ČASOVÉ ŘADY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, UKB A1, 6.NP, dv.č.613

EVROPSKÁ UNIE esf

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

XIII. REALIZACE DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

REALIZACE DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

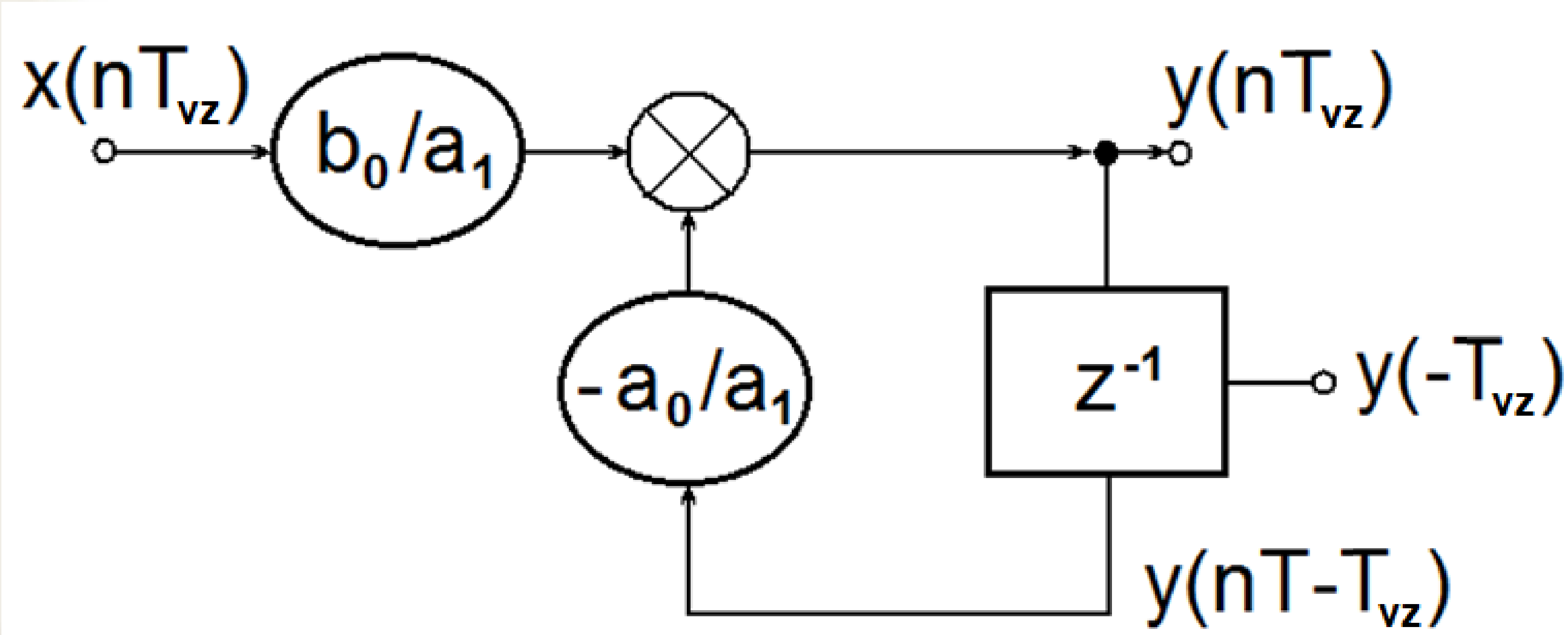
Lineární diskrétní modely reálných systémů lze realizovat pomocí tří základních členů:

- ☑ proporcionální člen (násobení konstantou);
- ☑ zpožďovací člen;
- ☑ sumační, resp. diferenční člen.

REALIZACE DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

$$a_1 y(nT_{vz}) + a_0 y(nT_{vz} - T_{vz}) = b_0 x(nT_{vz})$$

$$y(nT_{vz}) = b_0 x(nT_{vz})/a_1 - a_0 y(nT_{vz} - T_{vz})/a_1$$



PROPORCIONÁLNÍ ČLEN

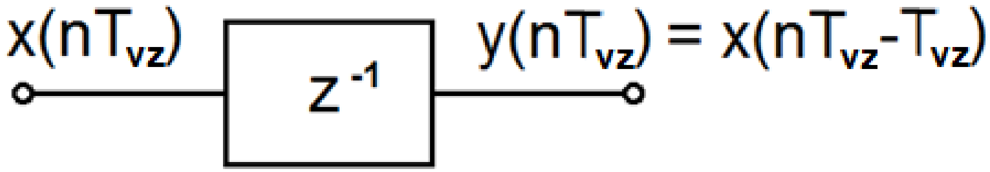
- výstupní průběh je tvarově shodný se vstupem;
- poměr hodnot výstupní a vstupní hodnoty je roven „zesílení“ k;
- přenosová funkce je určena vztahem

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = k$$

ZPOŽĎOVACÍ ČLEN

- ☑ diferenční rovnice

  $y(nT_{vz}) = x(nT_{vz} - T_{vz})$



- ☑ obrazová přenosová funkce

  $Y(z) = X(z).z^{-1} \Rightarrow \quad H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

- ☑ frekvenční přenosová funkce

$$z = e^{i\Omega T_{vz}} \quad z^{-1} = e^{-i\Omega T_{vz}}$$

$$H(e^{i\Omega T_{vz}}) = e^{-i\Omega T_{vz}}$$

TYPY DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

- ☑ **systémy s klouzavým průměrem** (moving average – MA)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{1} = \sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}$$

diferenční rovnice

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \ldots + a_N x(k-m),$$

- ☑ **systémy autoregresivní** (AR)

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

- ☑ **systémy ARMA**

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

TYPY DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

Teoreticky lze systémy splňující zadané požadavky realizovat podle tzv. **Woldova dekompozičního teorému** kterýmkoliv z uvedených typů systémových struktur. Je to jen otázka složitosti, resp. řádu systému.

Podle Woldova teorému platí, že:

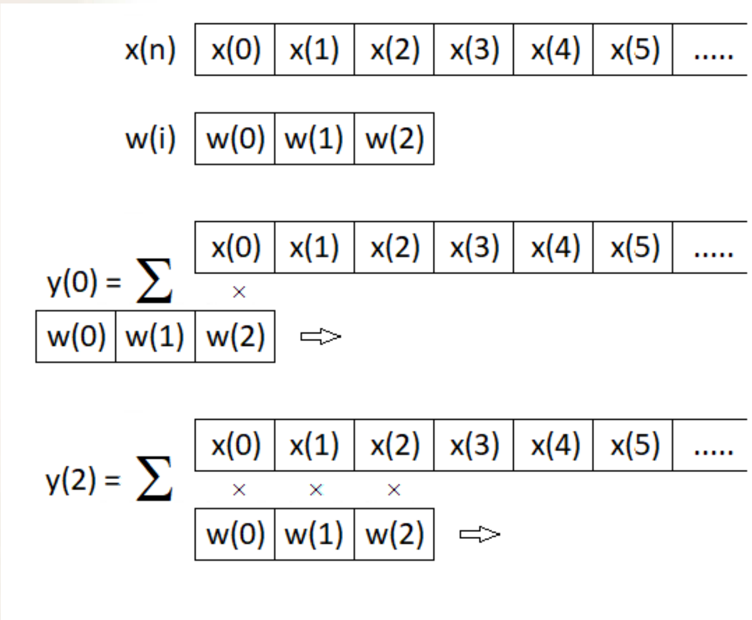
- ☑ jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR systémem (modelem), maximálně ∞ řádu;
- ☑ jakýkoliv ARMA nebo AR proces může být reprezentován MA systémem (modelem) maximálně ∞ řádu.

SYSTÉMY S KLOUZAVÝM PRŮMĚREM (MA) / / SYSTÉMY S KONEČNOU IMPULZNÍ ODEZVOU (KIO)

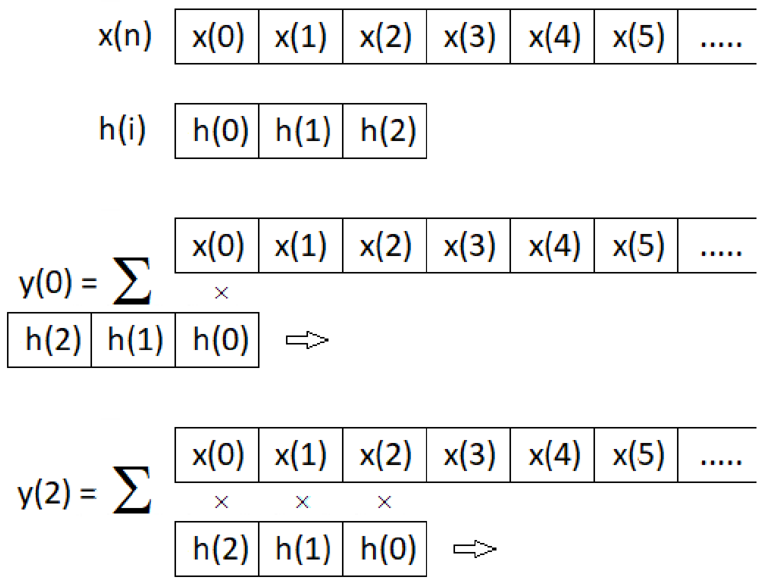
- ☑ obecný vztah:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} w(m) \cdot x(n - M + 1 + m)$$

kde w(m), m = 0, 1, 2, ..., M-1 je váhová posloupnost a x(•) je vstupní posloupnost systému.



výpočetní schéma MA systému



konvoluční výpočetní schéma

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI MA (KIO) SYSTÉMŮ

Je-li h(n) = {h(0), h(1), …, h(M-1)} impulzní odezva lineárního systému, je jeho obrazová přenosová funkce daná její Z-transformací

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \cdot z^{-n}$$

Po substituci $z = e^{i\Omega T_{vz}}$, kde T_{vz} je vzorkovací perioda, dostáváme frekvenční přenosovou funkci

$$H(e^{i\Omega T_{vz}}) = \left|H(e^{i\Omega T_{vz}})\right| \cdot e^{\varphi(\Omega)} = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \cdot e^{-i\Omega n T_{vz}} \qquad (✿)$$

Vzhledem k periodicitě funkce s periodou rovnou úhlové vzorkovací frekvenci $\omega_{vz}=2\pi/T_{vz}$ je periodická s toutéž periodou i frekvenční přenosová funkce.

FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA φ(Ω) MA (KIO) SYSTÉMŮ

Fázová charakteristika $\varphi(\Omega)$ je díky vlastnostem komplexní exponenciály funkce **lichá**, tj. platí

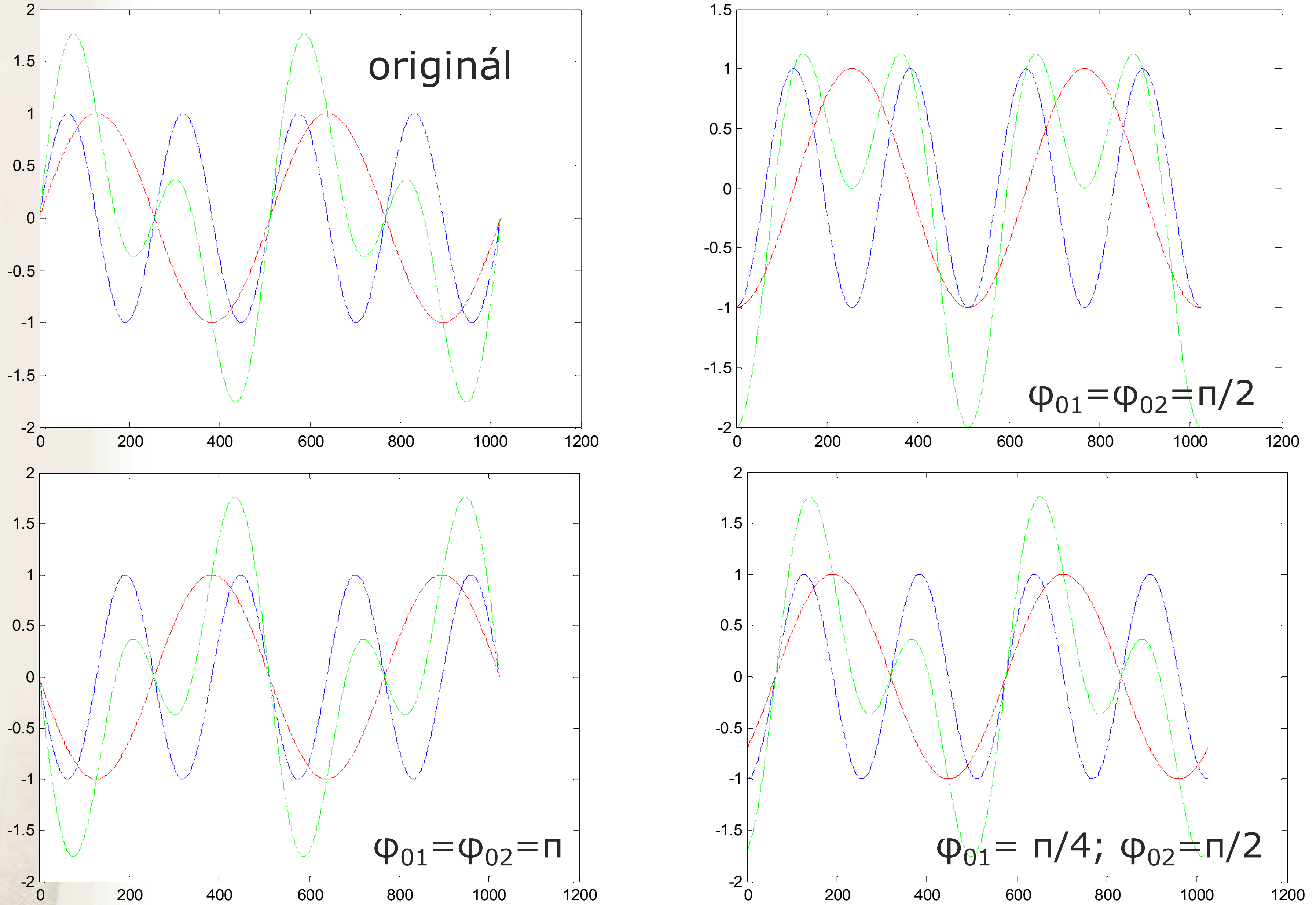
$$\varphi(-\Omega) = -\varphi(\Omega).$$

Obecně je **nelineární**, z pohledu kvality výstupní posloupnosti systému je však žádoucí, aby její průběh byl lineární, tj. aby platilo

$$\varphi(\Omega) = -\tau\Omega T_{vz}; \quad -\frac{\pi}{T_{vz}} = -\frac{\Omega_{vz}}{2} \leq \Omega \leq \frac{\Omega_{vz}}{2} = \frac{\pi}{T_{vz}}$$

kde τ je konstanta udávající o kolik vzorků je výstup systému zpožděn oproti vstupní posloupnosti. V tom případě systém nezavádí tzv. **fázové zkreslení** – všechny harmonické složky jsou při zpracování systémem zpožděny přímo úměrně jejich frekvenci.

FÁZOVÉ HRÁTKY



VLIV IMPULZNÍ ODEZVY NA TVAR FÁZOVÉ CHARAKTERISTIKY

Je-li fázová charakteristika lineární, tj. $\varphi(\Omega) = -\tau\Omega T_{vz}$, pak vztah (✿) lze psát ve tvaru

$$H(e^{i\Omega T_{vz}}) = \left|H(e^{i\Omega T_{vz}})\right| \cdot e^{-i\tau\Omega T_{vz}} = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \cdot e^{-i\Omega n T_{vz}}$$

Protože $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i.\sin\alpha$, pak rovnost komplexních hodnot ve výše uvedeném vztahu můžeme vyjádřit rovností jejich reálných a imaginárních složek

$$\left|H(e^{i\Omega T_{vz}})\right| \cdot \cos(\tau\Omega T_{vz}) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \cdot \cos(\Omega n T_{vz});$$

$$\left|H(e^{i\Omega T_{vz}})\right| \cdot \sin(\tau\Omega T_{vz}) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \cdot \sin(\Omega n T_{vz}).$$

VLIV IMPULZNÍ ODEZVY NA TVAR FÁZOVÉ CHARAKTERISTIKY

Z podílu obou rovnic

$$\frac{\sin(\tau\Omega T_{vz})}{\cos(\tau\Omega T_{vz})} = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cdot\sin(\Omega n T_{vz})}{\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cdot\cos(\Omega n T_{vz})}$$

po roznásobení dostaneme

$$\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cdot\cos(\Omega n T_{vz})\cdot\sin(\tau\Omega T_{vz}) - \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cdot\sin(\Omega n T_{vz})\cdot\cos(\tau\Omega T_{vz}) = 0$$

a dále

$$\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cdot\left(\cos(\Omega n T_{vz})\cdot\sin(\tau\Omega T_{vz}) - \sin(\Omega n T_{vz})\cdot\cos(\tau\Omega T_{vz})\right) = 0$$

VLIV IMPULZNÍ ODEZVY NA TVAR FÁZOVÉ CHARAKTERISTIKY

Protože sin(α-β) = sinα.cosβ – cosα.sinβ, lze rovnici přepsat do tvaru

$$\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cdot\sin(\tau\Omega T_{vz} - n\Omega T_{vz}) = 0$$

která má řešení $\tau = \frac{M-1}{2}$ pouze když h(n)=h(M-1-n),

tj. pokud je impulzní charakteristika symetrická.

V tom případě můžeme vztah rozepsat

$$h(0)\cdot\sin(\tau\Omega T_{vz}) + h(1)\cdot\sin[(\tau-1)\Omega T_{vz}] + h(2)\cdot\sin[(\tau-2)\Omega T_{vz}] + \ldots$$

$$\ldots + h(M-3)\cdot\sin[(\tau-M+3)\Omega T_{vz}] + h(M-2)\cdot\sin[(\tau-M+2)\Omega T_{vz}] +$$

$$+ h(M-1)\cdot\sin[(\tau-M+1)\Omega T_{vz}] = 0$$

VLIV IMPULZNÍ ODEZVY NA TVAR FÁZOVÉ CHARAKTERISTIKY

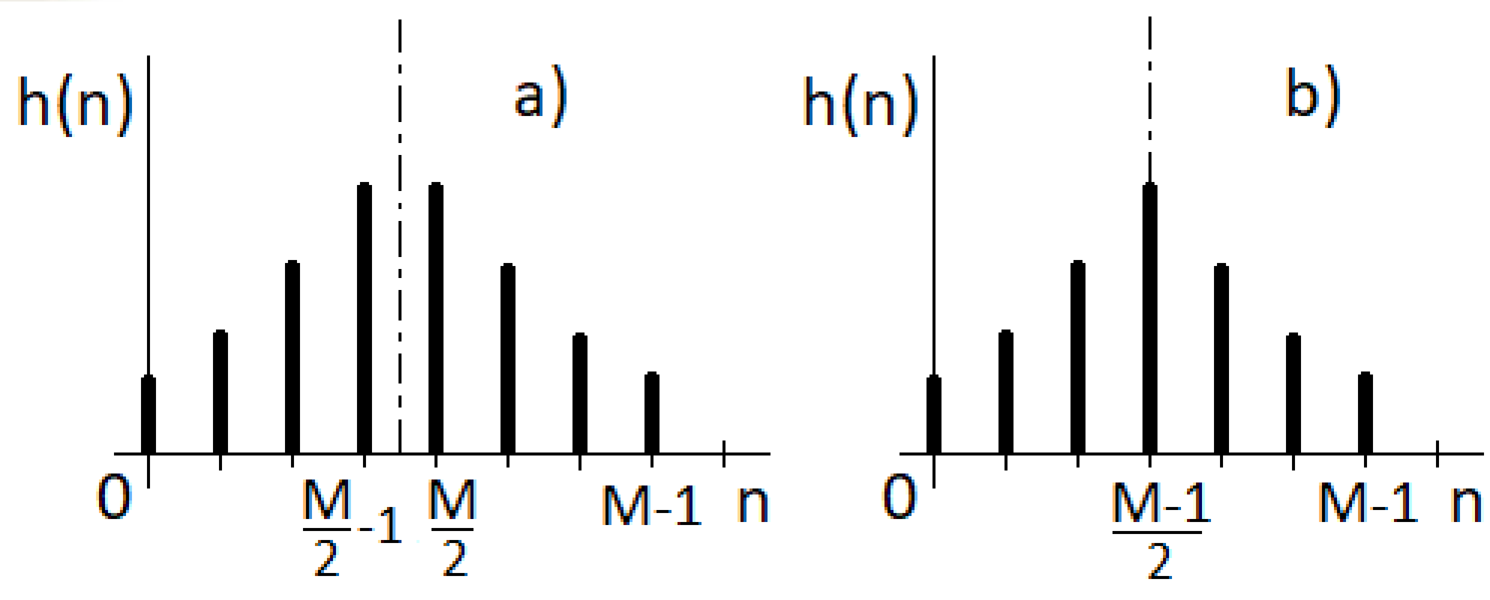
a

$$h(0)\cdot\sin\left(\frac{M-1}{2}\Omega T_{vz}\right)+h(1)\cdot\sin\left(\frac{M-3}{2}\Omega T_{vz}\right)+h(2)\cdot\sin\left(\frac{M-5}{2}\Omega T_{vz}\right)+\dots$$

$$\dots+h(M-3)\cdot\sin\left(\frac{-M+5}{2}\Omega T_{vz}\right)+h(M-2)\cdot\sin\left(\frac{-M+3}{2}\Omega T_{vz}\right)+h(M-1)\cdot\sin\left(\frac{-M+1}{2}\Omega T_{vz}\right)=0$$

Protože sinus je lichá funkce, tj. sin(-α) = -sin(α), a je-li splněna podmínka symetrie impulzní odezvy, pak tato rovnice určitě platí.

VLIV IMPULZNÍ ODEZVY NA TVAR FÁZOVÉ CHARAKTERISTIKY



V případě konečné impulzní charakteristiky se sudým počtem vzorků není hodnota τ celé číslo, osa symetrie prochází mezi (M/2-1)-ním a (M/2)-tým vzorkem. Je-li počet vzorků impulzní odezvy liché číslo, prochází osa symetrie právě [(M-1)/2]-tým vzorkem a $\tau = (M-1)/2$ je celé číslo.

VLIV IMPULZNÍ ODEZVY NA TVAR FÁZOVÉ CHARAKTERISTIKY

Posuneme-li osu symetrie systému s lichým počtem vzorků impulzní odezvy do počátku časové osy, pak $\tau=0$ – průchod systémem formálně nezavádí žádné zpoždění. Nenulové hodnoty impulzní odezvy jsou v tom případě $h(n) = \{h[-(M-1)/2], h[-(M-3)/2], \ldots, h(-1), h(0), h(1), \ldots, h[(M-3)/2], h[(M-1)/2]\}$.

To znamená, že systém není kauzální - pro konvoluční výpočet odezvy potřebuje znát i budoucí vzorky vstupní posloupnosti. Z-transformace (pro nekauzální systémy musí být oboustranná) impulzní odezvy, tj. obrazová přenosová funkce, je

VLIV IMPULZNÍ ODEZVY NA TVAR FÁZOVÉ CHARAKTERISTIKY

Z-transformace (pro nekauzální systémy musí být oboustranná) impulzní odezvy, tj. obrazová přenosová funkce, je

$$H(z) = \sum_{n=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} h(n) \cdot z^{-n} = h[-(M-1)/2] \cdot z^{(M-1)/2} + h[-(M-3)/2] \cdot z^{(M-3)/2} + \ldots$$

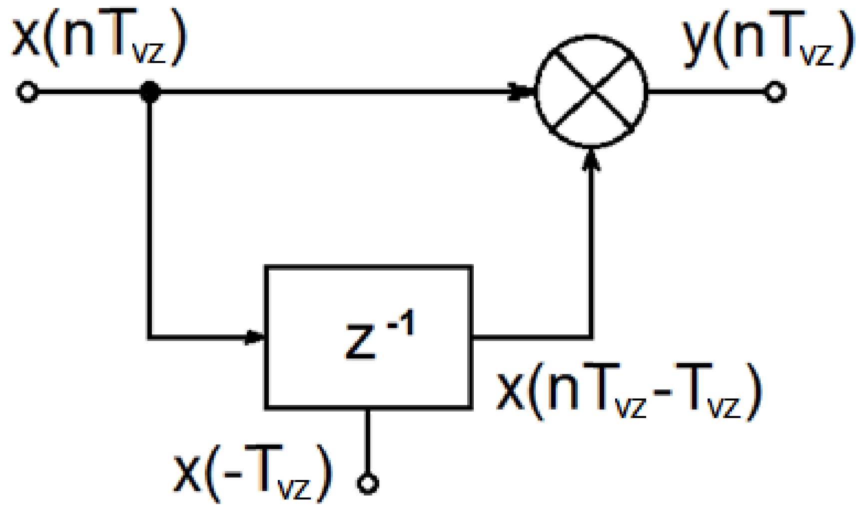
$$\ldots + h(-1) \cdot z^{1} + h(0) \cdot z^{0} + h(1) \cdot z^{-1} + \ldots + h[(M-3)/2] \cdot z^{-(M-3)/2} + h[(M-1)/2] \cdot z^{(M-1)/2}$$

SUMAČNÍ ČLEN 1.ŘÁDU

KLOUZAVÝ PRŮMĚR – MOVING AVERAGE (MA)

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + x(nT_{vz} - T_{vz})$$

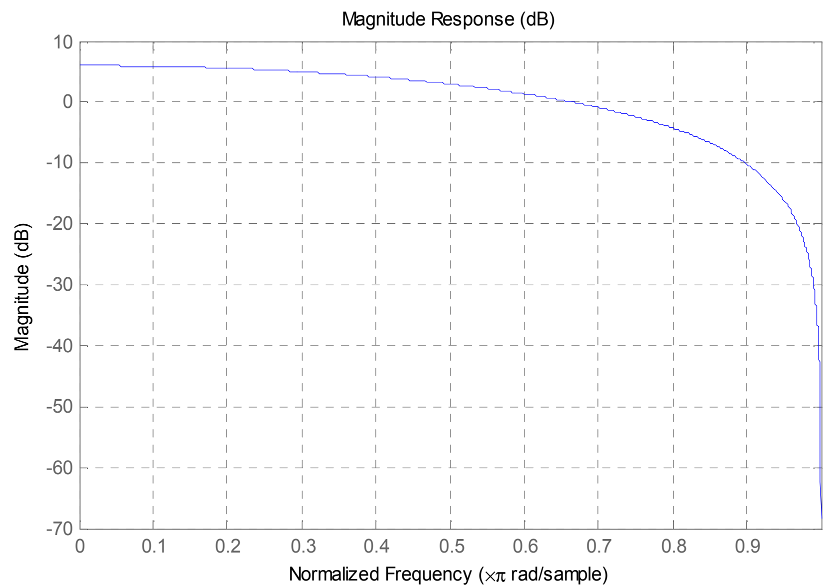


- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) = X(z) + X(z).z^{-1}$$

$$Y(z) = X(z)(1+z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} = 1 + \frac{1}{z} = \frac{1+z}{z}$$

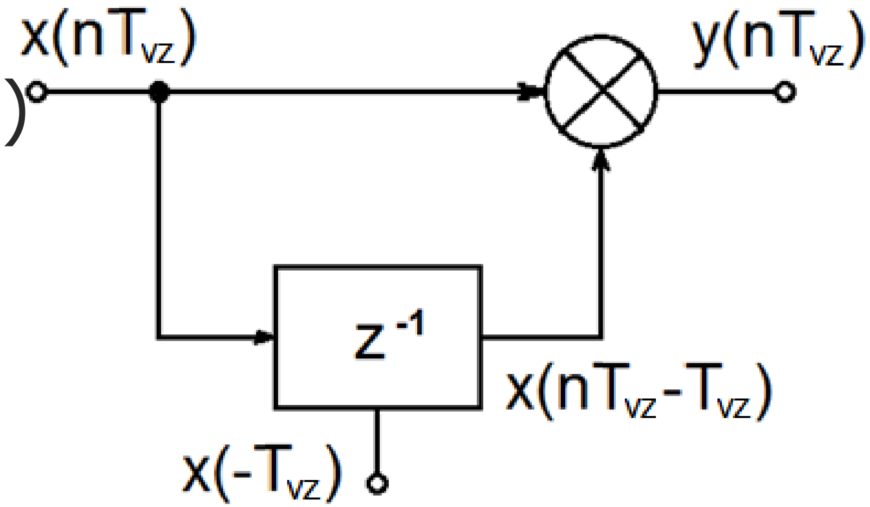


SUMAČNÍ ČLEN 1.ŘÁDU

KLOUZAVÝ PRŮMĚR – MOVING AVERAGE (MA)

- ☑ diferenční rovnice

  $2y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + x(nT_{vz} - T_{vz})$



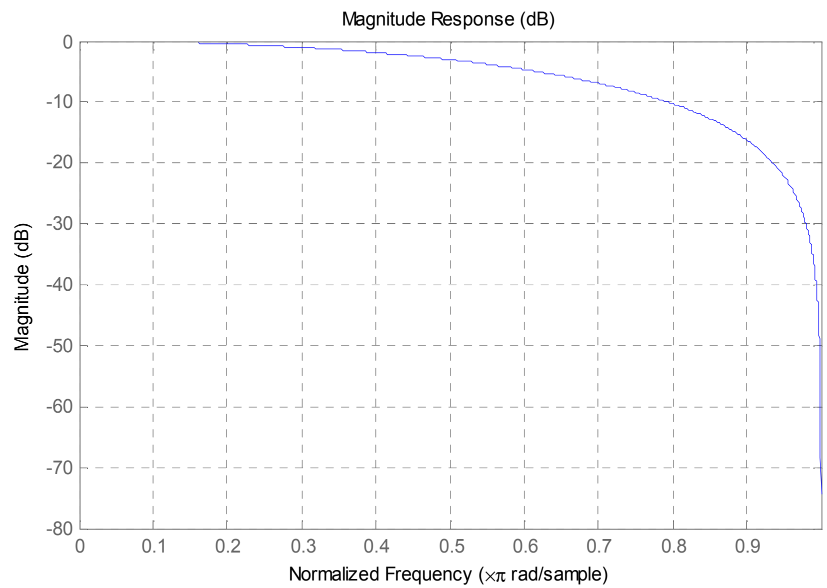
- ☑ obrazová přenosová funkce

  $2Y(z) = X(z) + X(z).z^{-1}$

  $2Y(z) = X(z)(1+z^{-1})$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1+z^{-1})}{2} =$$

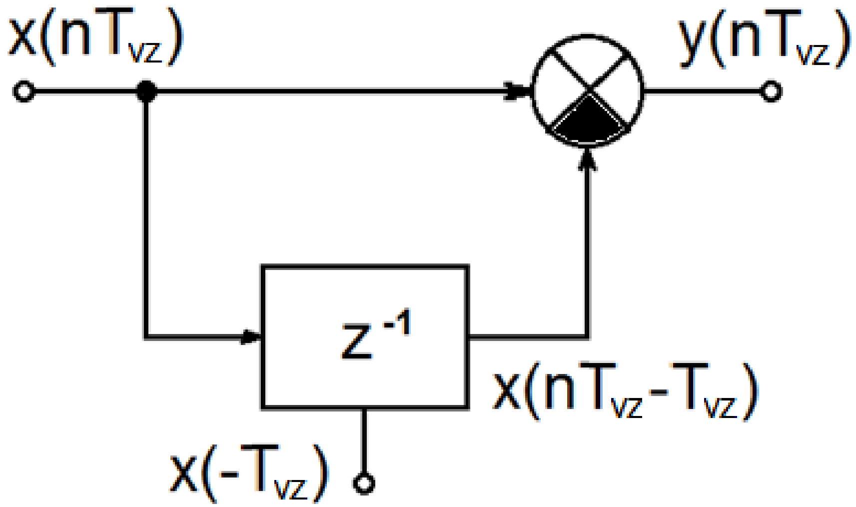
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2z} = \frac{1+z}{2z}$$



DIFERENČNÍ ČLEN 1.ŘÁDU
KLOUZAVÝ PRŮMĚR – MOVING AVERAGE (MA)

- ☑ diferenční rovnice

  $2y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) - x(nT_{vz} - T_{vz})$



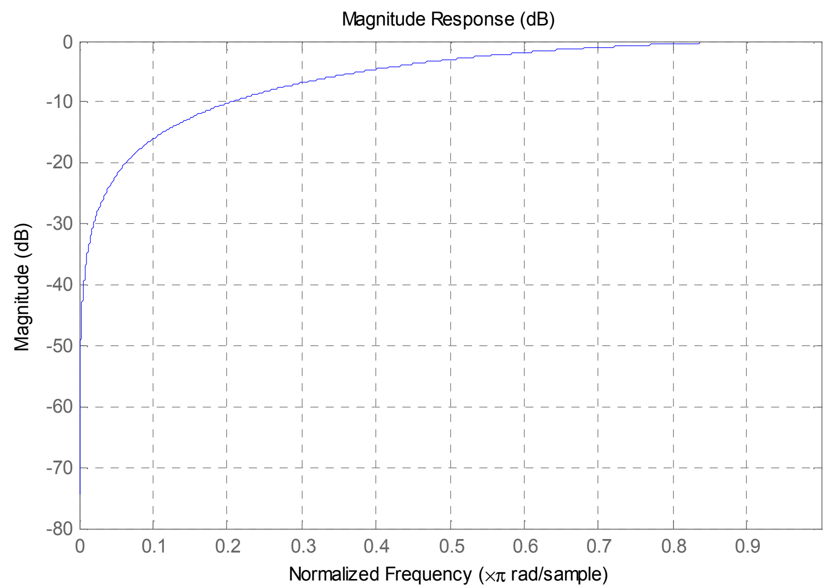
- ☑ obrazová přenosová funkce

  $2Y(z) = X(z) - X(z).z^{-1}$

  $2Y(z) = X(z)(1 - z^{-1})$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{2} =$$

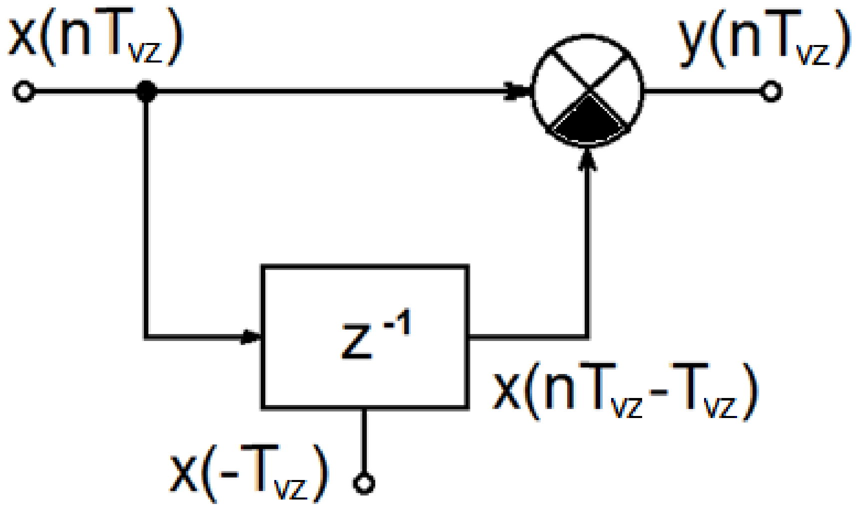
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2z} = \frac{1 - z}{2z}$$



DIFERENČNÍ ČLEN 1.ŘÁDU
KLOUZAVÝ PRŮMĚR – MOVING AVERAGE (MA)

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) - x(nT_{vz} - T_{vz})$$

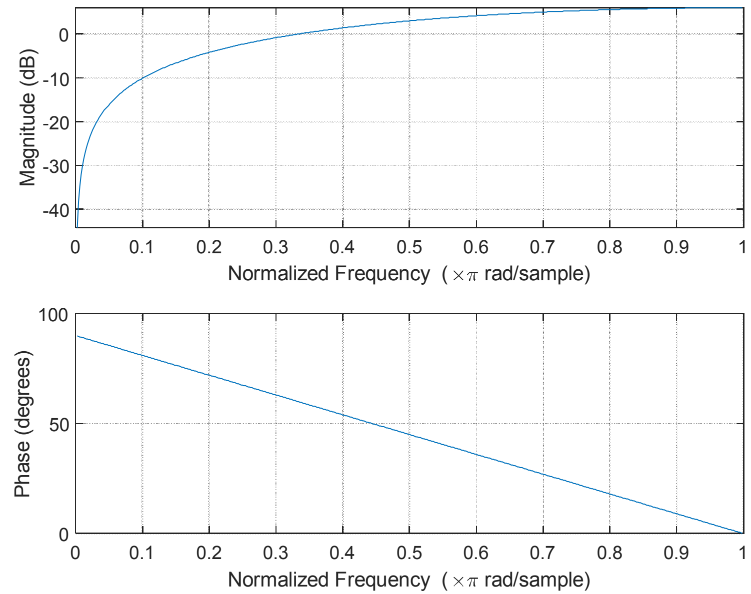


- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) = X(z) - X(z).z^{-1}$$

$$Y(z) = X(z)(1 - z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-1} = 1 - \frac{1}{z} = \frac{1 - z}{z}$$



SUMAČNÍ ČLEN

KLOUZAVÝ PRŮMĚR – MOVING AVERAGE (MA)

☑ diferenční rovnice

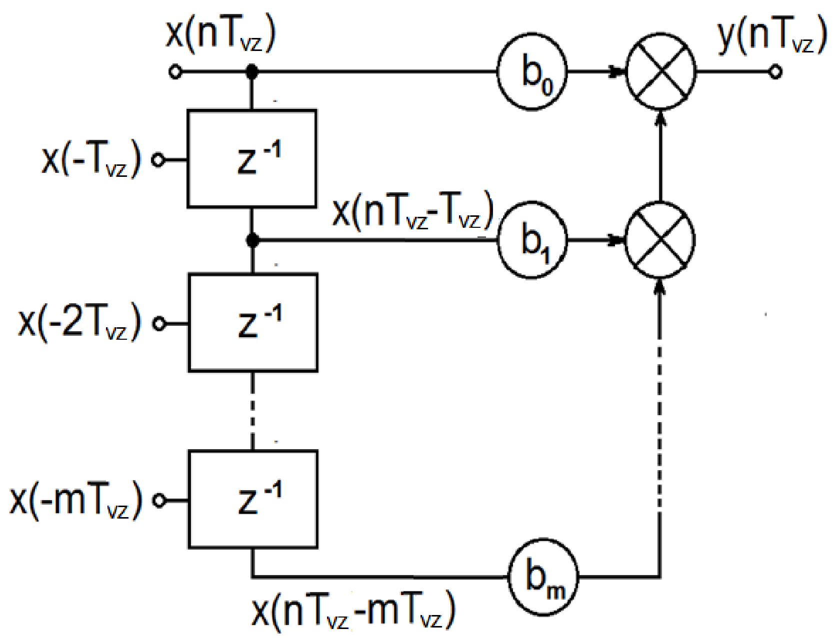
$$y(nT_{vz}) = \sum_{i=0}^{m} b_i x(nT_{vz} - mT_{vz})$$

☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z).z^{-1} + \ldots$$

$$\ldots + b_m X(z).z^{-m}$$

$$Y(z) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m})$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m} = \sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i} =$$

$$= b_0 + \frac{b_1}{z} + \ldots + \frac{b_m}{z^m} = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}{z^m} = \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i z^i}{z^m}$$

SUMAČNÍ ČLEN
KLOUZAVÝ PRŮMĚR – MOVING AVERAGE (MA)

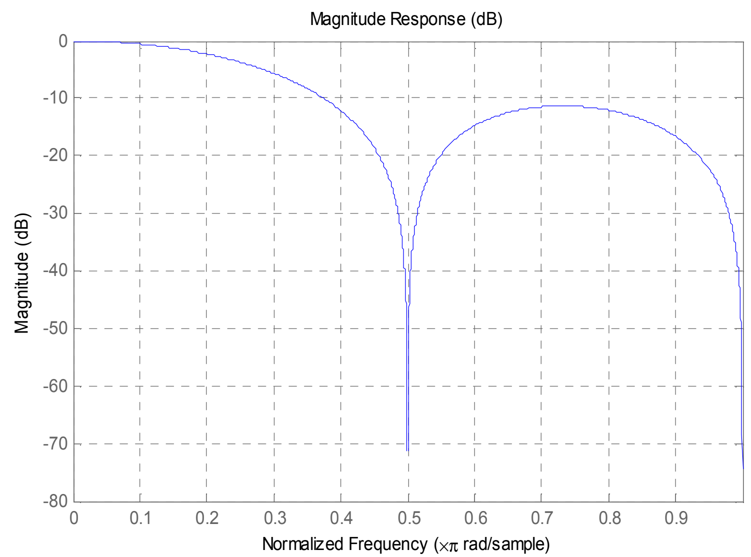
- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) = \sum_{i=0}^{m} b_i x(nT_{vz} - mT_{vz})$$

- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z).z^{-1} + \ldots$$
$$\ldots + b_m X(z).z^{-m}$$

$$Y(z) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m})$$



$b_i = 1,\ i=1,..,4;\ a_0 = 4$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m} = \sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i} =$$

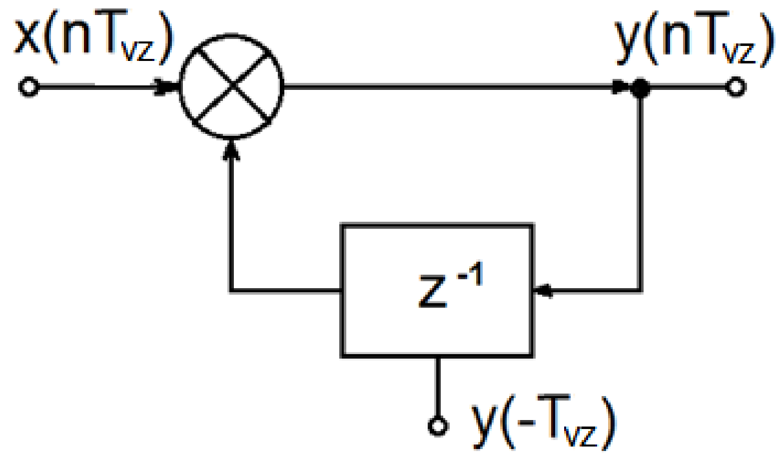
$$= b_0 + \frac{b_1}{z} + \ldots + \frac{b_m}{z^m} = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}{z^m} = \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i z^i}{z^m}$$

AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) - y(nT_{vz}-T_{vz}) = x(nT_{vz})$$

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + y(nT_{vz}-T_{vz})$$

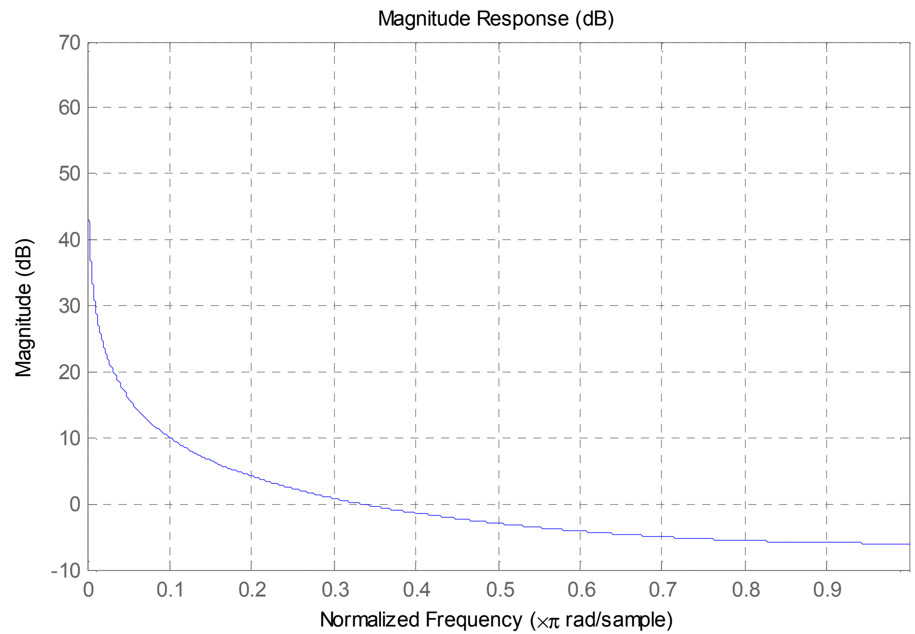


- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) - Y(z).z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)(1-z^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

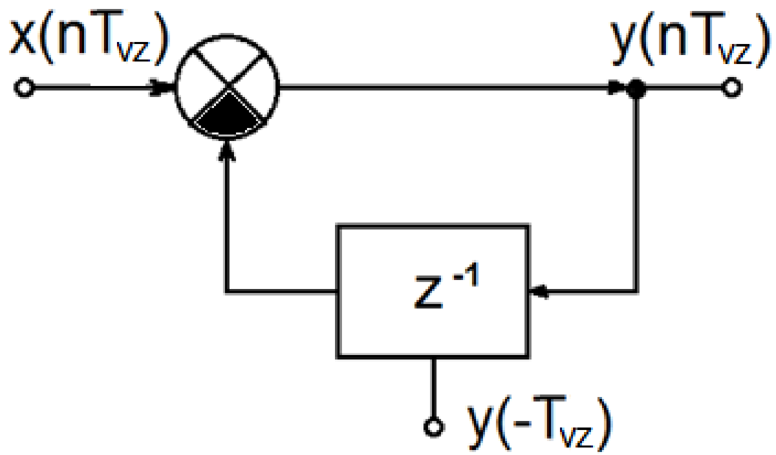


AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

- diferenční rovnice

$y(nT_{vz})$ + $y(nT_{vz}-T_{vz}) = x(nT_{vz})$

$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz})$ - $y(nT_{vz}-T_{vz})$

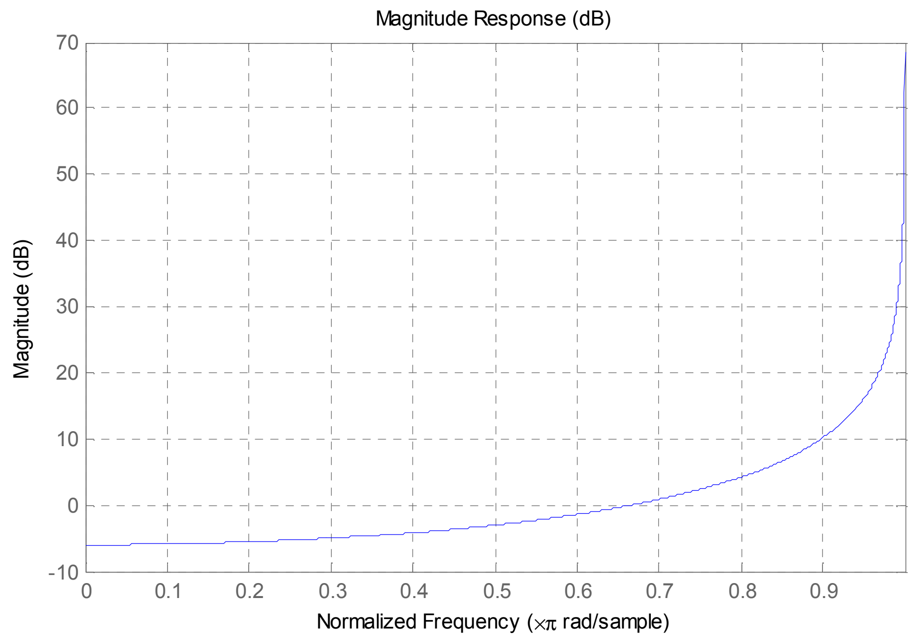


- obrazová přenosová funkce

$Y(z) + Y(z).z^{-1} = X(z)$

$Y(z)(1+z^{-1}) = X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$

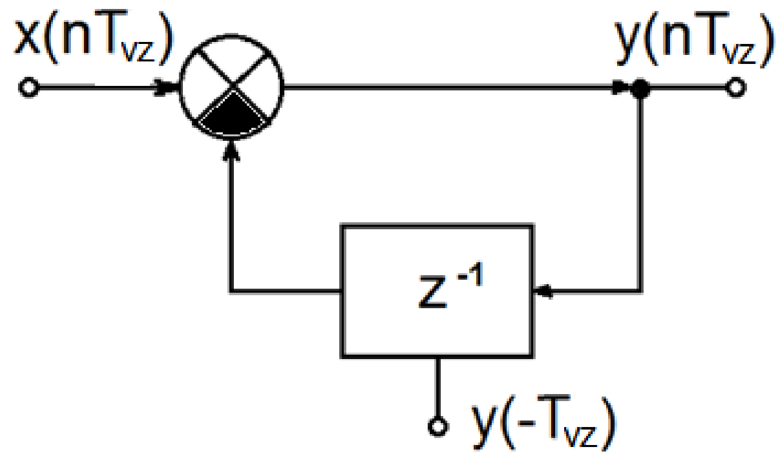


AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + y(nT_{vz}-T_{vz}) = x(nT_{vz})$$

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) - y(nT_{vz}-T_{vz})$$

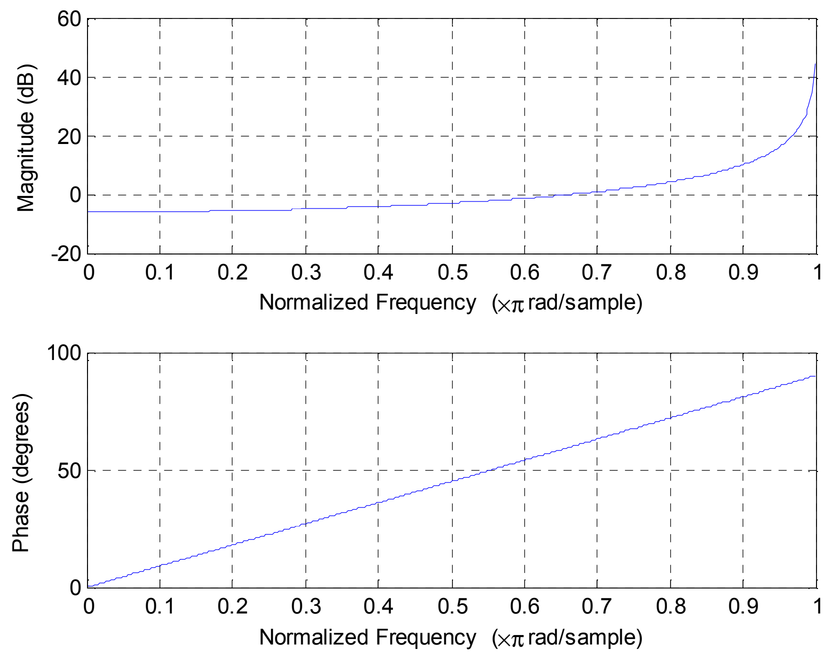


☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + Y(z).z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)(1+z^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$

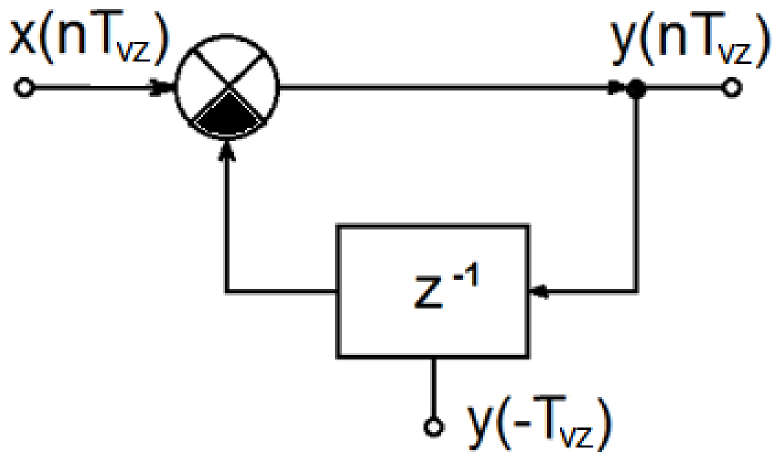


AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$y(nT_{vz}) + y(nT_{vz}-T_{vz}) = 2x(nT_{vz})$

$y(nT_{vz}) = 2x(nT_{vz}) - y(nT_{vz}-T_{vz})$

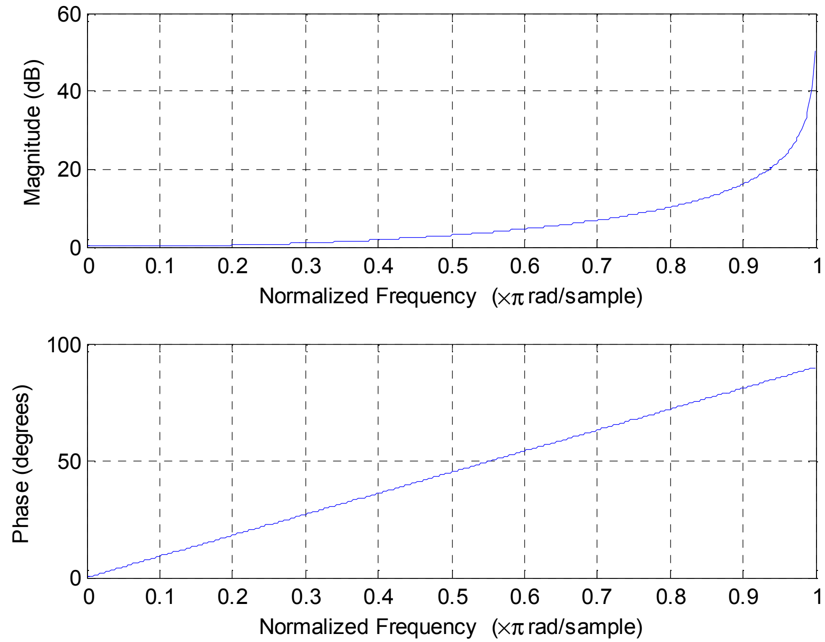


- ☑ obrazová přenosová funkce

$Y(z) + Y(z).z^{-1} = 2X(z)$

$Y(z)(1+z^{-1}) = 2X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1+z^{-1}} = \frac{2z}{z+1}$$

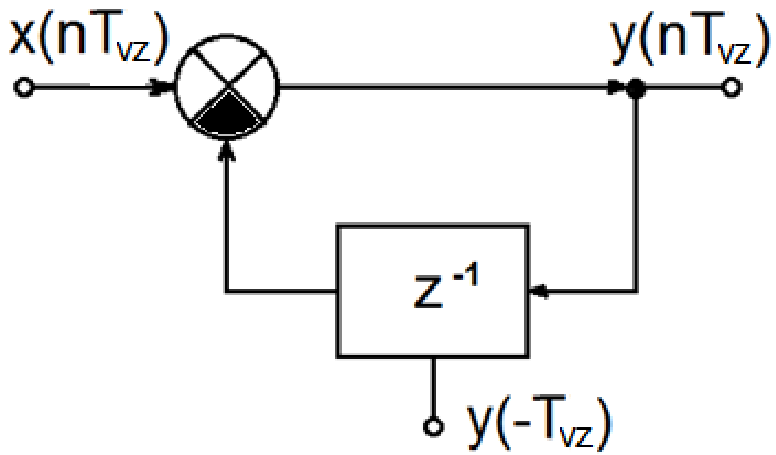


AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

☑ diferenční rovnice

$y(nT_{vz}) + 0{,}9 . y(nT_{vz} - T_{vz}) = 1{,}9 . x(nT_{vz})$

$y(nT_{vz}) = 1{,}9 . x(nT_{vz}) - 0{,}9 . y(nT_{vz} - T_{vz})$

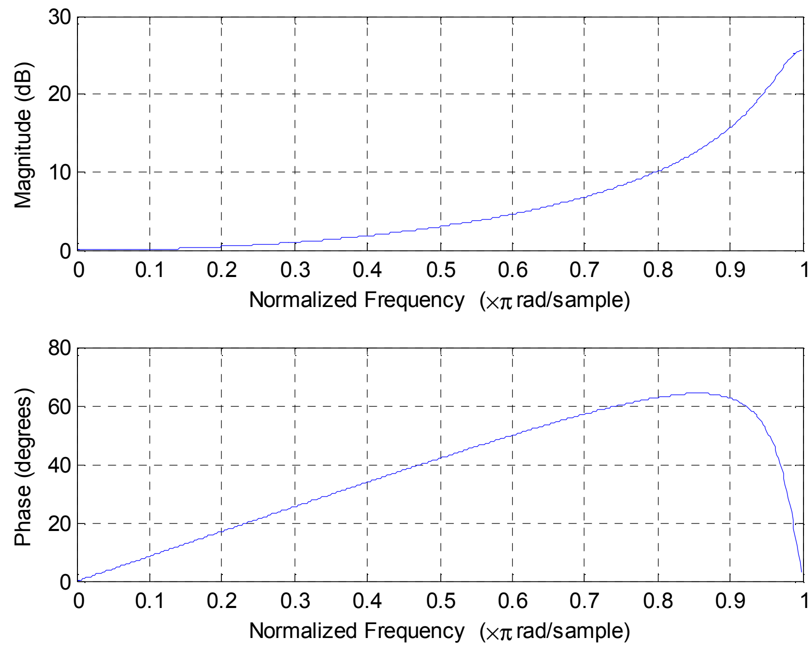


☑ obrazová přenosová funkce

$Y(z) + 0{,}9 . Y(z) . z^{-1} = 1{,}9 . X(z)$

$Y(z)(1 + 0{,}9 . z^{-1}) = 1{,}9 . X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1{,}9}{1 + 0{,}9 . z^{-1}} = \frac{1{,}9 . z}{z + 0{,}9}$$

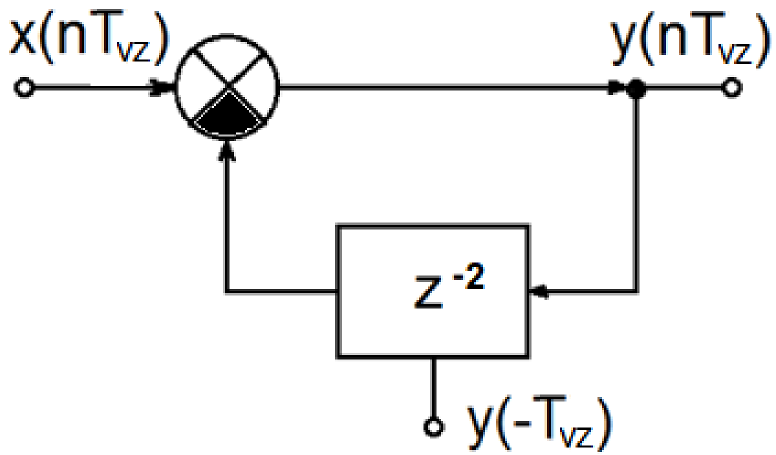


AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 2. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz})+y(nT_{vz}-2T_{vz})=2.x(nT_{vz})$$

$$y(nT_{vz})=2.x(nT_{vz})-y(nT_{vz}-2T_{vz})$$



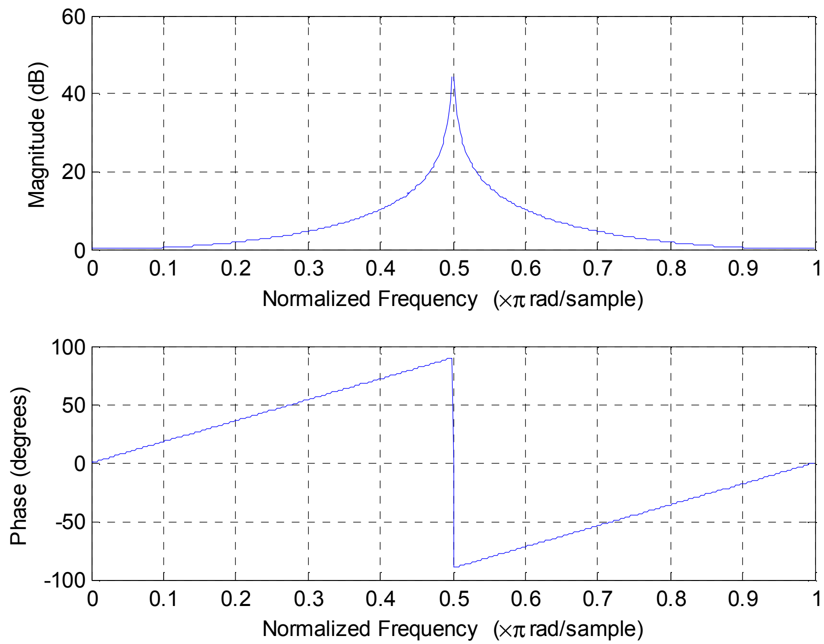
- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + Y(z).z^{-2} = 2.X(z)$$

$$Y(z)(1+ z^{-2}) = 2.X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2}{1+z^{-2}}=\frac{2z^2}{z^2+1}=$$

$$=\frac{2z^2}{(z+i)(z-i)}$$

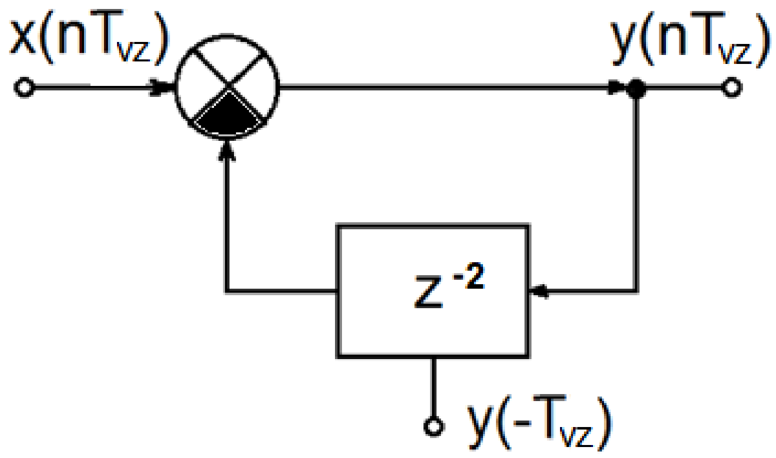


AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 2. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$y(nT_{vz})+0{,}81y(nT_{vz}-2T_{vz})=1{,}81x(nT_{vz})$

$y(nT_{vz})=1{,}81x(nT_{vz})-0{,}81y(nT_{vz}-2T_{vz})$



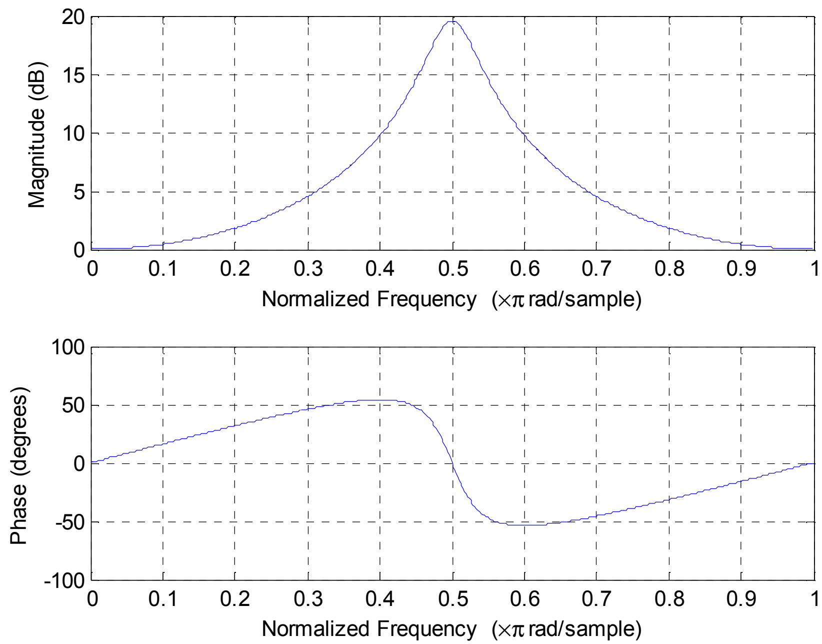
- ☑ obrazová přenosová funkce

$Y(z) + 0{,}81.Y(z).z^{-2} = 1{,}81.X(z)$

$Y(z)(1+ 0{,}81.z^{-2}) = 1{,}81.X(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1{,}81}{1+0{,}81.z^{-2}}=$$

$$=\frac{1{,}81.z^2}{z^2+0{,}81}=\frac{1{,}81.z^2}{(z+0{,}9i)(z-0{,}9i)}$$

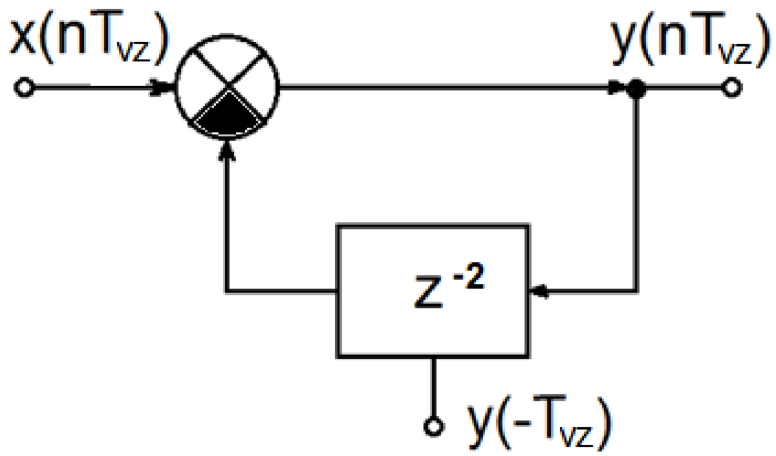


AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 2. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$y(nT_{vz})+1{,}23y(nT_{vz}-{\color{red}2}T_{vz})=2{,}23x(nT_{vz})$

$y(nT_{vz})=2{,}23x(nT_{vz})-1{,}23y(nT_{vz}-{\color{red}2}T_{vz})$



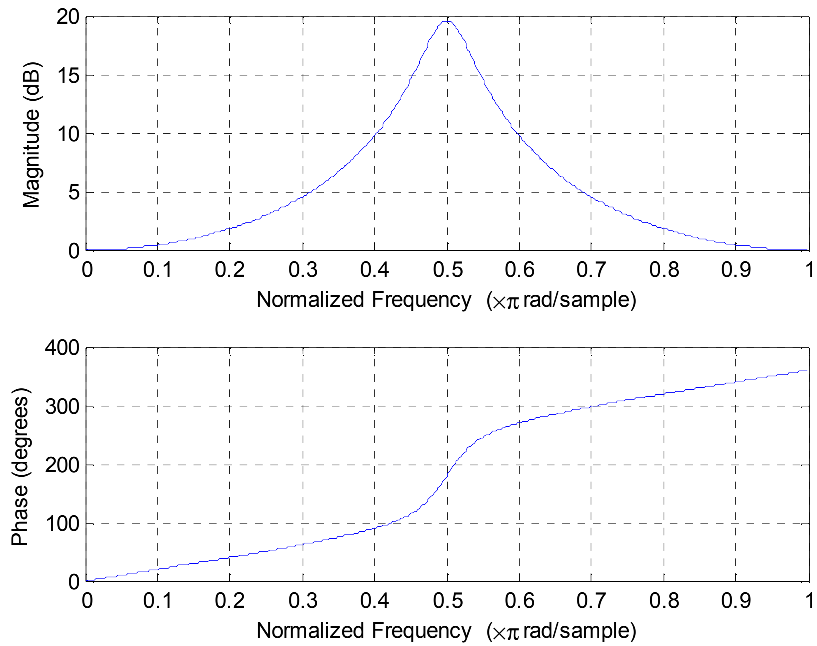
- ☑ obrazová přenosová funkce

$Y(z) + 1{,}23.Y(z).z^{-{\color{red}2}} = 2{,}23.X(z)$

$Y(z)(1+ 1{,}23.z^{-{\color{red}2}}) = 2{,}23.X(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2{,}23}{1+1{,}23.z^{-2}}=$$

$$=\frac{2{,}23.z^2}{z^2+1{,}23}=\frac{2{,}23.z^2}{(z+1{,}11.i)(z-1{,}11.i)}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN

- diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) - a_1 y(nT_{vz}-T_{vz}) - \dots - a_m y(nT_{vz}-mT_{vz}) = b_0 x(nT_{vz})$$

$$y(nT_{vz}) = b_0 x(nT_{vz}) + a_1 y(nT_{vz}-T_{vz}) + \dots + a_m y(nT_{vz}-mT_{vz})$$

- obrazová přenosová funkce

$$Y(z) - a_1 Y(z).z^{-1} - \dots - a_m Y(z).z^{-m} = b_0 X(z)$$

$$Y(z) - \sum_{i=1}^{m} a_i Y(z).z^{-i} = b_0.X(z)$$

$$Y(z)\left(1 - \sum_{i=1}^{m} a_i.z^{-i}\right) = b_0.X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{\left(1 - \sum_{i=1}^{m} a_i.z^{-i}\right)} = \frac{b_0 z^m}{z^m - \sum_{i=1}^{m} a_i.z^{m-i}}$$