section on the aesthetic quality of mathematics in the *Antrittsrede* that begins with the assertion that "mathematics, like every science, is undertaken first of all for its own sake; it is motivated by the desire for that knowledge which mathematical study provides, or, if you prefer, through the enjoyment that is a consequence of that study." Instead, he quotes part of a later passage that begins, "But mathematics exists not simply for its own sake, it also exists in order to serve the other sciences," conveniently omitting the all-important continuation, "as well as for the *formal educational value* that its study provides" (Klein's emphasis). This stress on the importance of mathematics as a formal component within a broadly based, holistic education runs directly counter to Manegold's claim that Klein's educational proposals stand outside the neohumanist tradition.

Not that this is the only passage that can be cited: Klein later writes, in reference to the education of physicists, that "the value of mathematics lies less in the knowledge gained through its application, although this is certainly not to be undervalued, than through the *training of the mind* [*Schulung des Geistes*] gained through working with pure mathematics" (Klein's emphasis). And further: "*Mathematics as a formal educational tool* [*Bildungsmittel*], that is the key phrase [*Loosungswort*] which I would implore students of the natural sciences and medicine to bear in mind. Certainly students of the natural sciences would find it worthwhile during the first semester to hear one or another of the mathematical lectures. Which lecture is a matter of indifference, as the formal education thus acquired is the primary consideration" (Klein's emphasis).

It must be borne in mind here that what Klein means by the formal value of mathematical education is quite different from the formalism that dominated German mathematics education prior to the development of seminars at the universities. In fact, he sharply criticizes this kind of *Formalismus* in the *Antrittsrede*: "Instead of developing a proper feeling for mathematical operations, or promoting a lively, intuitive grasp of geometry, the class-time is spent learning mindless formalities or practicing pretty trivialities that exhibit no underlying principle." These remarks reflect Klein's lifelong preference for mathematical insight rather than computational virtuosity, intuition rather than rigor; and not least, his propensity for geometric as opposed to analytic modes of thought. Elsewhere in the *Antrittsrede*, he remarks that mathematics has progressed to a higher stage in which mastery of the formalities is no longer sufficient: "today we require an inner-understanding of the formal procedures, and consider a mathematical result complete only when it can be regarded from beginning to end as self-evident." Near the end of his career, Klein credited Dirichlet, above all others, with having accomplished this quiet revolution in the history of mathematics, and he quoted

Minkowski with approval: "Dirichlet possessed the art of being able to express a maximum of penetrating thoughts with a minimum of blind formulas" [Klein 1967, 97].

But all this is certainly in line with the mainstream, neohumanist tradition. Moreover, what Klein has to say in the *Autrittsrede* about the mathematics teacher in the *Gymnasien* (and notice that the *Realgymnasien* and *Oberrealschulen* never even enter the picture in this lecture) fits in perfectly with the traditional neohumanist ideal of the "scholar–teacher":

> . . . we, as university teachers, require not only that our students, on completion of their studies, know what is to be taught in the schools. We want the future teacher to stand *above* his subject, that he have a conception of the present state of knowledge in his field, and that he generally be capable of following its further development. Therefore, we hope to lead him far enough that he at least once undertakes an independent research study.

In this passage, Klein upholds the key concept behind the 1866 Prussian teaching regulations that governed the certification of mathematics teachers—the requirement that teaching candidates publish an original study in their chosen field. The *"selbständige Doktorarbeit"* requirement was instated on the recommendation of Friedrich Richelot, the leading representative of the Königsberg mathematical tradition at that time [Lorey 1916, 99]. In the opinion of Wilhelm Lorey, who was certainly a qualified authority regarding Klein's work in mathematics education [7], the *"Erlanger Antrittsrede"* of 1872 "represents throughout, despite the call for drawing exercises, the viewpoint of the formal educational value of mathematics, which has its basis in the Königsberg system. It is completely irrelevant which subject matter the teaching candidate studies, so long as he learns to work independently" [Lorey 1916, 166]. This last point comes to the heart of the matter, for as Lorey points out, Klein's forty years of teaching experience eventually led him to reject this principle. He notes this about-face by quoting from the private notes that Klein made available for his personal use, in which Klein wrote: "I would now suggest that teaching candidates of average talent should confine themselves to such studies as will be of fundamental importance in the later exercise of their profession, while everything beyond this should be reserved for those with unusual talent or favorable circumstances" [Lorey 1916, 167].

With this as background, it is not difficult to unravel the main thread of Klein's argument in the *Antrittsrede*. He begins by admitting that mathematics is an esoteric subject, but counts this as an advantage, since it is thereby free of the dilettantism that plagues most other disciplines. From here he goes on to decry the general lack of mathematical education, which he feels reflects the wider split between the scientific and humanistic cultures, a rift largely resulting from historical accident. In Klein's view, mathematics lies outside the fold of the two cultures, although it is often treated as part of the sciences because of the indispensable role it plays in so many scientific disciplines.

What Klein especially regrets concerning general mathematics education is that the subject is so often regarded as dull and worthless because of the poor quality of the instruction. The beauty and charm of the subject are therefore completely lost on the vast majority of students, and for no other reason than that the typical mathematics teacher is altogether unable to convey these aspects to his charges. While admitting that the incomparably higher pleasure of creative production in mathematics is an avenue open only to the gifted few, Klein emphasizes that the vast majority of students can still develop an appreciation for the subject, if only it is taught properly. To strengthen this argument, he invokes an analogy between mathematics and music, another field in which the gift of creativity is altogether uncommon, even though almost everyone has some inborn musical sense [8]. He concludes that the teacher's primary task is to instill a sense of mathematical *Geist* in his pupils, and that by so doing he can make a vital contribution toward bridging the gap between the two cultures.

Taking physics as a model for the way this can be accomplished at the university level, Klein goes on to show the intimate connection and interplay between pure mathematics and recent advances in this field. What is stressed throughout is the formal aspect, the manner in which mathematical thought enters into and permeates physical conceptions, rather than the acquisition of specific knowledge. In pursuing this line of argument, it is easy to see why Klein suggests that it is a matter of indifference which particular mathematics course a science student happens to study, so long as it is taught in a lively, *geistvoll* manner that succeeds in imbuing the student with a feel for the subject.

But now a practical problem arises, particularly regarding medical students: they simply have no time for extra studies. Thus keeping in mind the esoteric nature of mathematics (Klein's first premise), a fundamental, though certainly familiar, dilemma arises: either one loses potential students by upholding academic standards, or one waters down the subject and thereby sacrifices its integrity. Klein never actually states this dilemma, although it is implicit in his argument. One sees further that his musical analogy seems to break down here, since music is capable of being appreciated passively, while mathematics requires an active involvement with the subject.

Klein skirts this dilemma only by unloading the problem on the *Gymnasien* This is where the main burden for mathematics education must fall; what the universities can at most accomplish is to ensure that the instruction in the *Gymnasien* is the best possible. As we have already seen, Klein has relatively little that is new to say about how this is to be accomplished. The primary vehicle for ensuring quality in the teaching candidates is the "*selbständige Doktorarbeit.*" This he feels is the single best assurance that the *Lehramtskandidat* will be sufficiently immersed in mathematics so as to be capable of transmitting a feel for the subject to his students.

And if the university is able to produce better teaching candidates, then, Klein asserts, the mathematics instruction at the *Gymnasium* will automatically improve in and of itself. The fact that Klein points to the great improvement that has already taken place in this regard indicates that he sees himself as part of an ongoing movement rather than as someone seeking new directions or fundamental reform. The only new requirements for the modern-day mathematics professor are the requisite institutional and curricular support systems, i.e., seminars and facilities for drawing, modeling, and lecturing. But most importantly, a free and lively lecture style that is capable of imparting the essence of mathematical thinking and the spirit of mathematical culture.

KLEIN'S *"ERLANGER ANTRITTSREDE"*: GERMAN TRANSCRIPTION

Prorector magnifice!
Collegen, Commilitonen!
Hochgeehrte Versammlung!

Wenn es sonst wohl Sitte ist, dass der neu Angekommene Ihnen von hiesiger Stelle eine Schilderung entwirft von den neuesten Errungenschaften, die seiner Wissenschaft zu Theil geworden sind, oder weiter ausholend von dem Entwicklungsgange, der zu den heutigen Auffassungen hingeleitet hat—so habe ich geglaubt, bei dem wenig zugaenglichen Character meines Faches den Gegenstand fuer meinen heutigen Vortrag in einer etwas anderen Richtung suchen zu sollen. Ist doch bei der eigenthuemlichen Schwierigkeit, welche jede ungewohnte mathematische Gedankenoperation mit sich fuehrt, eine einmalige mathematische Vorlesung nur zu leicht selbst engeren Fachkreisen unverstaendlich! Um wie viel mehr muesste das bei einer Gelegenheit, wie der heutigen, der Fall sein! Es ist ja doch so, dass selbst geringe mathematische Kenntnisse nur wenig verbreitet sind, dass die einfachsten mathematischen Conceptionen nicht als allgemein aufgefasst vorausgesetzt werden koennen. Fuer die Wissenschaft als solche ist das kein unbedingter Nachtheil. Es bleibt ihr dadurch ein gewissermassen esoterischer Character, sie haelt sich dadurch verhaeltnissmaessig frei von dem laestigen Dilettantenthume, das sich in so manchen anderen Disciplinen breit macht. Aber vom allgemein menschlichen Standpuncte ist die geringe Verbreitung mathematischer Kenntnisse zu beklagen. Nicht etwa nur, weil Besitz derselben gewisse practische Vortheile mit sich fuehren kann, sondern in einem hoeheren Sinne, weil ihr Besitz die Quelle zu reichem und edlem Genusse werden kann, weil die Zugaenglichkeit so mancher anderer wissenschaftlicher Gebiete an ihn als eine Vorbedingung geknuepft ist.

Diese geringe Verbreitung mathematischer Kenntnisse ist wohl nur als ein Symptom eines schlimmeren und tiefer gehenden Misstandes zu betrachten, als ein Symptom der verhaengnissvollen Zweitheilung, die nur zu sehr in unserer Bildung Platz gegriffen hat und von manchen Seiten sogar principiel gebilligt wird: ich meine der Zweitheilung in humanistische und naturwissenschaftliche Bildung. Die Mathematik und was mit ihr zusammenhaengt, wird dabei der naturwissenschaftlichen Partie zugewiesen, wo sie ihrer Unentbehrlichkeit wegen allerdings ihren Platz findet, obgleich sie ihrem begrifflichen Inhalte nach weder zu der einen noch zu der anderen Kategorie gehoert.

Wenn es bei der heutigen Veranlassung nicht nur gestattet sondern sogar geboten scheint, allgemeine Auffassungen darzulegen, so lassen Sie mich vom Standpuncte des Mathematiker's wie namentlich auch vom persoenlichen Standpuncte gegen die gemeinte Zweitheilung einen Protest einlegen. Ich erblicke den inneren Grund derselben nur in einer voruebergehenden Ursache; in dem Umstande, dass sich die Naturwissenschaften erst in neuerer Zeit wesentlich entwickelt haben, wo denn die aeltere humanistische Richtung nicht bei der Hand war, die neuen Bildungselemente in sich aufzunehmen, waehrend die Anhaenger der neuen Forschung umgekehrt zu sehr von ihrer Thaetigkeit in Anspruch genommen waren, um ihre Aufmerksamkeit auch noch auf anderweitige Gegenstaende zu verbreiten;—ich bin der Hoffnung, dass sich in nicht zu ferner Zeit die Gegensaetze wieder ausgleichen werden, dass eine einheitliche Bildung wieder zu Stande kommt, in der sich die nun getrennten Elemente harmonisch vereinigt finden. Hochgeehrte Anwesende! Das sind gewiss keine neuen Saetze, die nicht schon oft ausgesprochen worden waeren, aber es sind immerhin seltene Saetze, die man nicht oft genug aussprechen kann.

Wenn wir von diesem einheitlichen Standpuncte die Reihe der Wissenschaften ueberblicken, so steht Mathematik auf der einen Seite, ihr zunaechst die exacteren Naturwissenschaften: die theoretische Mechanik, gewisse Partieen der Physik und Astronomie. Ausgezeichnet von allen anderen, was Strenge, was wissenschaftliche Methode betrifft, treten sie zurueck, wenn es sich, wie man sich wohl ausgedrueckt hat, um die Zahl der in ihnen beruehrten menschlichen Interessen handelt, und lassen den Vorrang den in dieser Richtung voranstehenden socialen Wissenschaften.

Doch ich will hier diese Bemerkungen, die ja auch anderweitig oefter entwickelt worden sind, in ihrer Allgemeinheit nicht weiter verfolgen. Lassen Sie mich vielmehr, allerdings gestuetzt auf diese allgemeine Auffassung, ein specielleres Thema in Angriff nehmen, dessen Gegenstand mir naeher liegt, und dessen Eroerterung Sie vorzugsweise von mir erwarten werden. Ich moechte zu Ihnen reden *von dem Zwecke des mathematischen Unterricht's ueberhaupt* und insbesondere *von der Form, die wir bestrebt sind, ihm an den Universitaeten zu ertheilen.*

Mathematik ist, wie jede Wissenschaft, zunaechst um ihrer selbst willen da; sie ist um der Erkenntniss willen da, welche aus ihrem Studium fliesst, oder, wenn Sie lieber wollen, sie ist da um des Genusses willen, den die Beschaeftigung mit ihr zur Folge hat. Ich druecke mich absichtlich gerade in dieser Weise aus, um dem vielfach gehoerten Urtheile entgegenzutreten, als sei Mathematik ein trockenes, ein langweiliges Fach, eine Art nothwendiges Uebel. Das wird Niemand nachsprechen koennen, der sich einmal des Reizes der in sich zusammenhaengenden Einsicht bewusst geworden ist, wie sie aus einer durchgefuehrten mathematischen Betrachtung entspringt. Ich erinnere Sie in dieser Beziehung an das Vergnuegen, das jeder empfindet, wenn eine merkwuerdige geometrische Wahrheit ploetzlich durch das Ziehen einiger Huelfslinien in der Figur evident wird; oder an die Ueberraschung, die der Anfaenger erfaehrt, wenn er eine scheinbar schwierige Aufgabe mit Huelfe einer Gleichung einfach und leicht aufloesen lernt. Neben diesen receptiven Genuss der logischen Einsicht stellt sich fuer den, der in der Wissenschaft selbstaendig weiter arbeitet, der ungleich hoehere Genuss der Production. Glauben Sie nicht etwa, dass mathematische Production eine einfach deductive Thaetigkeit sei. Im Gegentheil, das Erste ist immer, dass man inductiv, haeufig nur auf Analogieen gestuetzt, die Richtigkeit einer Beziehung *ahnt*, sie auffasst, in ihren Consequenzen verfolgt;—und erst allmaehlich sucht man die Momente zu einem wirklichen Beweise zusammen. Zum Schlusse wundert man sich gewoehnlich, dass man den Sachverhalt nicht gleich gesehen hat, dass man ueberhaupt darueber hat nachdenken muessen. Man ist dann mit dem Gegenstande, mathematisch genommen, fertig, und in diesem Sinne gilt die bekannte Behauptung Jacobi's: dass die Mathematik die Wissenschaft von den Dingen sei, die sich von selbst verstehen.

Ich muss hier hervorheben, was nur zu wenig bekannt ist, dass diese productive Thaetigkeit in der neueren Zeit sich nicht etwa nur auf Detail-Ausfuehrungen bezieht, sondern dass unsere Wissenschaft auch im Grossen fortschreitet, sogar mit einer Geschwindigkeit sich weiter entwickelt, die in wenig anderen Disciplinen erreicht werden mag. Unsere heutige Mathematik sieht der Mathematik, wie sie vor hundert Jahren war, wenig aehnlich; und es ist das um so hoeher anzuschlagen, als bei uns jede Generation auf den Errungenschaften der vorangehenden fortbaut und nicht etwa, wie das sonst wohl geschieht, sich zunaechst damit beschaeftigt, das frueher aufgefuehrte Gebaeude niederzureissen. Es ist genau hundert Jahre, dass Lagrange die Theorie der partiellen Differentialgleichungen begonnen hat, welche jetzt eine ausgedehnte Disciplin bildet, die die analytische Mechanik als einen Theil umfasst. Es sind fuenfzig Jahre, seit die projectivische Geometrie erwachsen ist, welche bestimmt war, unsere gesammte geometrische Auffassung umzugestalten. Die Zahlentheorie im heutigen Sinne, die Functionentheorie, die sog. mathematische Physik sind Errungenschaften alle derselben Zeit. Doch wozu hier in Einzelheiten eingehen? Ich habe nur aussprechen wollen, dass die Wissenschaft fuer uns nichts abgeschlossenes Ueberliefertes ist, sondern dass sie sich maechtig weiterentwickelt, wie irgend eine andere.

Aber der Genuss selbstaendiger Production wird immer nur Wenigen zugaenglich bleiben. Es gehoert dazu erfahrungsgemaess eine eigenartige Disposition, die nicht Jedem gegeben ist. Wenn es gestattet ist, von einem scheinbar sehr heterogenen Gegenstande einen Vergleich her zu nehmen, so moechte ich mathematische Begabung mit musikalischer aehnlich finden. Musicalische Productivitaet ist nur Wenigen gegeben, aber die meisten Menschen haben ein, mehr oder minder ausgebildetes Verstaendniss fuer fertige musikalische Werke. Die Classe derer, denen aller musikalische Sinn abgeht, ist wiederum recht beschraenkt. So gibt es auch, obgleich nicht haeufig, durchaus unmathematische Koepfe, die bei sonst normaler Begabung, voellig unfaehig sind, dem einfachsten mathematischen Gedankengange zu folgen.

Aber Mathematik ist nicht nur um ihrer selbst willen, sie ist auch um der Dienste willen da, die sie anderen Wissenschaften leistet, sie ist da um des *formalen Bildungswerthes* willen, den ihr Studium mit sich fuehrt.

Wenn ich hier von Anwendungen der Mathematik spreche, so denke ich dabei weniger an Anwendungen im gewoehnlichen Sinne, wie man sie in Kreisen, die der akademischen Auffassung ferner stehen, anzufuehren pflegt, um den Nutzen und die Bedeutsamkeit eines Studium's zu beweisen. Man nennt dann, wenn es sich um Mathematik handelt, die Vorausberechnungen der Astronomen, man ruehmt die Genauigkeit geodaetischer Operationen, man bewundert die Leistungen der Ingenieurkunst. Nichts liegt mir ferner, als derlei Anwendungen als unwesentlich bei Seite zu setzen. Gewiss, sofern es sich um Interessen der Menschheit ueberhaupt handelt, sind diese Anwendungen vermoege der durch sie erreichbaren Zwecke von der hoechsten und weitreichendsten Bedeutung. Aber es ist nicht meine Aufgabe, wenn ich von dieser Stelle zu Ihnen rede, solche Betrachtungen weiter zu verfolgen.

Bei dem Worte Anwendungen denke ich vielmehr an die theoretischen Dienste, welche die Mathematik bei dem Ausbau anderer Wissenschaften leistet; ich denke namentlich auch an den formalen Bildungswerth, den das mathematische Studium hat. Sei es mir gestattet, mit Bezug hierauf etwas laenger bei einem Beispiele zu verweilen, das mir nach meinem eigenen Bildungsgange naeher liegt, bei der Anwendung mathematischer Conceptionen in der *Physik.* Aehnliche Betrachtungen gelten, soviel ich verstehe, von den Anwendungen der Mathematik ueberhaupt, und insbesondere von ihren Anwendungen auf Naturwissenschaften.

Die Bezeichnung: *mathematische Physik* kann in der wechselnden Bedeutung, in welcher sie alltaeglich gebraucht wird, dabei leicht zu einer Verwirrung Anlass geben. Wenn man eigentlich damit jede physicalische Betrachtung zu bezeichnen haette, in der bewusst von mathematischen Denkoperationen Gebrauch gemacht wird, so hat man vielfach den Namen ausschliesslich auf eine besondere Richtung physicalischer Speculation uebertragen, die allerdings den ausgedehntesten Gebrauch von mathematischen Huelfsmitteln macht. Ich meine damit die mannigfachen und vielfach gluecklichen Versuche, ganze Erscheinungsclassen von bestimmten Annahmen ausgehend aprioristisch zu deduciren. Dahin gehoert also, um an allgemeiner gekannte Beispiele zu erinnern, *die* Theorie des Lichtes, welche von den wesentlichen optischen Erscheinungen Rechenschaft gibt, indem sie dieselben auf Schwingungen eines Medium's zurueckfuehrt, dem sie die Eigenschaften eines elastischen Koerper's beilegt; dahin gehoert vor Allem die sog. *Moleculartheorie,* welche fuer das Verhalten der Koerper ueberhaupt darin einen tieferen Grund sieht, dass sie die Materie als Aggregat von Massenpuncten betrachtet, welche einander, aehnlich wie die Kosmischen Massen, mit Kraeften beeinflussen.

Aber als mathematische Physik sind mit demselben Rechte andere Richtungen physicalischer Forschung zu bezeichnen, in denen eine Reihe von Saetzen der Erfahrung entnommen werden, von denen ausgehend man an der Hand mathematischer Speculation weitere Schluesse zieht. Dahin gehoert z.B. die sogenannte geometrische Optik. Von der Vorstellung eines Lichtstrahles und von den beobachteten Gesetzen der Reflection und Brechung ausgehend entwickelt dieselbe die Theorie beliebig gekruemmter Spiegel oder beliebig gestalteter Linsen. Dahin gehoert ferner die Theorie der Waermeleitung, die Theorie des Potentials.

Doch ich will hier in keine Enzelheiten eingehen, da meine Absicht nur ist, auf die Rolle hinzuweisen, welche die Mathematik bei solchen Betrachtungen uebernimmt. Es ist immer dieselbe Rolle; ihr Geschaeft beschraenkt sich darauf aus exact formulirten Grundlagen mit Schluessen weiter zu gehen. Woher diese Grundlagen stammen, ob es Hypothesen oder beobachtete Thatsachen sind, bleibt fuer sie gleichgueltig. Sie ist also nicht verantwortlich dafuer, wenn die Schlussfolgerungen mit der Wirklichkeit nicht stimmen wollen, so wenig als sie es sich zum Verdienste zu rechnen hat, wenn es der Fall ist. Beides kommt auf die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Voraussetzungen an, und die Aufstellung derselben ist kein mathematisches Geschaeft.

Die mathematische Betrachtung spielt in diesen Dingen und wohl ueberhaupt nur die Rolle des ruhig fortschreitenden Schliessen's unter gegebenen und zwar genau gegebenen Voraussetzungen. Glauben Sie nicht etwa, dass das Wesen der Mathematik in der Formel ruhe; die Formel soll nur eine exacte Bezeichnung der gedanklichen Verknuepfung sein. Damit ist durchaus nicht gelaeugnet, dass eine richtige Ausbildung des Formalismus eine fuer die Mathematik recht wesentliche Sache ist, dass die reine Wissenschaft von der Form, in welche man sie kleidet, rueckwaerts wieder mannigfache Anregung erhalten kann. Aber die Zeiten sind vorueber, in denen die Formel die Alleinherrscherin war oder doch den eigentlichen Gedanken zu viel zurueckgedraengt hatte, in denen man einen mathematischen Gegenstand als erledigt ansah, wenn er der Rechnung zugaenglich gemacht war. Das ist heute anders: wir verlangen ein inneres Verstaendniss des durch die fortschreitende Formelentwicklung bezeichneten Processes; wir glauben erst dann mit einem mathematischen Gegenstande fertig zu sein, wenn uns Anfang und Ende der Betrachtung als selbstverstaendlich durch einänder gesetzt erscheinen.

Mathematische Physik ist bei dieser Auffassung, sofern wir auf die eigentlich mathematische Seite an ihr achten, nicht so verschieden von der Geometrie. Hier wie dort wenden wir das abstracte mathematische Denken auf ein sinnliches (besser gesagt: ein anschauliches) Gebiet an, welches freilich in der mathematischen Physik reichere Verschiedenheiten zeigt als in der Raumwissenschaft. Wir stellen beidemal gewisse Saetze voran, die das Fundament fuer die ganze Betrachtung abgeben, die wir das eine Mal Hypothesen oder Gesetze, das andere Mal Axiome nennen. Fuer die fortschreitende mathematische Entwicklung ist es gleichgueltig, wie wir diese Sätze gewonnen haben, ob experimentell, ob vermoege unmittelbarer Anschauung. Die Thaetigkeit des Mathematiker's besteht in dem Verfolg der aus den Saetzen fliessenden Schluesse. Freilich tritt dann noch die Uebertragung der gewonnenen Wahrheiten rueckwaerts in die lebhafte sinnliche Anschauung hinzu, aber dies ist wieder keine eigentlich mathematische Thaetigkeit. Damit soll nicht gesagt sein, dass man, wie hier geschildert, die mathematische Betrachtung eine Zeit lang von der sinnlichen Anschauung abloesen muesse; man kann vielmehr beide, wofuer die sogenannte reine Geometrie ein gutes Beispiel liefert, ungetrennt neben einander herfuehren.

Fuer die Mathematik selbst ist diese Verknuepfung mit anschauungsmaessigen Disciplinen, wie ich hier doch nicht unerwaehnt lassen darf, von der hoechsten Bedeutung. Die wesentlichsten Fortschritte, welche die mathematische Forschung im vorigen Jahrhunderte gemacht hat, kommen auf die Anforderungen zurueck, welche die Astronomie damals an die Wissenschaft stellte; und eine aehnliche Rolle haben in diesem Jahrhundert die mathematische Physik und die Geometrie gespielt. Freilich, die mathematische Forschung, durch aeussere Anforderungen in bestimmte Bahnen gelenkt, geht in der ihr einmal zugewiesenen Richtung dann bald ueber das unmittelbare Beduerfniss hinaus: aus der gewollten Beherrschung eines bestimmten Stoffes entwickelt sich eine neue rein mathematische Disciplin, die man dann nur noch uneigentlich mit dem Namen der urspruenglichen Anwendung belegt. Viele sogenannte Untersuchungen ueber mathematische Physik sind rein mathematische Untersuchungen, in dem das physicalische Element: die lebhafte sinnliche Auffassung, aus ihnen entschwunden ist; und man sollte sie lieber in eine andere Kategorie, in die Kategorie der physicalischen Mathematik verweisen, d.h. derjenigen mathematischen Disciplinen, welche, aus physicalischen Anforderungen entstanden, sich mit Vorliebe einer physicalischen Terminologie bedienen.

Doch ich bin in Gefahr, mich in rein mathematische Betrachtungen zu verlieren, was ja nicht geschehen sollte. Kehren wir also zu den vorhin angeregten Ueberlegungen zurueck, so lag der Werth der mathematischen Studien fuer den Physiker weniger in der Anwendbarkeit gewisser durch sie zu gewinnenden Kenntnisse, obgleich diese gewiss nicht zu unterschaetzen sind, sondern namentlich in der durch die Beschaeftigung mit reiner Mathematik zu gewinnenden *Schulung des Geistes*. In diesem Sinne wird das Studium der Mathematik, wie das ja auch allseitig anerkannt wird, je laenger je mehr fuer den Naturforscher ueberhaupt zur Notwendigkeit, und in dem Maasse mehr, als in den einzelnen Disciplinen die exacte Betrachtungsweise weiter ausgebildet wird. *Mathematik als formales Bildungsmittel* ist das Loosungswort, das ich den Studirenden der Naturwissenschaft, namentlich auch den Studirenden der Medicin an's Herz legen moechte. Gewiss, die Zeit waere nicht verloren, wenn der Studirende der Naturwissenschaft seine ersten Semester dazu benutzen wollte, um eine oder die andere mathematische Vorlesung zu hoeren. Welche Vorlesung, ist beinahe gleichgueltig, da es in erster Linie nur auf die formale Bildung ankommt. Die Staerkung, welche dadurch die Faehigkeit zur exacten naturwissenschaftlichen Auffassung erfaehrt, wuerde weitaus den dabei nothwendigen Zeitaufwand compensiren.

Aber man wird mir einwenden und ich muss es zugeben, dass namentlich der medicinische Student ohnehin schon ueberreich beschaeftigt ist und unmoeglich Zeit finden kann, seine vielfach in Anspruch genommene Thaetigkeit auch noch auf mathematische Dinge zu richten. Es ist das um so misslicher, als eine mathematische Vorlesung, wenn sie Vortheil bringen soll, nicht einfach angehoert werden darf, sondern mit stetigem Fleisse zu Hause nachgearbeitet werden muss. Denn das mathematische Denken will nicht bloss einmal angeregt, es will vor allen Dingen auch eingeuebt sein. Ich beruehre hier einen wirklichen, schweren Misstand, der ja auch von anderer Seite lebhaft empfunden wird.

Um so mehr muessen wir darauf dringen, dass an den Bildungs-Staetten, an welchen Jeder nach jetzigem Unterrichts-Plane mit mathematischen Vorstellungen in Beruehrung kommt, dass in den *Gymnasien* die Mathematik mit mehr Eifer gepflegt wird, als das mit wenigen loeblichen Ausnahmen zur Zeit der Fall ist. Nicht, dass wir mehr Stunden woechentlich fuer den Unterricht in der Mathematik verlangen, oder dass wir das Programm der zu lehrenden Gegenstaende erweitert oder selbst wesentlich modificirt wissen wollten. Aber wir verlangen mehr Interesse fuer die Mathematik, mehr Leben in ihrem Unterrichte, mehr Geist in ihrer Behandlung! Es ist ein nur zu verbreitetes Urtheil, welches man in Schuelerkreisen nicht selten hoeren kann, dass es auf Mathematik doch nicht ankomme. Das Schlimste ist, dass dies Urtheil haeufig kein unrichtiges ist, indem *die* Mathematik, welche vorgetragen wird, wirklich nicht viele bildende Elemente enthaelt. Statt den eigentlichen Sinn mathematischer Operationen zu entwickeln, statt in der Geometrie das lebendige Anschauungsvermoegen auszubilden, wird die Zeit zur Erlernung eines geistlosen Formalismus oder zur Uebung in principlosen Kunststuecken verwandt. Da lernt man mit Virtuositaet lange Buchstaben-Ausdruecke reduciren, bei denen sich Niemand etwas vorstellt; da verwendet man seinen Fleiss darauf, kuenstlich aufgebaute Gleichungen zu loesen, die mit Fleiss so eingerichtet sind, dass nur mit einem besonderen Kunstgriffe, den man kennen muss, etwas mit ihnen anzufangen ist. Soll aber der so gebildete Schueler einen Gedanken selbstaendig entwickeln oder auf eine Frage antworten, die ihm nicht von frueher bekannt ist, so fehlt es ihm an jeder Spur von eigener Initiative.

Hier ist es, wo wir als Universitaetslehrer der Mathematik ein Feld grosser und hoffentlich lohnender Thaetigkeit haben. Es gilt, eben in diesem Sinne die mathematische Bildung der spaeteren Schulamts-Candidaten auf eine hoehere Stufe zu heben, als das seither und namentlich vor laengeren Jahren der Fall war. Schaffen wir bessere Lehrer, so wird der Unterricht von selbst besser, dann wird die alte ihm zugewiesene Form sich mit neuem, lebenskraeftigen Inhalte fuellen! Es ist in den letzten Zeiten in dieser Beziehung schon vielfach besser geworden; die Zahl derer, die in dieser Richtung wirken, ist unter den Juengeren nicht unbetraechtlich; und wir, die uns gleiches Streben verbindet, hoffen das Ziel einer wesentlichen Verbesserung des mathematischen Unterrichts auf Gymnasien in nicht zu ferner Zeit erreicht!

Darum verlangen wir aber als Universitaetslehrer von unseren Zuhoerern nicht nur, dass sie am Ende Ihrer Studien wissen, was auf der Schule vorzutragen ist. Wir wollen, dass der spaetere Lehrer *ueber* seinem Stoffe steht, dass er einen Begriff von dem hat, was seine Wissenschaft zur Zeit umfasst, dass er im Allgemeinen zu verfolgen vermag, in welchem Sinne sie sich weiter entwickelt. Darum suchen wir ihn so weit zu fuehren, dass er wenigstens einmal eine selbstaendige Arbeit macht. Ist auch unter zehn kaum einer, der spaeter fuer sich den betretenen Pfad wissenschaftlicher Production verfolgt, so nimmt doch Jeder auch von der einmalige Arbeit eine ganz andere Art von Sicherheit im Urtheile und von Lebendigkeit in der Auffassung mit.

Doch die erhoehte Aufgabe verlangt eine verbesserte Lehrweise an den Universitaeten. Ein freier, ungezwungener Vortrag, bei dem es weniger auf die Erschoepfung eines bestimmten Gebietes wissenschaftlicher Thatsachen als auf Anregung in bestimmter Richtung ankommt, ist bei uns eigentlich immer ueblich gewesen. Aber erst in neuerer Zeit wendet man groessere Aufmerksamkeit auf die Einrichtung mathematischer Uebungen, auf die Selbstbeschaeftigung der Studirenden in Seminaren. Und in derlei Einrichtungen liegt der Schwerpunct fuer die Entwicklung unseres Universitaets-Unterrichts; *in diesem Sinne muss geschaffen werden.* Es ist etwas ganz Anderes, ein Vorgetragenes leidlich zu verstehen, so dass man subjectiv keinen Zweifel mehr empfindet, und die Sache selbst vortragen, so dass Andere, die es noch nicht wissen, sie lernen und begreifen koennen. Weniger die Kunst des Vortrag's muss zu diesem Zwecke geuebt werden, als vor allen Dingen die logische Exposition, die

Trennung des Wesentlichen vom Unwesentlichen. Auf der anderen Seite wuenschen wir Uebungen im geometrischen Zeichnen und Modelliren. Wenn man gelegentlich gesagt hat, die raeumliche Anschauung beduerfe solcher Huelfsmittel nicht, so gilt das doch erst von einer geuebten Anschauung, die eben durch Zeichnen, durch Modelliren sich ausgebildet hat. Mir scheint eine wenn auch voruebergehende Beschaeftigung des Studirenden in dieser Richtung in unserem Fache eben so nothwendig, als es in den einzelnen naturwissenschaftlichen Faechern die Practica sind.

Ein fuer die Universitaeten durchaus nicht guenstiger Vergleich liegt dabei nahe, der Vergleich mit den Polytechniken. An den technischen Lehranstalten sind einmal die Lehrstuehle der Mathematik in groesserer Zahl vorhanden, als an den meisten Universitaeten, so dass der Student ein viel reicheres Material geboten bekommt. Ist es doch so, dass in den Staedten, in welchen Universitaeten und Polytechniken vereinigt sind, letztere fuer uns meist sehr wesentliche Luecken des Universitaets-Unterricht's ersetzen muessen! Aber namentlich sind an Polytechniken die gemeinten practischen Uebungen in sehr viel hoeherem Grade entwickelt. Dann gibt es geordnete Repetitionen der in den Vorlesungen beruehrten Gegenstaende u.s.f. Das Verhaeltniss ist ein solches, dass man dem Studirenden der Mathematik, sofern Fachgruende allein entscheiden sollen, nur rathen kann, die ersten beiden Jahre auf einem Polytechnicum zuzubringen. Hernach mag er dann die Universitaet beziehen und im persoenlichen Verkehre mit dem Docenten bis zur selbstaendigen Production vorzudringen suchen.

So steht es zur Zeit mit dem mathematischen Unterrichte, welchen die Universitaeten bieten koennen. Das kann aber nicht gewollt sein, so lange wir an der Forderung einer Universitas literarum fest halten, wie wir doch moechten. Wir wuenschen dringend mathematische Seminare zur Uebung im Vortrage und in selbstaendigen Arbeiten, wir wuenschen neben den Seminaren constructive Uebungen in geeigneten practischen Cursen!

KLEIN'S *"ERLANGER ANTRITTSREDE"*: ENGLISH TRANSLATION

Prorector magnifice!
Colleagues! Fellow Students!
Highly Honored Assembly!

Although it is customary that the newcomer to the present position give a descriptive outline of the latest achievements that have occurred in his field, or trace the developmental stages that have led to the contemporary outlook, it was my belief that, owing to the rather inaccessible character of my discipline, I should attempt to give my lecture today a somewhat different direction. Indeed, the peculiar difficulty associated with any unfamiliar mathematical thought process can easily make a single mathematics lecture held before specialized experts incomprehensible! How much more must this be the case on an occasion such as the present one! It is indeed true that even a modest knowledge of mathematics is not very widespread, so that one generally cannot assume that the simplest mathematical conceptions are known. For mathematics itself, this is by no means an absolute disadvantage, for it retains hereby an esoteric character, so to speak, which enables it to remain relatively free from the annoying dilettantism that plagues so many other disciplines. Yet from a general human standpoint the lack of widespread mathematical knowledge is to be deplored, not merely because such knowledge carries with it certain practical advantages, but rather in a higher sense, because it can be the source of a rich and noble pleasure, it being a precondition for entering into so many other scientific areas.

Still, the lack of widespread knowledge of mathematics is only a symptom of a deeper, much more serious problem. It is a symptom of the fateful division that has taken hold of our education all too strongly, and which from many sides has even found principal approval: I am referring to the division between humanistic and scientific education. Mathematics and those fields connected with it are hereby relegated to the natural sciences, and rightly so considering the indispensibility of mathematics for these. On the other hand, its conceptual content belongs to neither of the two categories.

Since on the present occasion it is not only permitted but even recommended that one set forth general viewpoints, let me, speaking from the standpoint of the mathematician and especially from my own personal point of view, enter a protest against this very bifurcation. In my view, the reason for this split is grounded in a momentary and accidental circumstance, namely, that the natural sciences have only really developed in modern times, so that the older humanist direction was not in a position to take up these new educational elements. On the other hand, the practitioners of the newer research were too involved in their work to spread their attention to other matters. I am hopeful that in the not too distant future these oppositions will once again be balanced out, and that a unified education will come into being in which the presently polarized elements will be harmoniously joined together. Highly honored guests! These are most definitely not new propositions that have never been enunciated before; nevertheless there are certain propositions that cannot be enunciated often enough.

If from this unified standpoint we survey the various academic disciplines, we see that mathematics stands on the one side and next to it the more exact natural sciences: theoretical mechanics and certain parts of physics and astronomy. Distinguished from all others by their rigor and strict scientific methodology, these fields take a less prominent place when, as is so fittingly said, the number of human beings affected becomes essential, whereupon the appropriate social sciences assume the leading position.

However, I do not wish to pursue these remarks, which in any case have been considered often enough elsewhere, in such generality here. Allow me instead, relying upon this general viewpoint, to take up a specific theme which lies closer to my interests and whose exposition you probably anticipate hearing. I would like to speak to you about the *overall purpose of mathematical instruction* and, in particular, about *the form in which we are striving to impart it at the universities.*

Mathematics, like every science, is undertaken first of all for its own sake; it is motivated by the desire for that knowledge which mathematical study provides, or, if you prefer, through the enjoyment which is a consequence of that study. I express myself this way intentionally, so as to counteract the frequently heard opinion that mathematics is a dry, boring subject, a sort of necessary evil. No one who has ever experienced the enchantment of the interconnected insights that arise from carrying through a mathematical investigation would ever repeat this verdict. I remind you in this respect of the pleasure one derives when, by drawing a few accessory lines in a figure, a remarkable geometrical truth suddenly becomes evident. Or the surprise the beginner experiences when a seemingly difficult task becomes simple and easy with the help of an auxiliary equation. Next to this passive pleasure enjoyed through logical insight goes the incomparably higher pleasure of production enjoyed by those who undertake independent work in the field. One should not get the impression that mathematical production is simply a deductive activity. On the contrary, the first requirement is always that one proceed inductively, often supported merely by analogies, and *divine* the correctness of a certain relationship. Then, having once conceived it, one must follow its consequences—only gradually does one begin to gather the elements of a real proof. After it has been completed, one often wonders why he did not see the whole thing immediately from the beginning, or why he should have needed to even think it over. At this point the matter is, mathematically speaking, settled, and in this sense Jacobi's well-known pronouncement applies: that mathematics is the science which studies those things that can be understood in and of themselves.

Here I must emphasize something that is all too little known; namely, that this recent productive activity is not confined to specialized investigations, but rather our science is advancing as a whole and at a rate of development that few other disciplines have managed to attain. Our present-day mathematics bears little resemblance to the mathematics of a hundred years ago, and this fact is all the more significant when one considers that each mathematical generation builds on the accomplishments of its predecessors, whereas in other fields it often happens that the old buildings are torn down before the new construction can proceed. It was exactly one hundred years ago that Lagrange founded the theory of partial differential equations, which today constitutes an extensive discipline embracing analytic mechanics as a special part. Fifty years have passed since projective geometry was first developed, a field which has since transformed our entire conception of geometry. Number theory in the modern sense, function theory, so-called mathematical physics—all are achievements of the same period. But why enter into details here? I simply wanted to assert that our discipline is by no means a closed and finished subject, but rather is developing powerfully like any other.

Of course the enjoyment of independent productivity will always remain accessible to only a few. At least my experience has been that it requires a special disposition not given to everyone. If permitted, I should like to compare mathematical ability with another, apparently very different, talent, namely, the talent for music. As with mathematics, only very few persons are musically creative, but still most people have a more or less cultivated understanding for a finished piece of music. The class of those with no musical sense whatsoever is decidedly limited. Similarly, there are also those otherwise normally gifted persons, again not many, who have absolutely no head for mathematics, and are utterly unable to follow even the simplest mathematical argument.

But mathematics exists not simply for its own sake; it also exists in order to serve the other sciences as well as for the *formal educational value* that its study provides.

When I speak here of applications of mathematics, I am thinking less of applications in the usual sense, such as those one might care to bring forward before circles that are somewhat removed from the academic outlook in order to demonstrate the utility and significance of one's discipline. So far as mathematics is involved, for example, one mentions the predictive calculations of the astronomer, one praises the precision of geodetic measurements, and one admires the accomplishments of the engineering art. Nothing could be further from my mind than to dismiss such applications as these. To be sure, so far as the general interests of humanity are concerned, these applications are of the highest and most far-reaching significance by virtue of the attainments they make possible. However, it is not my intention, in speaking to you here today, to follow these considerations any further.

By the word "applications" I am thinking much more of the theoretical services performed by mathematics in the development of other sciences—I am also thinking in particular of the formal educational value that the study of mathematics has. Permit me to dwell on this point a bit longer by way of an example that is especially close to my own educational background, namely, the application of mathematical conceptions in *physics*. Similar observations apply, so far as I understand, to applications of mathematics in general and, in particular, for applications in the natural sciences.

The term "mathematical physics" can easily give rise to confusion because of the various ways it is employed in everyday discourse. Although the term literally designates any physical observations which consciously make use of mathematical thought processes, it has nowadays conventionally come to refer exclusively to those special physical speculations which make the most extensive use of mathematics. By these I mean those manifold and in many cases successful experiments that deduce whole classes of phenomena on the basis of certain *a priori* assumptions. Among these belong, to recall some well-known examples, the theory of light, which accounts for essential optical phenomena by referring to the vibrations of a medium with the properties of an elastic body; and above all, *molecular theory,* which finds a deeper reason altogether for the behavior of bodies in that it regards them as aggregates of mass points which, like the cosmic masses, influence each other through forces.

And yet there are other directions in physical research that are equally entitled to the name mathematical physics, in that they present a series of empirical propositions from which one draws further conclusions by making use of mathematics. Among such investigations belong those in the so-called field of geometrical optics. Beginning with the idea of a light ray and the observed laws of reflection and refraction, this discipline has gone on to develop the theory of arbitrarily curved mirrors and arbitrarily shaped lenses. Herein belong, further, the theory of heat conduction and potential theory.

But I do not wish to go into details here as my intention was merely to point out the role assumed by mathematics in such investigations. It is always the same role; its business is confined to drawing further conclusions from precisely formulated foundations. Where these foundations originate, whether from hypotheses or observed facts, is from the mathematical vantage point a matter of indifference. Thus it is not the responsibility of mathematics when the conclusions it draws do not happen to agree with reality, just as it is not mathematics that deserves the credit when they happen to agree. In both cases, the result depends on the correctness or incorrectness of the assumptions, and determining these is not a mathematical concern.

In these matters and in general, mathematical investigations merely play the role of peacefully drawing conclusions under *precisely* given presuppositions. One should not believe that the essence of mathematics lies in formulas; the formula is only a precise designation for the thought connections involved. This is certainly not to deny that the form of expression plays an essential role in mathematics; for by clothing itself in the proper form it can receive diverse stimulation. But the time is gone when the formula played the sole sovereign at the expense of the thoughts behind it, and in which one regarded a mathematical work as finished so long as the computations were accessible. Today it is different: we require an inner understanding of the on-going development of the formulas, and consider a mathematical result complete only when it can be regarded from beginning to end as self-evident.

Following this viewpoint, mathematical physics, insofar as we attend to its mathematical side, is not very different from geometry. Here, as with the latter, we are applying abstract mathematical thinking to a sensate (better said: intuitive) domain, which to be sure shows a richer diversity in mathematical physics than in spatial studies. In both cases we present certain propositions at the outset that serve as the foundation for the entire investigation. In the first case we call these hypotheses or laws; in the second, axioms. So far as the further mathematical developments are concerned, it is unimportant how these propositions were obtained, whether experimentally or by direct intuition. The mathematician's task consists simply in pursuing the conclusions that follow from these propositions. Granted that these newly won truths are then referred back to the vivid realm of sensate intuition, this is still not a mathematical activity, properly speaking. And yet one should not get the impression from what was just said that the mathematical investigation must be detached for some time from sensate intuition. Indeed, one can utilize both aspects alongside one another, so-called pure geometry providing a good example.

For mathematics itself, as I must not leave unmentioned, this connection with intuition-oriented disciplines is of the highest importance. The most fundamental progress made by mathematics during the previous century was due to the demands placed upon it by astronomy, and a similar role has been played by mathematical physics and geometry in this century. At first the mathematical research that is guided by these demands follows certain definite channels, but it then goes beyond the immediate requirements necessary to master a certain problem and develops into a purely mathematical discipline, to which the original name can only be applied improperly. Many so-called investigations in mathematical physics are actually purely mathematical researches in which the physical element, the animated, empirical viewpoint, has disappeared. Such investigations should more properly be placed in another category, in the category of physical mathematics, that is among those mathematical disciplines which arose from the demands of physics and which prefer to make use of physical terminology.

But I am in danger of losing myself in purely mathematical considerations, which is something I should not let happen. Returning therefore to the earlier reflections, we assert that the value of mathematics lies less in the knowledge gained through its application, although this is certainly not to be undervalued, than through the *training of the mind* gained through working with pure mathematics. In this sense, the study of mathematics, as has long been recognized, has become more than ever a necessity for the general scientist, and especially as exact investigations are becoming more widespread in the individual disciplines. *Mathematics as a formal educational tool*—that is the key phrase which I would implore students of the natural sciences and medicine to bear in mind. Certainly students of the natural sciences would find it worthwhile during the first semester to enroll in one or another of the mathematical lecture courses. Which course is a matter of indifference, as the formal education thus acquired is the primary consideration. The strengthening of the exact scientific outlook that would thereby be accomplished would easily compensate for the necessary expenditure of time.

But to this suggestion it will be objected, and I must admit fairly so, that the medical student already is overburdened and cannot possibly find time along with his numerous other activities for mathematical studies. This situation is, indeed, even more problematic, because to profit from a mathematics lecture one cannot simply listen; one must also work steadily and industriously on one's own. For mathematical thinking cannot simply be momentarily stimulated; it must above all be practiced. I am touching here on a very difficult problem that is also strongly felt in other quarters.

We must, therefore, urge that in the present educational institutions, where according to the curriculum plan everyone is to have contact with mathematical presentations, and in the *Gymnasien*, mathematics be taught with more zeal than is presently the case, overlooking a few praiseworthy exceptions. Not that we demand more hours per week for instruction in mathematics, nor that the content of the courses be extended or even essentially modified; what is required is more interest in mathematics, livelier instruction, and a more spirited treatment of the material! An all too widespread opinion that one often hears in school circles is that mathematics is just not important. The worst of it is that this opinion is very often justified as the mathematics that is often presented possesses little that is of real educational value. Instead of developing a proper feeling for mathematical operations, or promoting a lively, intuitive grasp of geometry, the class time is spent learning mindless formalities or practicing trivial tricks that exhibit no underlying principle. One learns to reduce with virtuosity long expressions that are devoid of meaning, or to apply one's diligence to the solution of artificially constructed equations that are contrived in such a fashion that one cannot even begin to make progress unless one knows some special trick in advance. When, however, the student with this sort of training is required to develop an independent idea or answer a question that is unfamiliar to him, he lacks all trace of individual initiative.

It is here that we, as university teachers of mathematics, have a wide, and hopefully rewarding, field for our activity. At stake is the task, precisely in the sense just mentioned, of raising the standards of mathematical education for later teaching candidates to a level that has not been seen for many years. If we educate better teachers, then mathematics instruction will improve by itself, as the old consigned form will be filled with a new, revitalized content! In recent years the situation has already improved in many respects, as the number of younger teachers who have been working in this direction is not inconsiderable. And we who are joined in the same endeavor hope that in the not too distant future an essential improvement in mathematics instruction at the *Gymnasien* will be attained!

For this reason we, as university teachers, require not only that our students, on completion of their studies, know what must be taught in the schools. We want the future teacher to stand *above* his subject, that he have a conception of the present state of knowledge in his field, and that he generally be capable of following its further development. Therefore, we hope to lead him far enough that he at least once undertakes an independent research study. Although hardly one in ten will later for himself take up scientific research, anyone who completes such a study even once takes with him an altogether different type of certainty in judgment and liveliness of conception.

But this higher task also requires improved instruction at the universities. To be sure, a free and flowing lecture style that seeks to illuminate a particular direction rather than exhaust a definite body of information has always been the norm in mathematics. However, only in recent times has greater attention been given to mathematical exercises and seminars for student participants. These types of institutions are today the focal point for the future development of our university instruction: *this is what needs to be established.* It is one thing to follow a lecture ardently and feel that one understands it without question; it is quite another to be able to lecture over the same material so that others, who are not yet familiar with it, can learn to understand the subject as well. What needs to be practiced is not so much the art of giving a lecture as the logical exposition of the material, the ability to separate the essential from the inessential. On the other hand, we also wish to hold exercises in drawing and in building models. It is sometimes said that spatial perception does not require these kinds of aids, but this in fact only applies to those who already have developed this perception through practice in drawing and modeling. It seems to me that for students in our field such studies, even if undertaken only briefly, are just as necessary as the "practica" for students of the natural sciences.

In this respect a convenient, though not at all favorable, comparison can be made between the universities and the polytechnical institutions. At the technical schools the number of teaching positions in mathematics is greater than at most universities, so that students are offered a much richer selection of courses. It is also the case that in those cities where universities and polytechnical schools are both present, the latter usually fill very crucial holes in the university curriculum. Practical exercises especially have been developed to a much higher degree at the polytechnical institutions. Moreover, orderly repetitions of the subject matter are discussed in the lectures, etc. The situation is such that one can only advise students of mathematics, at least if mathematical reasons alone are to be decisive, to spend the first two years of their education at a polytechnicum. Afterward they can then enter the university and attempt to produce an independent research study in personal contact with the teachers.

For the time being, this is the situation regarding the mathematics instruction the universities are able to offer. This cannot, however, be considered desirable so long as we hold firm to the demands of a *Universitas literarum,* as we certainly want to do. We urgently wish to have mathematical seminars for lecturing practice and independent research, and next to these we wish to have seminars for constructive exercises in suitable practical courses!

NOTES

1. Among these are Klein [1923, 18], Lorey [1916, 150, 165–167], Manegold [1970, 92–93], Frewer [1979, 5, 23], Tobies [1981, 66, 75], and Pyenson [1983, 54–55].

2. The original, handwritten manuscript is among the documents in XXII.L. (*Personalia*) of the Klein *Nachlass* in the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen. The following transcription of the manuscript is based on the original and was undertaken independently of [Klein 1977]. It agrees essentially with [Klein 1977], although the present version omits those portions of the text which were lined out. These can be found in [Klein 1977]. Both versions strictly adhere to the sometimes anachronistic spellings that appear in the manuscript.

3. For example, Frei [1984, 236] and Selle [1937, 327]. The latter actually mistakes Klein's description of the *Antrittsrede* for an explication of the *Erlanger Programm.* The passage in Klein's Autobiographical Sketch referred to in is [Klein 1923, 18]; it is reproduced and translated in [Rowe 1983].

4. Klein *Nachlass* XXII.L.; also transcribed and photoreproduced in [Klein 1977]. This was among the documents used by Lorey [1916].

5. The enumeration and additional letters in brackets have been inserted by the author for the sake of clarity.

6. "Rolle" appears as "Stelle" in [Klein 1977].

7. Lorey was for many years a close confidant of Klein's in matters regarding mathematics education and made a number of contributions to the publications of the International Mathematics Instruction Commission. One such work, his monumental study of mathematics education at the German universities [Lorey 1916], reflects this relationship very clearly, as Klein supplied lengthy accounts of his activities and career especially for this publication.

8. It is rather amusing that Klein should have made this comparison, since according to W. H. Young, "although a German, and although endowed with an excessive acuteness of hearing, he could not distinguish one tune from another" [Young 1928, 15].

REFERENCES

Frei, G. 1984. Felix Klein (1849–1925)—A biographical sketch. *Jahrbuch Überblicke Mathematik,* 229–254.

Frewer, M. 1979. *Das Mathematische Lesezimmer der Universität Göttingen unter der Leitung von Felix Klein.* Köln: Bibliothekar-Lehrinstitut des Landes Nordrhein-Westfallen.

Klein, F. 1872. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen. Erlangen: Deichert.

—— 1923. Göttinger Professoren. Lebensbilder von eigener Hand. *Mitteilungen Universitätsbund Göttingen* **5,** 11–36.

—— 1967. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert,* 2 vols. in 1. New York: Chelsea. Reprint of the Berlin edition of 1926–1927.

—— 1977. *Felix Klein: Handschriftlicher Nachlass,* K. Jacobs, ed. Erlangen.

Lorey, W. 1916. *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts.* Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Bd. III, H. 9. Leipzig: Teubner.

Manegold, K. 1970. *Universität, Technische Hochschule, und Industrie. Ein Beitrag zur Emanzipation der Technik im 19. Jahrhundert unter besonderer Berücksichtigung der Bestrebungen Felix Kleins*. Berlin: Dunker & Humblot.

Pyenson, L. 1979. Mathematics, education, and the Göttingen approach to physical reality, 1890–1914. *Europa: A Journal of Interdisciplinary Studies* **2**(2), 91–127.

—— 1983. *Neohumanism and the persistence of pure mathematics in Wilhelmian Germany*. Memoirs of the American Philosophical Society, Vol. 150. Philadelphia: Amer. Philos. Soc.

Rowe, D. E. 1983. A forgotten chapter in the history of Felix Klein's Erlanger Programm. *Historia Mathematica* **10**, 448–454.

Selle, G. V. 1937. *Die Georg-August-Universität zu Göttingen, 1737–1937*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Tobies, R. 1979. Zur wissenschaftsorganisatorischen Tätigkeit von Felix Klein im Rahmen der Breslauer Unterrichtskommission. *Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* **16**, 50–63.

—— 1981. *Felix Klein*. Biographen hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 50. Leipzig: Teubner.

Young, W. H. 1928. Christian Felix Klein, 1849–1925. *Proceedings of the London Royal Society (A)* **121**, 1–29.