



ČASOVÉ ŘADY



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, UKB A1, dv.č.613



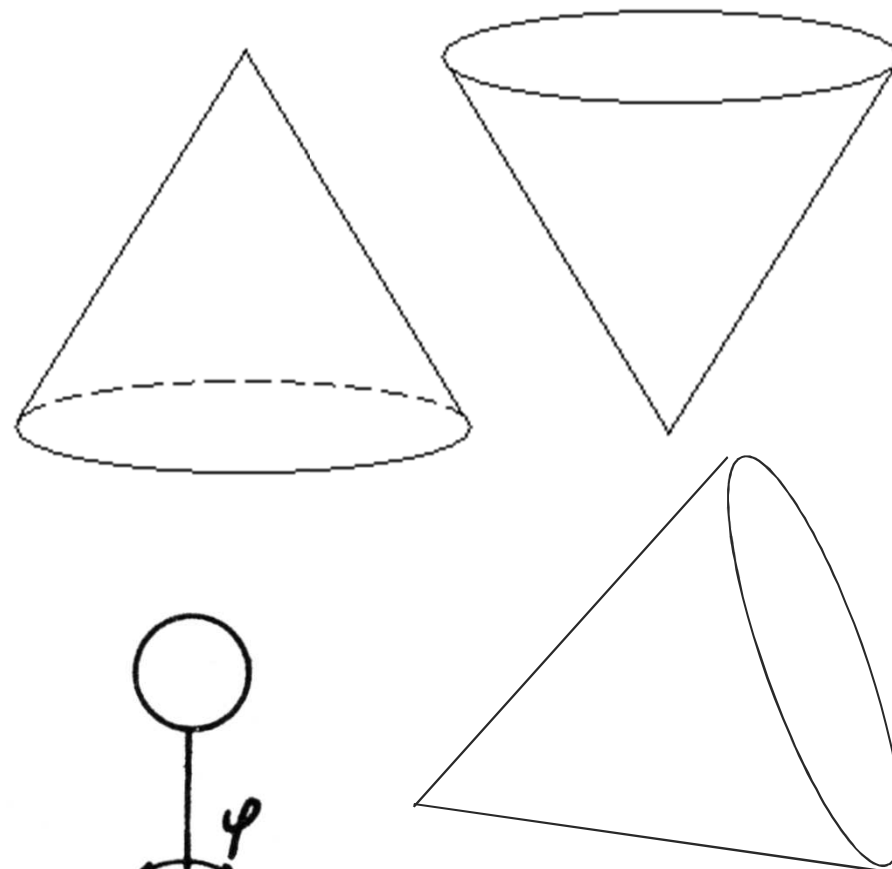
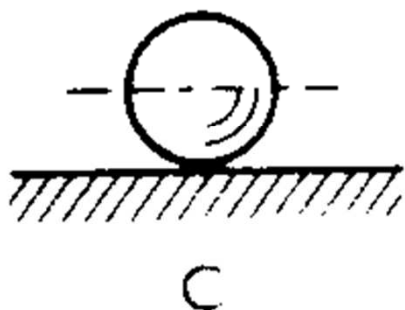
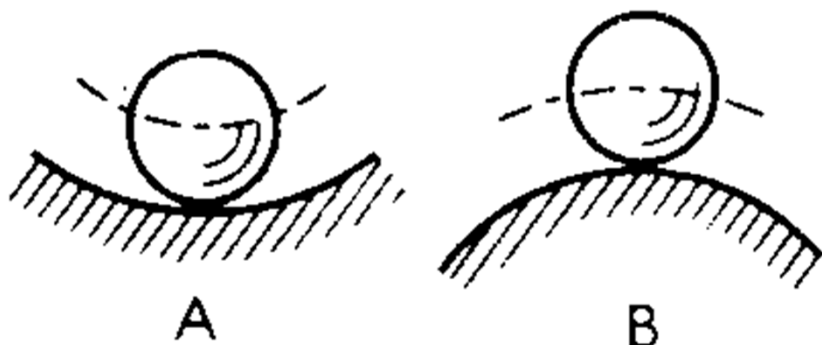
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

XI. STABILITA

KDY JE A KDY NENÍ SYSTÉM STABILNÍ

- ☑ **Stabilita** - vlastnost systému, kterou můžeme charakterizovat jeho schopností udržet své chování či rysy (parametry) v předepsaných mezích i za případného vnějšího rušivého působení.
- ☑ **Rovnováha** - relativně stálý stav systému, vzniklý vyrovnáním vlivů na systém působících.

KDY JE A KDY NENÍ SYSTEM STABILNÍ



STABILITA NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

Ljapunovská stabilita: Rovnovážný stav x_e je Ljapunovsky stabilní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolný počáteční stav x_0 , který leží v okolí δ rovnovážného stavu, tj.

$$\|x_0 - x_e\| < \delta$$

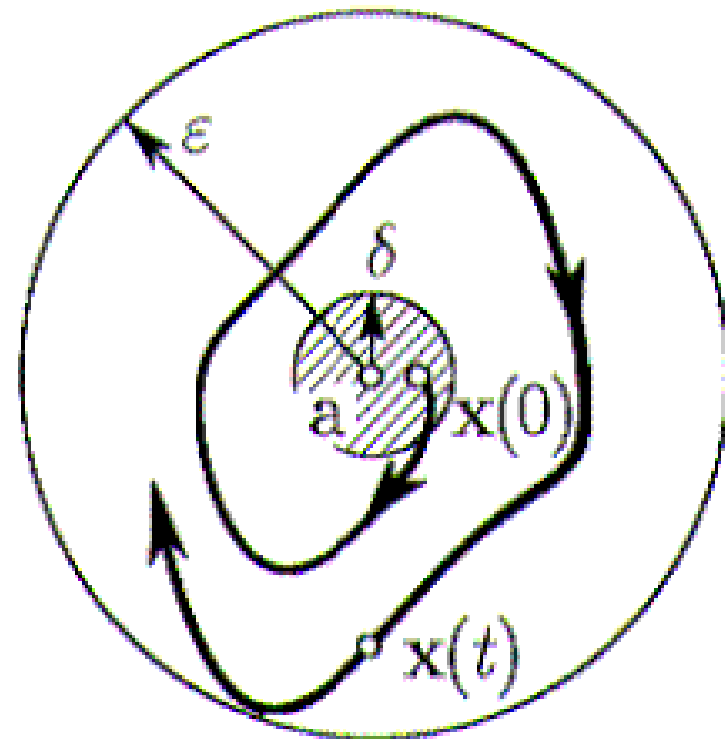
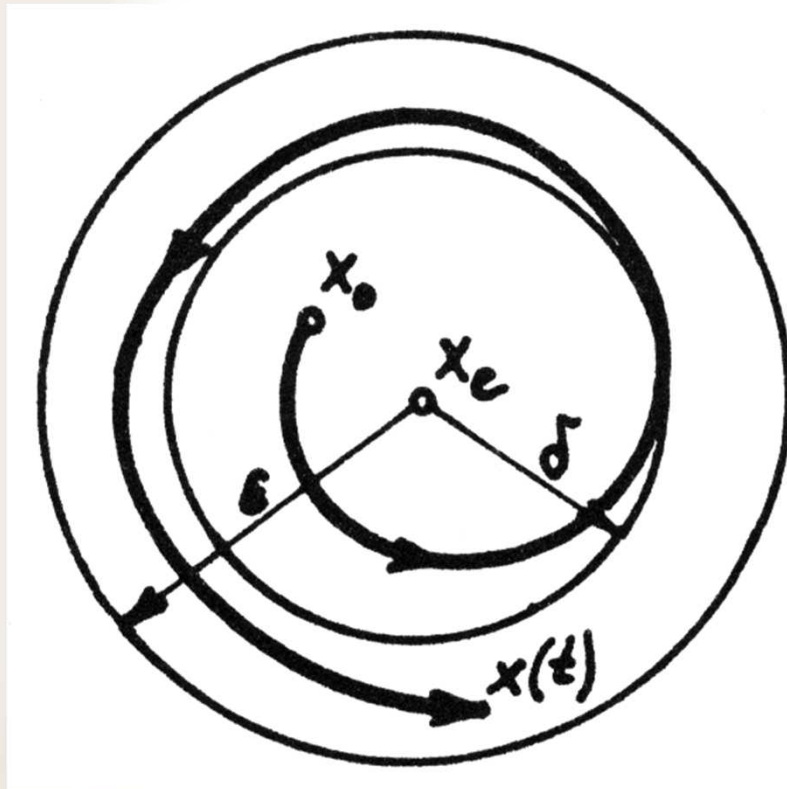
platí, že všechny stavy $x(t)$, které jsou řešením systému, leží v blízkosti rovnovážného stavu, tj.

$$\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$$

Nevyžadujeme, aby řešení konvergovalo do rovnovážného stavu, ale pouze vyžadujeme, aby se mu příliš nevzdalovalo.

STABILITA NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

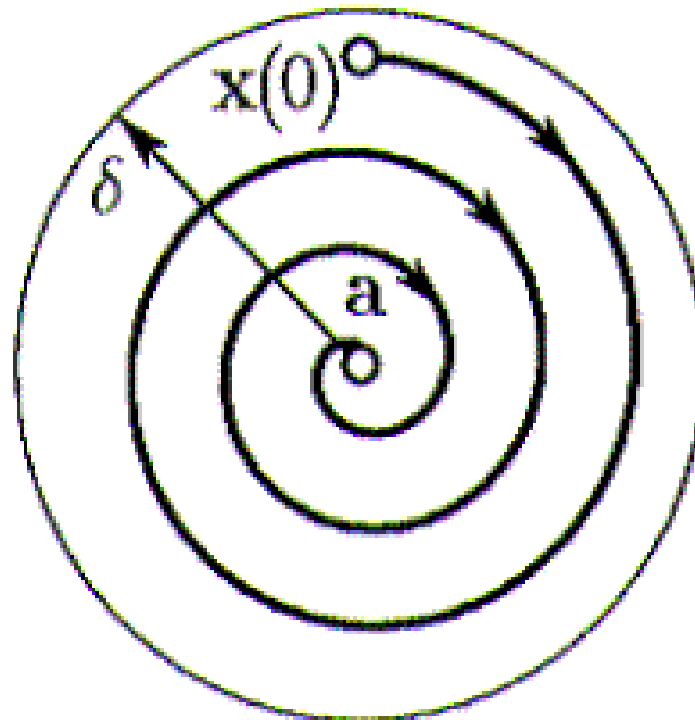
☑ Ljapunovská stabilita



STABILITA LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

asymptotická stabilita:

asymptoticky stabilní systém je systém, jehož přirozená odezva časem zaniká



STABILITA LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

dva základní přístupy k určení stability:

- ☑ stabilita vynuceného pohybu/externí stabilita;
- ☑ stabilita vůči počátečnímu stavu/interní (daná konvergencí přirozené odezvy);

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

- ☑ tendence systému reagovat přiměřeně na konečný podnět (co do hodnot i trvání) a po jeho zániku se vrátit do výchozího stavu (není nezbytnou podmínkou);
stabilita BIBO (Bounded Input Bounded Output)

DEFINICE:

System je stabilní, pokud na každý ohraničený vstup $x(t)$ [$x(nT_{vz})$] reaguje rovněž ohraničeným výstupem $y(t)$ [$y(nT_{vz})$].

Dle této definice lze ověřit pouze nestabilitu – jakmile je nalezen takový vstup, pro který se systém chová nestabilně, je systém nestabilní. Pokud na všechny vyzkoušené ohraničené vstupní posloupnosti reaguje systém stabilně, neznamená to ještě, že neexistuje žádný vstup, na který by reagoval nestabilně.

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

Nutnou a postačující podmínkou pro tuto formu stability je tzv. *Hurwitzovo kritérium*, které je v diskrétním tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = V < \infty$$

kde $h(k)$ je impulzní charakteristika systému.

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

Pokud platí výše uvedená podmínka a současně je vstupní posloupnost ohraničená, tj.

$$|x(k)| < W < \infty$$

pak z konvoluční sumy

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \cdot x(k-i)$$

je

$$|y(k)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| \cdot |x(k-i)| < W \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| = W \cdot V; \quad W, V < \infty$$

výstupní posloupnost je ohraničená a Hurwitzova podmínka je postačující. Že je to i podmínka nutná, dokažme sporem.

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

Předpokládejme, že Hurwitzova podmínka neplatí, tj.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

a přesto je systém stabilní. Pokusme se nyní najít takovou posloupnost, která by nespĺňovala základní, výše uvedenou podmínku BIBO stability, tj. že by na ohraničený vstup systém reagoval neomezeným výstupem.

Pro vstupní posloupnost použijme

$$x(i) = \text{sign}[h(k-i)], \text{ tj. } x(k-i) = \text{sign}[h(i)].$$

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

Potom

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)\text{sign}[h(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| = \infty$$

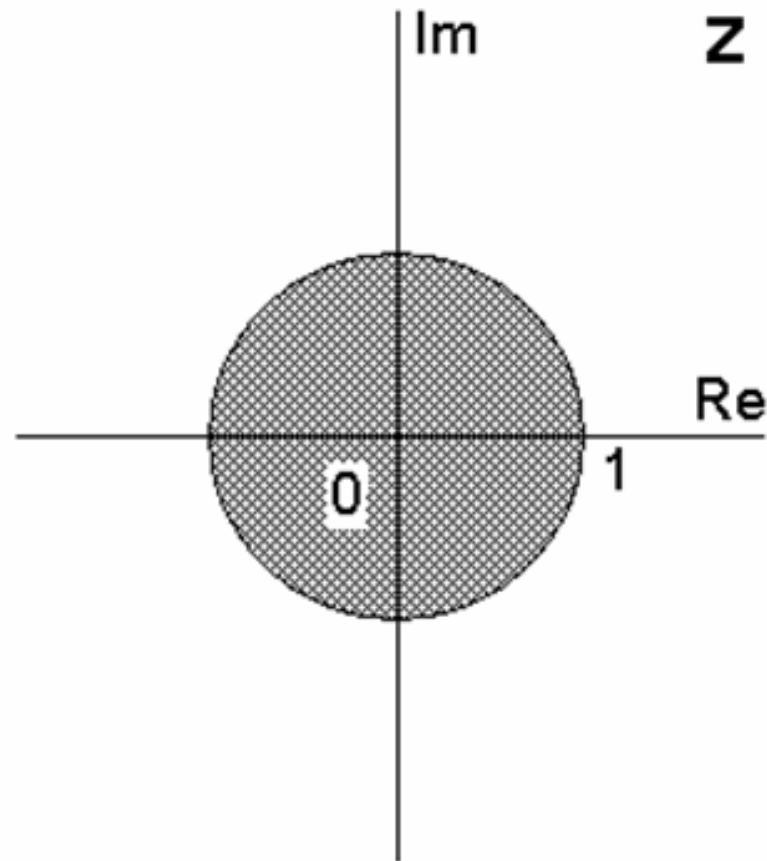
Není-li Hurwitzova podmínka splněna, je systém nestabilní. Je tedy současně i podmínkou nutnou.

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

- ☑ je dána jen a jen vlastnostmi systému samotného – interní stabilita;
- ☑ lze ji rozpoznat z vlastností některého (libovolného) popisu jeho vlastností. Jak existuje několik způsobů popisu lineárního systému, tak existuje i více kritérií (metod), jak interní stabilitu vůči počátečnímu stavu odhalit.
- ☑ zabývejme se tím nejběžnějším způsobem podle polohy pólů obrazové přenosové funkce (resp. vlastních čísel matice systému) a ukažme na základě dílčích případů, jaká je oblast, ve které se musí nacházet póly stabilního v čase diskrétního systému.

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

- ☑ Lineární stacionární systém je asymptoticky stabilní právě tehdy, jsou-li póly systému v absolutní hodnotě (resp. vlastní čísla matice systému) menší než 1.



VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

NULOVÉ BODY A PÓLY

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \quad n \leq m$$

$$H(z) = A \cdot \frac{z^{m-n} \prod_{i=1}^n (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^m (z - z_{pi})}$$

A – zesílení; z_{ni} ... nulové body; z_{pi} ... póly

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \dots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \dots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m},$$

$$H(z) = A \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^m (z - z_{pi})} = A \cdot \left[\sum_i \frac{B_i}{(z - z_{pi})} + \sum_i \frac{C_i z + D_i}{(z - \dot{z}_{pi})(z - \dot{z}_{pi}^*)} \right]$$

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

$x(k)$	$X(z)$
$\delta(k)$	1
$\delta(k-i)$	z^{-i}
$\sigma(k)$, resp. $-\sigma(-k-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-1}$
$a^k \sigma(k)$, resp. $-a^k \sigma(-k-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-a}$
$ka^k \sigma(k)$, resp. $-ka^k \sigma(-k-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ nebo $\frac{az}{(z-a)^2}$
$(k+1)a^k \sigma(k)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$ nebo $\frac{z^2}{(z-a)^2}$
$\cos(k\Omega_0) \sigma(k)$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos \Omega_0}{z^2 - 2z \cdot \cos \Omega_0 + 1}$
$\sin(k\Omega_0) \sigma(k)$	$\frac{z \cdot \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cdot \cos \Omega_0 + 1}$
$[a^k \cdot \cos(k\Omega_0)] \sigma(k)$	$\frac{z^2 - a \cdot z \cdot \cos \Omega_0}{z^2 - 2a \cdot z \cdot \cos \Omega_0 + a^2}$
$[a^k \cdot \sin(k\Omega_0)] \sigma(k)$	$\frac{z \cdot a \cdot \sin \Omega_0}{z^2 - 2a \cdot z \cdot \cos \Omega_0 + a^2}$
$\begin{cases} a^k, & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \text{jindy.} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

- ☑ *Příklad:* Mějme diskrétní systém s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{(z+0,4)^2 (3z+2) (10z-1)(z^2 + 2z + 2)}$$

Póly přenosové funkce jsou:

$$z_{1,2} = -0,4; z_3 = -0,667; z_4 = 0,1; z_5 = -1-i; z_5 = -1+i;$$

Tento systém je nestabilní.

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

- ☑ *Příklad:* Necht' jsou póly diskrétního systému
 $z_1 = -1; z_2 = 0,5; z_3 = -0,5-0,2i; z_4 = -0,5+0,2i;$

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

- ☑ *Příklad:* Necht' jsou póly diskrétního systému
 $z_1 = -1; z_2 = 0,5; z_3 = -0,5-0,2i; z_4 = -0,5+0,2i;$

System je na mezi stability.

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

- ☑ *Příklad:* Necht' jsou póly diskrétního systému
 $z_1 = -1; z_2 = 0,5; z_3 = -0,5-0,2i; z_4 = -0,5+0,2i;$

System je na mezi stability.

- ☑ *Příklad:* Necht' jsou póly diskrétního systému
 $z_1 = 0,1; z_2 = -0,5-0,2i; z_3 = -0,5+0,5i;$

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU

- ☑ *Příklad:* Necht' jsou póly diskrétního systému
 $z_1 = -1; z_2 = 0,5; z_3 = -0,5-0,2i; z_4 = -0,5+0,2i;$

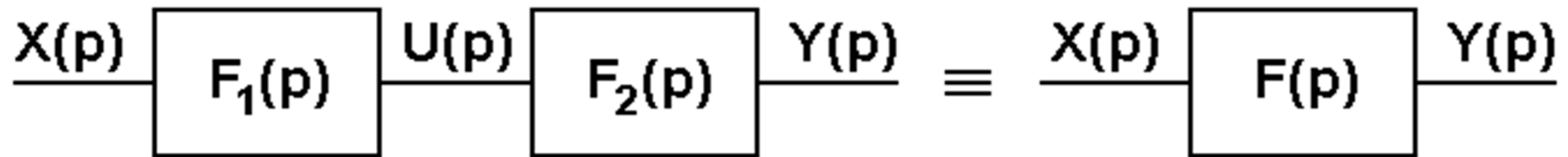
System je na mezi stability.

- ☑ *Příklad:* Necht' jsou póly diskrétního systému
 $z_1 = -0,1; z_2 = -0,5-0,2i; z_3 = -0,5+0,5i;$

System je stabilní, nicméně koeficienty jmenovatele jeho přenosové funkce nejsou reálné a tedy odezva na reálný vstup je komplexní.

XII. SPOJOVÁNÍ SYSTÉMŮ ZPĚTNÁ VAZBA

SÉRIOVÉ (KASKÁDNÍ) ZAPOJENÍ

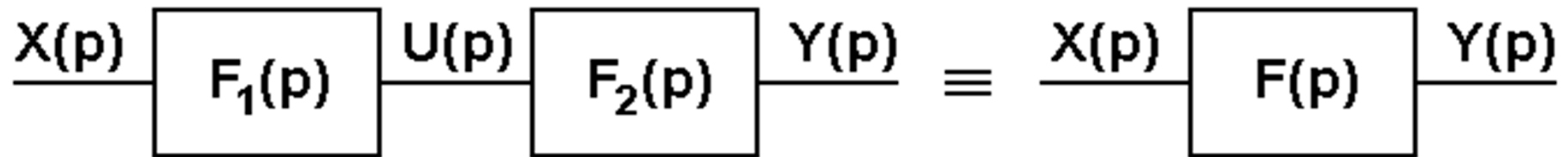


$$F_1(p) = \frac{U(p)}{X(p)} \quad F_2(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \cdot \frac{U(p)}{U(p)} = \frac{U(p)}{X(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U(p)} = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

$$F(p) = \prod_{i=1}^N F_i(p)$$

SÉRIOVÉ (KASKÁDNÍ) ZAPOJENÍ



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

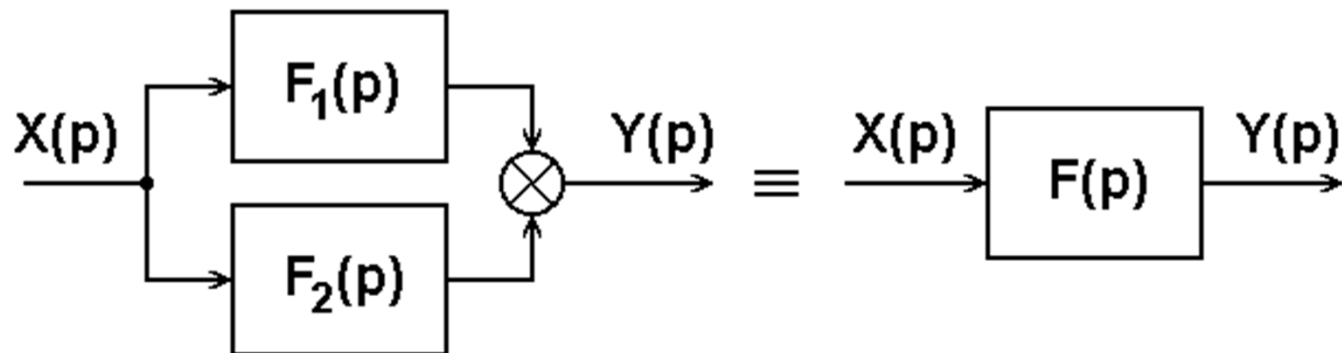
$$y(t) = y_2(t) = h_2(t) * x_2(t) = h_2(t) * y_1(t) = h_2(t) * [h_1(t) * x(t)].$$

$$y(t) = [h_2(t) * h_1(t)] * x(t),$$

$$y(t) = [h_1(t) * h_2(t)] * x(t). \quad h_s(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$h_s(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t)$$

PARALELNÍ ZAPOJENÍ

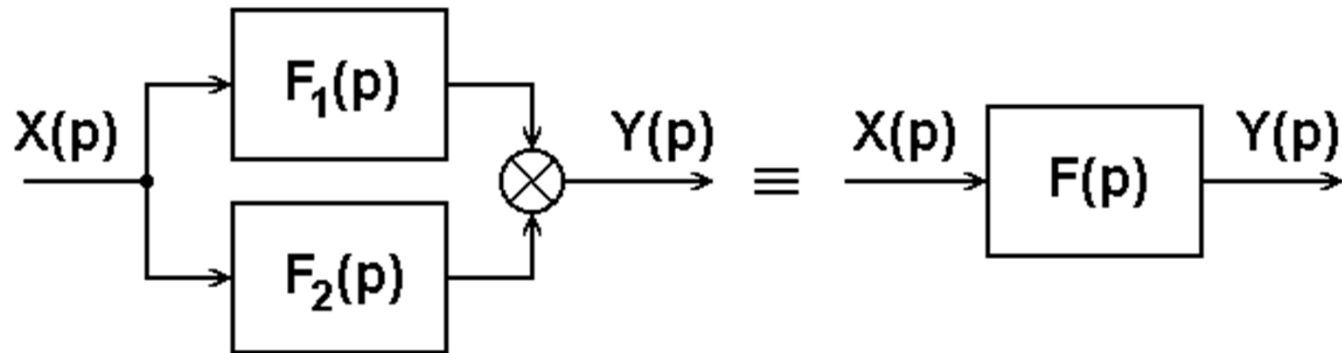


$$F_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)} \quad F_2(p) = \frac{Y_2(p)}{X(p)} \quad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p) + Y_2(p)}{X(p)} = F_1(p) + F_2(p)$$

$$F(p) = \sum_{i=1}^N F_i(p)$$

PARALELNÍ ZAPOJENÍ



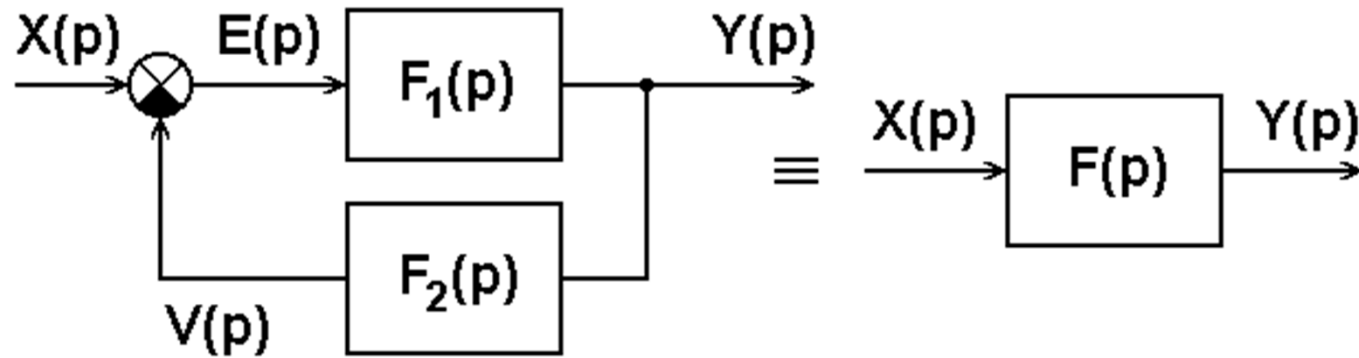
$$y_1(t) = h_1(t) * x_1(t) = h_1(t) * x(t)$$

$$y_2(t) = h_2(t) * x_2(t) = h_2(t) * x(t).$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) = [h_1(t) + h_2(t)] * x(t).$$

$$h_p(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad h_p(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t).$$

ZPĚTNOVAZEBNÍ ZAPOJENÍ



$$F_1(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} \quad F_2(p) = \frac{V(p)}{Y(p)}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$E(p) = X(p) - V(p)$$

$$X(p) = E(p) + V(p)$$

ZPĚTNOVAZEBNÍ ZAPOJENÍ

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y(p)}{E(p) + V(p)} = \frac{Y(p)}{E(p) + V(p)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{E(p)}} = \frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1 + \frac{V(p)}{E(p)}} = \frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1 + \frac{V(p)}{E(p)} \cdot \frac{Y(p)}{Y(p)}} = \\
 &= \frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1 + \frac{Y(p)}{E(p)} \cdot \frac{V(p)}{Y(p)}} = \frac{F_1(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \qquad F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - F_1(p) \cdot F_2(p)}
 \end{aligned}$$

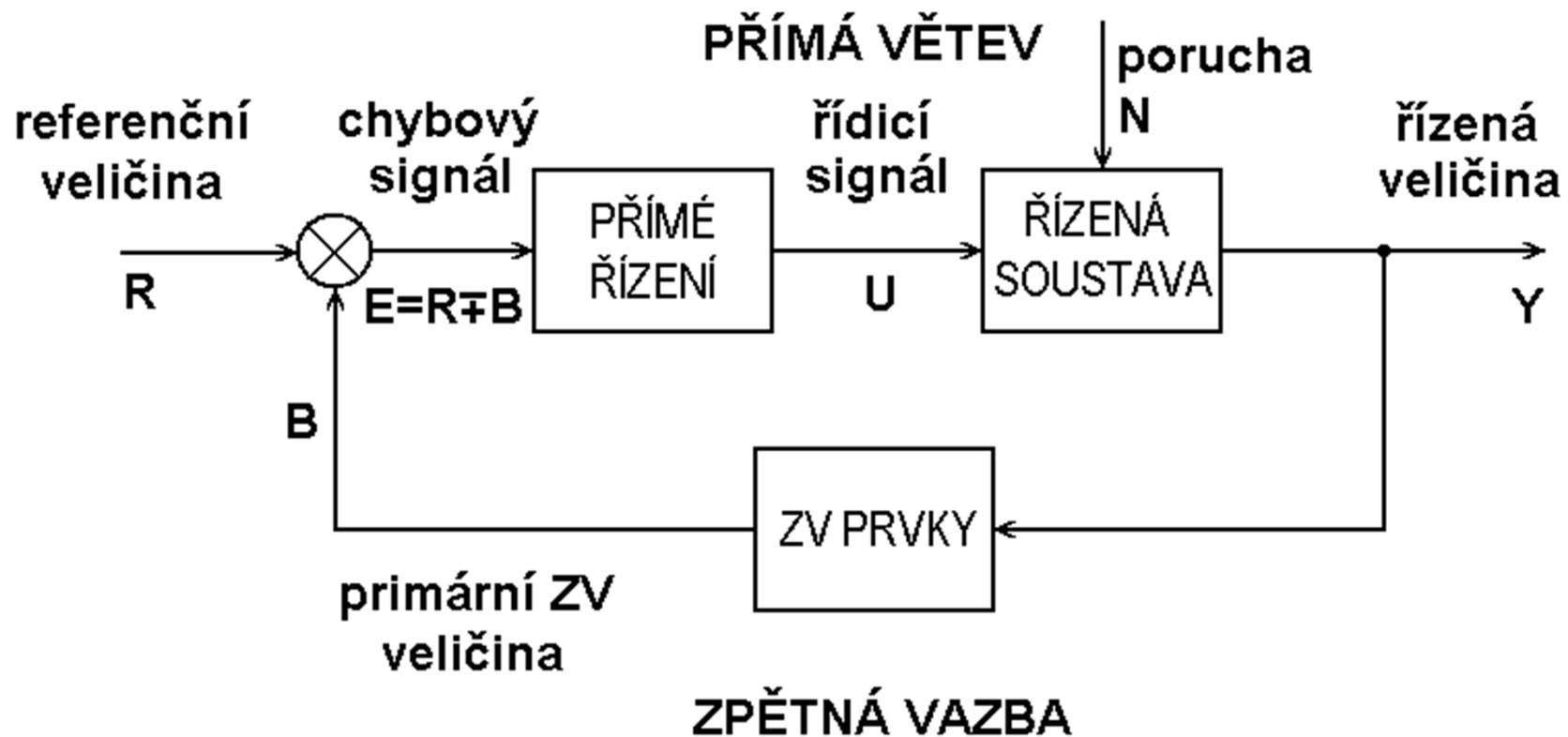
kladná ZV

$F(p) = \frac{\text{celková přenosová funkce přímé větve}}{1 \mp \text{součin celkových přenosových funkcí přímé a zpětné větve}}$

ZPĚTNÁ VAZBA VLASTNOSTI

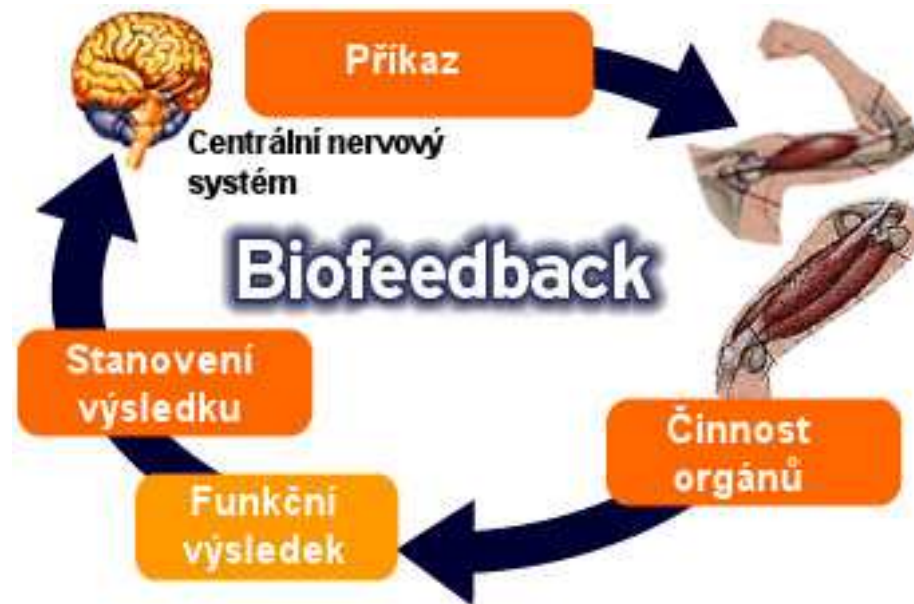
- ☑ zvýšená přesnost – např. schopnost věrně reprodukovat vstup;
- ☑ snížená citlivost poměru výstup/vstup na změny parametrů systému;
- ☑ snížený vliv nelinearit;
- ☑ snížený vliv vnějších poruch a šumu;
- ☑ širší rozsah frekvenčního pásma;
- ☑ tendence k oscilacím a nestabilitě;

ZPĚTNÁ VAZBA PRINCIP REGULACE



BIOLOGICKÁ ZPĚTNÁ VAZBA

Biologická zpětná vazba je mechanismus, který prostřednictvím měření a smyslově vnímatelného znázornění stavu určitého subsystému lidského organismu umožňuje tento stav změnit volní činnosti vyšetřované osoby.



Může-li si člověk prostřednictvím určitého přístroje uvědomit stav či změnu stavu svého organismu (které by si normálně nevšimnul), např. generování EEG signálu s převažujícím výskytem složek o frekvencích z intervalu 8 – 12 Hz – rytmus alfa, pak se může naučit tento stav do určité míry ovlivňovat.

BIOLOGICKÁ ZPĚTNÁ VAZBA

Veličiny, které mohou být biologickou zpětnou vazbou vědomě modifikovány, jsou např. klidové svalové napětí, srdeční rytmus, tlak krve, periferní tok krve (vasokonstrikce, resp. vasodilatace), kožní odpor či EEG signál.

Znázornění hodnoty sledované veličiny je především vizuální (poloha ukazatele, umístění bodu na ploše obrazovky) nebo akustické (výška či hlasitost tónu). V poslední době se prosazuje forma jednoduchých počítačových her.

Možnost (schopnost) ovlivňovat stav vlastního organismu umožňuje využít tohoto principu v terapii psychických poruch různého typu.