Příkladová data

Je plánování těhotenství závislé na vzdělání matky?

Plán?	Vzdělání matky		
	ZŠ	SŠ	VŠ
Plánované	14	31	13
Neplánované	20	16	5

Je rozdíl ve struktuře vzdělání matek rodících v Praze a v okresní porodnici?

Porodnice	Vzdělání matky		
	ZŠ	SŠ	VŠ
pražská	23	30	17
okresní	11	17	1

Studujeme závislost dvou (či více) proměnných:

nezávisle proměnná(é)	závisle proměnná	
	spojitá	**nominální**
spojitá	regrese korelace	(*logistická regrese*)
nominální	analýza rozptylu	kontingenční tabulky

Příklady:

(1) výška syna a výška otce

(2) výskyt rakoviny plic v závislosti na počtu vykouřených cigaret

(3) váha myši podle typu diety

(4) závislost mezi barvou očí a barvou vlasů

Hodnocení kvalitativních dat

- Pozorování jsou na nominální škále (krevní skupiny: A – B – AB – 0).
- Lze zahrnout i ordinální škálu, ale nepracujeme s vlastností uspořádání hodnot. (Postupy pro ordinální škálu také existují.)
- Nominální proměnná se chová jako faktor: má ***k*** úrovní, pozorování padne do právě jedné úrovně (kategorie).
- Výsledkem třídění do úrovní je potom ***k***-tice četností.
  50 zkoumaných osob charakterizujeme těmito četnostmi: $(24, 10, 3, 13)$, tj. 24 osob s krevní skupinou ‚*A*‘, 10 osob ‚*B*‘, 3 osoby ‚*AB*‘ a 13 osob ‚*0*‘
- Výsledné četnosti považujeme za konkrétní realizace náhodných proměnných, které dohromady tvoří náhodný vektor.
- Pravděpodobnostním modelem pro takový vektor je multinomické rozdělení.

Multinomické rozdělení

- Řada nezávislých pokusů (celkem ***n***), v každém pokusu získám právě jednu hodnotu z ***k*** možných (např. krevní skupina: *A* nebo *B* nebo *AB* nebo *0*).
- Jednotlivé hodnoty nastávají s pravděpodobnostmi $\boldsymbol{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k}$ a tyto pravděpodobnosti jsou pro všechny pokusy stejné.
- Samozřejmě platí $\boldsymbol{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_k = 1}$.
- $\boldsymbol{n_j}$ je počet pokusů (**četnost**), ve kterých jsem získala ***j***-tou hodnotu (např. krevní skupinu *AB*). V „jazyku“ náhodných veličin zapíšeme $\boldsymbol{Y_j = n_j}$.
- Zde platí $\boldsymbol{n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}$.
- Hodnoty $\boldsymbol{n_j}$ (či Y_j) jsou vzájemně závislé, musí splňovat podmínku $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{n_j = n}$.
- Náhodný vektor $\boldsymbol{(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)}$ má multinomické rozdělení s parametry $\boldsymbol{(n, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k)}$.

Multinomické rozdělení $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \sim Multi(n, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$

Pravděpodobnost, že náhodný vektor nabyde hodnot právě $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ je

$$P(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \dots, Y_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \cdot \pi_1^{n_1} \cdot \pi_2^{n_2} \cdot \dots \cdot \pi_k^{n_k}$$

Faktoriálový člen uvádí počet možných kombinací, jak můžeme ***n*** pokusů rozdělit tak, aby platilo $Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \dots, Y_k = n_k$.

Vlastnost: ***k***-tice náhodných veličin $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ má ***k – 1* stupňů volnosti**, protože při daném celkovém počtu pokusů ***n*** mohu „volit“ ***k – 1*** hodnot ***Y**$_j$*, ale tu poslední hodnotu musím dopočítat tak, aby byl součet roven ***n***, tj. $Y_k = n - Y_1 - \dots - Y_{k-1}$

Příklad krevní skupiny: podíly čtyř krevních skupin v populaci jsou v tabulce.

Budu-li zkoumat skupinu 50 osob, očekávám střední četnosti v jednotlivých skupinách $n \cdot \pi_j$ Skutečné počty se budou pohybovat kolem této střední hodnoty, jsou to náhodné veličiny.

Krevní skupina	***A***	***B***	***AB***	***0***
Podíl v populaci:	43 %	19 %	10 %	28 %
Pravděpodobnost π_j	0.43	0.19	0.1	0.28
Střední četnosti $n\pi_j$	21.5	9.5	5	14

Multinomické rozdělení – souvislost s binomickým rozdělením

- $(\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \dots, \boldsymbol{Y_k}) \sim \boldsymbol{Multi}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3}, \dots, \boldsymbol{\pi_k})$
- Pro $\boldsymbol{k}$ = 2 máme $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y_1} = \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{Y_2} = \boldsymbol{n_2}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\boldsymbol{n_2}!} \cdot \boldsymbol{\pi_1^{n_1}} \cdot \boldsymbol{\pi_2^{n_2}}$

  a protože $n_1 + n_2 = n$ → $n_2 = n - n_1$

  a $\pi_1 + \pi_2 = 1$ → $\pi_2 = 1 - \pi_1$

  Odtud: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y_1} = \boldsymbol{n_1}, Y_2 = n_2) = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{n_1})!} \cdot \boldsymbol{\pi_1^{n_1}} \cdot (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\pi_1})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n_1}}$

- Obecně každé $\boldsymbol{Y_j}$ z vektoru $(\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \dots, \boldsymbol{Y_k})$ má samostatně binomické rozdělení $\boldsymbol{Y_j} \sim \boldsymbol{Bi}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\pi_j})$, kde $1 - \pi_1 = \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_k$

  a $n - n_1 = n_2 + n_3 + \cdots + n_k$

  Potom také $\boldsymbol{EY_j} = n \cdot \pi_j$ a $\boldsymbol{var\, Y_j} = n\pi_j(1 - \pi_j)$

Test dobré shody, χ²-test [goodness of fit, chi-squared test]

Určitou obdobou centrální limitní věty je tvrzení, že pro dostatečně velké ***n***

má statistika $X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(Y_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}$ asymptoticky rozdělení $\chi^2_{(k-1)}$.

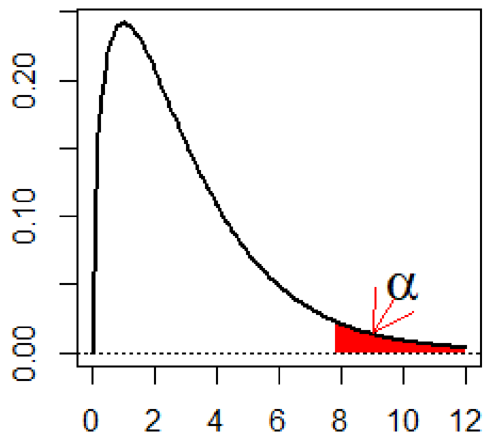
X^2 je velké χ , čti [chí kvadrát.]

Dostatečně velké ***n*** většinou znamená, že pro všechna ***j*** jsou $n\pi_j \geq 5$.

Pomocí této statistiky testuji hypotézu ***H₀*** , že četnosti znaků v mém výběru odpovídají očekávaným četnostem pro dané populační pravděpodobnosti.

Jiné formulace: – že výběr je reprezentativní
– že výběr pochází z dané populace

Hypotézu zamítám, když $X^2 > \chi^2_{(k-1)}(1-\alpha)$, tedy celou α vložím na pravý chvost rozdělení. To proto, že nulové hypotéze odporují velké odchylky od očekávaných četností, tedy velký součet všech ***k*** zlomků.



Test dobré shody - příklad

Krevní skupiny.
podíly čtyř krevních skupin v populaci jsou v tabulce.
Budu-li zkoumat skupinu 50 osob, očekávám střední četnosti v jednotlivých skupinách $n \cdot \pi_j$

Krevní skupina	*A*	*B*	*AB*	*0*
Podíl v populaci:	43 %	19 %	10 %	28 %
Pravděpodobnost π_j	0.43	0.19	0.1	0.28
Střední četnosti $n\pi_j$	21.5	9.5	5	14

V souboru 50 pokusných osob jsme zaznamenali tyto četnosti:

Pozorované četnosti:	25	7	1	17

Odpovídají tyto četnosti frekvencím v celé populaci?

Test dobré shody - příklad

Krevní skupiny. Odpovídají pozorované četnosti podílům v celé populaci?

Krevní skupina	*A*	*B*	*AB*	*0*
Podíl v populaci:	43 %	19 %	10 %	28 %
Pravděpodobnost π_j	0.43	0.19	0.1	0.28
Střední četnosti $n\pi_j$	21.5	9.5	5	14
Pozorované četnosti:	25	7	1	17

STAT: připravím sloupec s pozorovanými četnostmi a k nim dopočítám sloupec s očekávanými četnostmi. Kontrola: je i nejmenší očekávaná četnost větší nebo rovná 5? (viz dále) Nyní vybírám z nabídky: *Statistiky → Neparametrické statistiky → Pozorované vs. očekávané X^2.* Zadám četnosti a spustím výpočet. Výsledek testu najdu v záhlaví tabulky:

Pozorované vs. očekávané četnosti (krevni vyber v CV_12_data
Chi-Kvadr. = 5,070519 sv = 3 p = ,166708

Případ	pozorov. pozorované	očekáv. očekávané	P - O	(P-O)^2 /O
C: 1	25,00000	21,50000	3,50000	0,569767
C: 2	7,00000	9,50000	-2,50000	0,657895
C: 3	1,00000	5,00000	-4,00000	3,200000
C: 4	17,00000	14,00000	3,00000	0,642857
Sčt	50,00000	50,00000	0,00000	5,070519

Závěr: nezamítám hypotézu, že výběr pochází z teoreticky popsané populace.

Test dobré shody - příklad

Krevní skupiny. Odpovídají pozorované četnosti podílům v celé populaci?

R: `chisq.test(x=c(25,7,1,17),p=c(.43,.19,.1,.28))`

Zadávám vektor pozorovaných četností a „očekávaných“ pravděpodobností.

```
Chi-squared test for given probabilities
data:  c(25, 7, 1, 17)
X-squared = 5.0705, df = 3, p-value = 0.1667
```

Krevní skupina	*A*	*B*	*AB*	*0*
Podíl v populaci:	43 %	19 %	10 %	28 %
Pravděpodobnost π_j	0.43	0.19	0.1	0.28
Střední četnosti $n\pi_j$	21.5	9.5	5	14
Pozorované četnosti:	25	7	1	17

Test dobré shody - poznámka

Statistika $\boldsymbol{X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(Y_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}}$ se někdy zjednodušeně zapisuje jako

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\text{empirické} - \text{očekávané})^2}{\text{očekávané}} .$$

Empirické = pozorované, naměřené četnosti.

Toto značení v sobě <u>skrývá past</u>. Jako překlad do angličtiny se používají termíny **o**bserved a **e**xpected, která mají počáteční písmena přesně opačná než české pojmy.

Vzorec tvaru $X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$ odpovídá anglickému názvosloví.

Kontingenční tabulky [contingency tables, crosstabulations tables]

Dvě různé otázky:

(a) Hypotéza o nezávislosti proměnných

(b) Hypotéza o pravděpodobnostní struktuře výběrů

Příklad: Kojení – vzdělání matky a plánované těhotenství

→ ***1*** *výběr, třídění podle* ***2*** *nominálních proměnných*

Plán?	**Vzdělání** základní	**Vzdělání** střední	**Vzdělání** VŠ
Plánované	14	31	13
Neplánované	20	16	5

Otázka: je plánování těhotenství závislé na vzdělání matky?

Kontingenční tabulky

Nové pojmy: **sdružené četnosti** a **marginální četnosti**

Plán?	**Vzdělání** základní	**Vzdělání** střední	**Vzdělání** VŠ	Řádkové součty
Plánované	14	31	13	58
Neplánované	20	16	5	41
Sloupcové součty	34	47	18	99

Proměnná R	**Proměnná C**			Celkem
	1	…	c	
1	n_{11}	…	n_{1c}	$n_{1\bullet}$
r	n_{r1}	…	n_{rc}	$n_{r\bullet}$
Celkem	$n_{\bullet 1}$	…	$n_{\bullet c}$	n

Kontingenční tabulky

K četnostem patří také pravděpodobnosti:

$\boldsymbol{\pi_{ij}}$ – teoretická pravděpodobnost pro výskyt kombinace úrovní ***i + j***

$\boldsymbol{p_{ij}}$ – odhad pravděpodobnosti π_{ij}

$\boldsymbol{\pi_{i\bullet}}$ – teoretická pravděpodobnost úrovně ***i*** nezávisle na sloupcových úrovních ***j***

$\boldsymbol{\pi_{\bullet j}}$ – teoretická pravděpodobnost úrovně ***j*** nezávisle na řádkových úrovních ***i***

	Proměnná C			
Proměnná R	1	…	c	Celkem
1	π_{11}	…	π_{1c}	$\pi_{1\bullet}$
r	π_{r1}	…	π_{rc}	$\pi_{r\bullet}$
Celkem	$\pi_{\bullet 1}$	…	$\pi_{\bullet c}$	1

Kontingenční tabulky – test nezávislosti

- Nezávislost mezi nominálními proměnnými znamená, že četnosti v úrovních proměnné (faktoru) R nejsou závislé na konkrétní úrovni proměnné C.
- Definice nezávislosti: $P\left(X_i = n_i,\ X_j = n_j\right) = P(X_i = n_i) \cdot P\left(X_j = n_j\right)$
- Pro pravděpodobnosti v kont. tabulce: $\pi_{ij} = \pi_{i\bullet} \cdot \pi_{\bullet j}$
- Pravděpodobnosti neznáme, musíme je tedy odhadnout z dat.
- Pravděpodobnosti pozorované odhadujeme jako relativní četnosti ze sdružených četností: $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$.
- Pravděpodobnosti očekávané za platnosti hypotézy o nezávislosti proměnných odhadujeme jako $p_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}$ a $p_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}$.
- Nyní mohu spočítat četnosti očekávané za předpokladu nezávislosti:

$$\boldsymbol{o_{ij}} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p_{i\bullet}} \cdot \boldsymbol{p_{\bullet j}} = n \cdot \frac{n_{i\bullet}}{n} \cdot \frac{n_{\bullet j}}{n} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}$$

Kontingenční tabulky – test nezávislosti

→ Nulová hypotéza H_0: úrovně (znaky) obou nominálních proměnných se vyskytují na sobě nezávisle

Testová statistika chí-kvadrát:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(n_{ij} - o_{ij}\right)^2}{o_{ij}} \;\dot{\sim}_{H_0}\; \chi^2_{(r-1)(c-1)}$$

- Stupně volnosti $df = (r-1)(c-1)$
- ! Podmínka pro užití χ^2 testu: všechny očekávané četnosti $o_{ij} \geq 5$.
- H_0 zamítám, když $X^2 > \chi^2_{(r-1)(c-1)}(1-\alpha)$
- Poznámka: v tomto případě jsou četnosti sdružené i marginální považovány za náhodné veličiny. Četnosti na všech místech tabulky mohou dopadnout pro každý výběr trochu jinak, náhodně v rámci velikosti rozptylu.

Test nezávislosti - příklad

Data Kojení: Je plánování těhotenství závislé na vzdělání matky?

Plán?	**Vzdělání** základní	**Vzdělání** střední	**Vzdělání** VŠ	Řádkové součty
Plánované	14	31	13	58
Neplánované	20	16	5	41
Sloupcové součty	34	47	18	99

V jakém formátu zadáváme data do softwaru?

STAT: jako 2 proměnné s kódováním úrovní a třetí proměnnou s počty:

	plan	vzdelani	pocet
1	ano	ZS	14
2	ano	SS	31
3	ano	VS	13
4	ne	ZS	20
5	ne	SS	16
6	ne	VS	5

R: ze sloupcových proměnných vytvořím tabulku:

```
plan.tab <- xtabs(pocet~plan+vzdelani,
     data=planvzd)
```

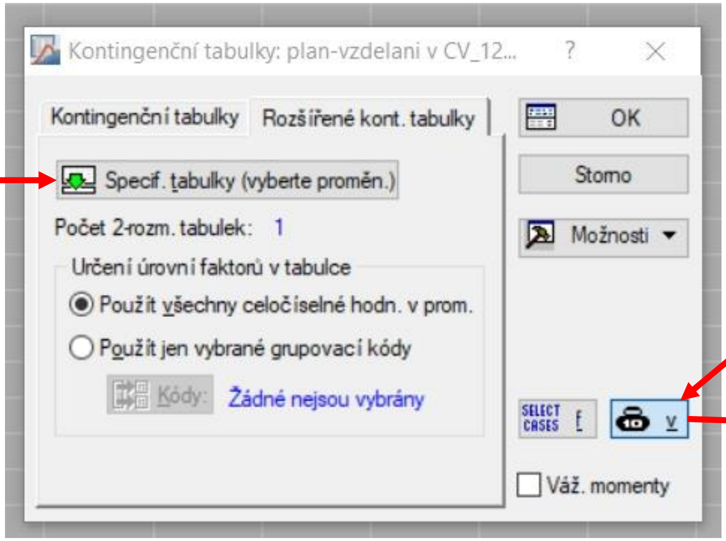
Test nezávislosti - příklad

	plan	vzdelani	pocet
1	ano	ZS	14
2	ano	SS	31
3	ano	VS	13
4	ne	ZS	20
5	ne	SS	16
6	ne	VS	5

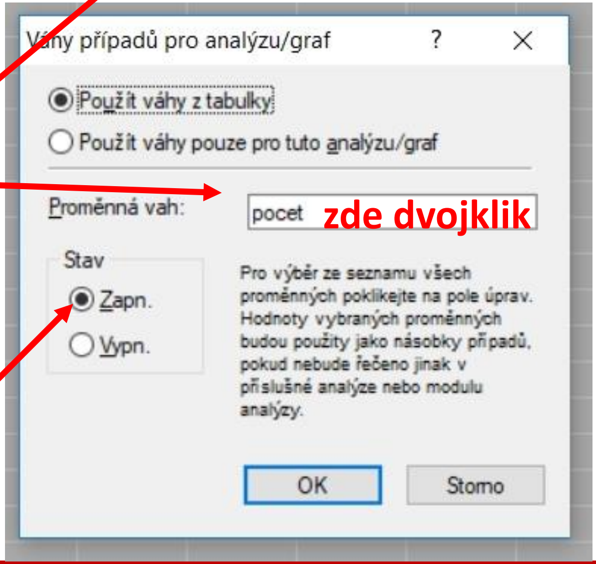
Data Kojení: Je plánování těhotenství závislé na vzdělání matky?

STAT: Dále volím *Statistiky* → *Základní statistiky* → *Kontingenční tabulky*

Specifikace tabulky: nominální proměnné určující řádky a sloupce tabulky. (Další volby jsou pro specifikaci víceroz-měrných tabulek.)



Zadání četností pro vytvořenou tabulku zde.

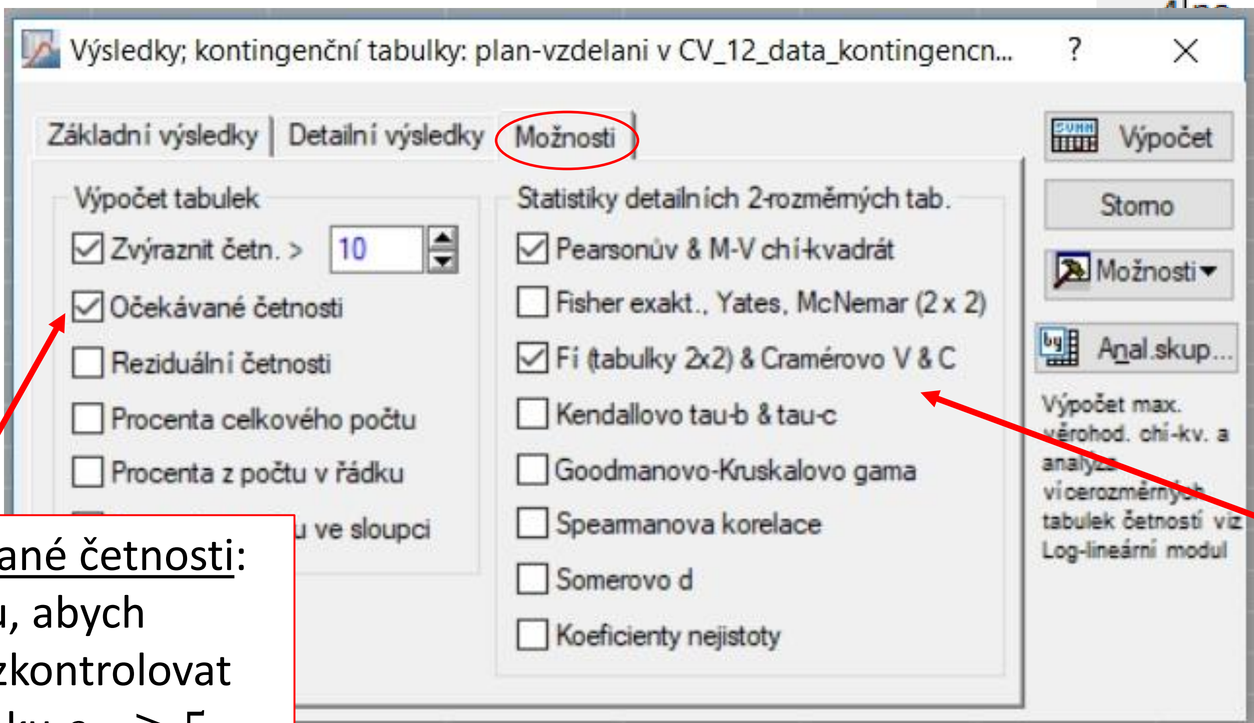


Test nezávislosti - příklad

Data Kojení: Je plánování těhotenství závislé na vzdělání matky?

STAT:

	plan	vzdelani	pocet
1	ano	ZS	14
2	ano	SS	31
3	ano	VS	13
4		ZS	20
		SS	16
		VS	5



Očekávané četnosti: Zatrhnu, abych mohla zkontrolovat podmínku $o_{ij} \geq 5$.

Zde volím výpis testových a dalších statistik. Jejich tisk volám na záložce *Detailní výsledky*, tlačítko *Detailní 2-rozměrné tab.*

Pokračujeme buď tlačítkem *Výpočet* nebo *Detailní 2-rozměrné tab.* na záložce *Detailní výsledky*.

Test nezávislosti - příklad

	plan	vzdelani	pocet
1	ano	ZS	14
2	ano	SS	31
3	ano	VS	13
4	ne	ZS	20
5	ne	SS	16
6	ne	VS	5

Data Kojení: Je plánování těhotenství závislé na vzdělání matky?

STAT: Pokračujeme buď tlačítkem *Výpočet* nebo *Detailní 2-rozměrné tab.* na záložce *Detailní výsledky*.

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (plan-vzdelani v CV_12_data_kont
Četnost označených buněk > 10
Pearsonův chí-kv. : 6,67937, sv=2, p=,035448

plan	vzdelani ZS	vzdelani SS	vzdelani VS	Řádk. součty
ano	19,91919	27,53535	10,54545	58,00000
ne	14,08081	19,46465	7,45455	41,00000
Vš.skup.	34,00000	47,00000	18,00000	99,00000

Statist. : plan(2) x vzdelani(3) (plan-v

Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	6,679375	df=2	p=,03545
M-V chí-kvadr.	6,685662	df=2	p=,03534
Fí	,2597468		
Kontingenční koeficient	,2514043		
Cramér. V	,2597468		

Test nezávislosti - příklad

Data Kojení: Je plánování těhotenství závislé na vzdělání matky?

R:
```
> plan.tab <- xtabs(pocet~plan+vzdelani, data=planvzd)
> chisq.test(plan.tab)
```
→
```
 Pearson's Chi-squared test
 data:  plan.tab
 X-squared = 6.6794, df = 2, p-value = 0.03545
> plan.tab
```
→
```
       vzdelani
 plan   SS VS ZS
   ano  31 13 14
   ne   16  5 20
```

Zde kontrola nejmenších četností.
Nicméně Rko kontrolu provádí automaticky a v případě malých četností píše upozornění:
`Chi-squared approximation may be incorrect.`

Kontingenční tabulky – test homogenity

(b) Hypotéza o pravděpodobnostní struktuře (homogenity) výběrů

Příklad: Kojení – počet porodů podle vzdělání matky v porodnici pražské a v porodnici okresní

→ ***2** (i více) nezávislých výběrů, **1** nominální proměnná*

Porodnice	**Vzdělání matky**			Celkem
	základní	**střední**	**VŠ**	
pražská	23	30	17	70
okresní	11	17	1	29
Celkem	34	47	18	99

Otázka: je rozdíl ve struktuře vzdělání maminek rodících v Praze a v okresní porodnici?

Kontingenční tabulky – test homogenity

- Jestliže obě „populace“ mají stejnou strukturu/pravděpodobnosti pro jednotlivé skupiny matek podle vzdělání (π_j), můžeme tyto prsti odhadnout takto:

ZŠ: $p_1 = \frac{n_{\bullet 1}}{n}$

SŠ: $p_2 = \frac{n_{\bullet 2}}{n}$

VŠ: $p_3 = \frac{n_{\bullet 3}}{n}$

Porodnice	Vzdělání matky			Celkem
	základní	střední	VŠ	
pražská	23	30	17	70
okresní	11	17	1	29
Celkem	34	47	18	99
Hypotéza:	$\boldsymbol{\pi_1}$	$\boldsymbol{\pi_2}$	$\boldsymbol{\pi_3}$	

- Očekávané četnosti za předpokladu nulové hypotézy potom spočítáme vzhledem k (marginálnímu) počtu maminek v příslušné porodnici:

ZŠ: $o_{11} = n_{1\bullet} \cdot p_1 = \frac{n_{1\bullet} \cdot n_{\bullet 1}}{n}$ SŠ: $o_{12} = n_{1\bullet} \cdot p_2 = \frac{n_{1\bullet} \cdot n_{\bullet 2}}{n}$ atd.

- Obecně: $o_{ij} = n_{i\bullet} \cdot p_j = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}$

tedy opět stejný vzorec pro o_{ij}, ale došli jsme k němu z jiných předpokladů!

Kontingenční tabulky – test homogenity

→ Nulová hypotéza $\boldsymbol{H_0}$: pravděpodobnosti jednotlivých úrovní nominální proměnné jsou pro všechny výběry stejné.

Testová statistika chí-kvadrát (stejná jako v předchozím):

$$\boldsymbol{X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(n_{ij}-o_{ij}\right)^2}{o_{ij}} \dot{\sim}_{H_0} \chi^2_{(r-1)(c-1)}}$$

- Stupně volnosti $df = (r-1)(c-1)$
- Kontrola podmínky pro užití χ^2 testu: všechny očekávané četnosti $o_{ij} \geq 5$?
- $\boldsymbol{H_0}$ zamítám, když $\boldsymbol{X^2 > \chi^2_{(r-1)(c-1)}(1-\alpha)}$
- Poznámka: v tomto případě jsou řádkové marginální četnosti (tj. rozsahy výběrů) považovány za pevné, nenáhodné hodnoty. Protože pro opakování pokusu bychom měli použít opět stejné rozsahy výběrů.

Test homogenity – příklad

Data Kojení: Je rozdíl ve struktuře vzdělání maminek rodících v Praze a v okresní porodnici?

Nulová hypotéza:
Pravděpodobnost, že rodící matka má ZŠ vzdělání je stejná v Praze i mimo Prahu. Totéž platí zároveň pro SŠ i VŠ vzdělání.

	Vzdělání matky			
Porodnice	**základní**	**střední**	**VŠ**	Celkem
pražská	23	30	17	70
okresní	11	17	1	29
Celkem	34	47	18	99

STAT: Data zapsaná jako 3 proměnné. *Základní statistiky → Konting. Tabulky*

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (vzdelani-porodnice v CV_12_data
Četnost označených buněk > 10
Pearsonův chí-kv. : 6,12377, sv=2, p=,046799

porodnice	vzdelani ZS	vzdelani SS	vzdelani VS	Řádk. součty
Praha	24,04040	33,23232	12,72727	70,00000
Kolin	9,95960	13,76768	5,27273	29,00000
Vš.skup.	34,00000	47,00000	18,00000	99,00000

$X^2 = 6.12,\ p = 0.047$
Na hladině α = 0.05 těsně zamítám hypotézu o stejné pravděpodobnostní struktuře vzdělání matek v pražské a okresní porodnici.

Test homogenity – příklad

Je rozdíl ve struktuře vzdělání maminek rodících v Praze a v okresní porodnici?

R:

```
> porodnice.tab <-xtabs(pocet~porodnice+vzdelani,data=porodvzd)
> addmargins(porodnice.tab)   #přidá marginální součty
         vzdelani
porodnice SS VS ZS Sum
    Kolin 17  1 11  29
    Praha 30 17 23  70
    Sum   47 18 34  99
> chisq.test(porodnice.tab)
      Pearson's Chi-squared test
data:  porodnice.tab
X-squared = 6.1238, df = 2, p-value = 0.0468

> porodnice.test <- chisq.test(porodnice.tab) #nový objekt
> names(porodnice.test)  #složky objektu
[1] "statistic"  "parameter"  "p.value"    "method"   "data.name"
[6] "observed"   "expected"   "residuals" "stdres"
> porodnice.test$expected  #tabulka očekávaných četností ≥ 5?
         vzdelani
porodnice       SS        VS        ZS
    Kolin 13.76768  5.272727  9.959596
    Praha 33.23232 12.727273 24.040404
```

Čtyřpolní kontingenční tabulky

- Situace: ***1** výběr, **2** nominální proměnné, každá má jen 2 úrovně.*
- Obecně užívané speciální značení, objevuje se např. u koeficientů podobnosti:

a	b	***a+b***
c	d	***c+d***
a+c	***b+d***	***n***

$$\rightarrow X^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \dot{\sim}_{H_0} \chi^2_1$$

- Hypotézy nezávislosti nebo homogenity formuluji stejně.
- Kontrola podmínky pro užití χ^2 testu: všechny očekávané četnosti $o_{ij} \geq 5$?
- Pro malé četnosti o_{ij} se používá **Yatesova oprava na spojitost**:

$$X^2_{corr} = \frac{n\left(|ad-bc| - \frac{1}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Potom $X^2_{corr} < X^2$ a $p_{corr} > p$, test je tedy konzervativnější.

Čtyřpolní tabulka – příklad hraboš

Hraboš: 515 hrabošů bylo vyšetřováno na výskyt některého ze dvou druhů parazitů. Jen u 4 jedinců byl zjištěn současný výskyt obou druhů. Existuje nějaká souvislost mezi jejich výskytem?

	Sarcocystis +	Sarcocystis -	celkem
Frenkelia +	4	27	31
Frenkelia -	11	473	484
Celkem	15	500	515

STAT: již popsaným způsobem získám tabulku očekávaných četností a vidím, že četnost $o_{11} < 1$. Je tedy na místě hodnotit test podle výsledku s Yatesovou opravou na spojitost.

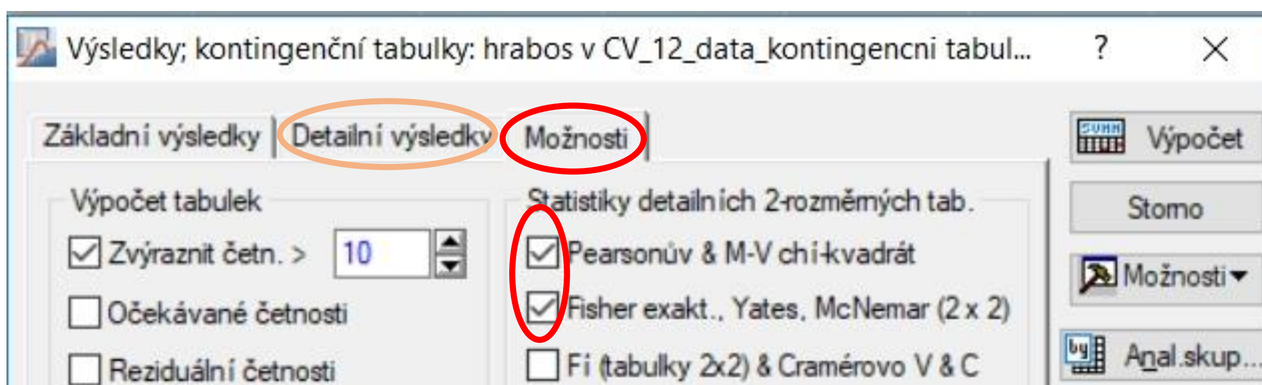
→ *Možnosti*: první a druhá volba v pravém sl.

→ *Detailní výsledky*

→ *Detailní 2-rozm. tab.*

Souhrnná tab.: Očekávané četnosti (hrabos v CV_12_data_kontir
Četnost označených buněk > 10
Pearsonův chí-kv. : 11,6429, sv=1, p=,000644

Frenkelia	Sarcocystis Sano	Sarcocystis Sne	Řádk. součty
Fano	0,90291	30,0971	31,0000
Fne	14,09709	469,9029	484,0000
Vš.skup.	15,00000	500,0000	515,0000



Čtyřpolní tabulka – příklad hraboš

Hraboš: Je výskyt dvou druhů parazitů u hraboše nějak závislý?

	Sarcocystis +	Sarcocystis -	celkem
Frenkelia +	4	27	31
Frenkelia -	11	473	484
Celkem	15	500	515

STAT: Základní statistika (Pearsonův chí-kvadrát) tedy nepoužívám kvůli příliš malé o_{11}. Správnější je uvést korigovanou hodnotu Yatesův chí-kvadrát = 8.19 a jeho p-hodnotu = 0.00422. Hypotézu o nezávislosti výskytu parazitů u hraboše tedy zamítám. Další otázkou je, jakým způsobem se parazité ovlivňují. Čtěte dále!

Statist.	Statist. : Frenkelia(2) x Sarcocystis(2) Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	11,64288	df=1	p=,00064
M-V chí-kvadr.	6,800386	df=1	p=,00911
Yatesův chí-kv.	8,187032	df=1	p=,00422
Fisherův přesný, 1-str.			-----
Fisherův přesný, 2-str.			
McNemarův chí-kv. (A/D)	459,1698	df=1	p=0,0000
McNemarův chí-kv. (B/C)	5,921052	df=1	p=,01496
Fí pro tabulky 2 x 2	,1503580		
Tetrachorická korelace	,4318124		
Kontingenční koeficient	,1486867		

Čtyřpolní tabulka – příklad hraboš

Hraboš: 515 hrabošů bylo vyšetřováno na výskyt některého ze dvou druhů parazitů. Jen u 4 jedinců byl zjištěn současný výskyt obou druhů. Existuje nějaká souvislost mezi jejich výskytem?

	Sarcocystis +	**Sarcocystis -**	celkem
Frenkelia +	4	27	31
Frenkelia -	11	473	484
Celkem	15	500	515

R:
```
> hrabos.tab = xtabs(pocty~ Frenkelia+Sarcocystis, data=hrabos)
> chisq.test(hrabos.tab)
    Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
data:  hrabos.tab
X-squared = 8.187, df = 1, p-value = 0.004219
Warning message:   #upozorňuje na malé očekávané četnosti
In chisq.test(hrabos.tab): Chi-squared approximation may be incorrect
> chisq.test(hrabos.tab)$expected
         Sarcocystis
Frenkelia        Sano         Sne
     Fano   0.9029126   30.09709
     Fne   14.0970874  469.90291
```

Použití Yatesovy korekce je tedy na místě. Doporučit lze i Fisherův přesný test (dále).

McNemarův test – test symetrie

- Situace: ***1*** *výběr a* ***1*** *nominální proměnná, opakované (párové) měření*
  - na skupině subjektů zjišťujeme četnosti všech úrovní nominální proměnné dvakrát, např. před ošetřením (zásahem) a po ošetření, nebo v jednom roce a v následujícím roce.
- Kontingenční tabulka je pak čtvercová:

Příklad stromy: počty stromů podle míry houbové nákazy ve dvou sezónách. Zajímá nás, jestli došlo mezi sezónami ke změně v četnosti nákazy.

	1995			
1994	**Zdravý**	**Mírná**	**Silná**	celkem
Zdravý	35	15	1	51
Mírná	11	21	7	39
Silná	3	3	4	10
Celkem	49	39	12	100

McNemarův test – test symetrie

K této úloze je možné vyslovit dvě hypotézy, které se mírně liší:

(1) H_0: marginální pravděpodobnosti jsou shodné, tedy pravděpodobnosti jednotlivých stupňů nákazy jsou v obou sezónách stejné. (**Stuartův test**)

(2) H_0: matice pravděpodobností je symetrická, tedy platí $\pi_{ij} = \pi_{ji}$. (**Bowkerův test symetrie**)
Je-li matice pravděpodobností symetrická, pak jsou také marginální pravděpodobnosti shodné. Proto se test symetrie někdy používá i k testování shody marginálních pravděpodobností.

McNemarův test je původně konstruovaný pro tabulky 2x2, ale název se používá i pro Bowkerův test (např. v Rku). STATistica počítá tento test jen pro čtyřpolní tabulky.

	1995			
1994	**Zdravý**	**Mírná**	**Silná**	celkem
Zdravý	35	15	1	51
Mírná	11	21	7	39
Silná	3	3	4	10
Celkem	49	39	12	100

McNemarův test – test symetrie

Nulová hypotéza ***H₀***: matice pravděpodobností je symetrická.

Testová statistika:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^{c} \frac{\left(n_{ij} - n_{ji}\right)^2}{n_{ij} + n_{ji}} \dot{\sim}_{H_0} \chi^2_{c(c-1)/2}$$

Promyslete význam posunutého indexování ve sčítacích sumách…

	1995		
1994	**Zdravý**	**Mírná**	**Silná**
Zdravý	35	15	1
Mírná	11	21	7
Silná	3	3	4

Tvar testové statistiky pro tabulku 2x2:

$$X^2 = \frac{(n_{12} - n_{21})^2}{n_{12} + n_{21}} \dot{\sim}_{H_0} \chi^2_1$$

McNemarův test – příklad

Stromy: Je rozdíl v rozložení houbové nákazy mezi sezónami? Neboli jsou marginální pravděpodobnosti (potažmo četnosti) srovnatelné?

1994	1995: Zdravý	1995: Mírná	1995: Silná	celkem
Zdravý	35	15	1	51
Mírná	11	21	7	39
Silná	3	3	4	10
Celkem	49	39	12	100

STAT: neumí spočítat pro větší tabulky, vizte příklad „hraboš“ na 2x2 tabulce.

R:

```
> stromy=matrix(data=c(35,15,1,11,21,7,3,3,4), nrow=3, ncol=3, byrow=T)
> mcnemar.test(stromy)
        McNemar's Chi-squared test
data:  stromy
McNemar's chi-squared = 3.2154, df = 3, p-value = 0.3596
```

Nezamítám hypotézu o symetrii matice, tedy ani hypotézu o shodnosti marginálních pravděpodobností houbové nákazy v jedné a druhé sezóně. „Houbová“ situace v lese se nezměnila.

Čtyřpolní tabulka – příklad hraboš

	Sarcocystis +	Sarcocystis -	celkem
Frenkelia +	4	27	31
Frenkelia -	11	473	484
Celkem	15	500	515

Hraboš: Jsou pravděpodobnosti výskytu stejné pro oba parazity?
Pozor, pozorování jsou párová, nemůžeme tedy použít test homogenity pro výběr Frenkelia a pro výběr Sarcocystis, každého hraboše bychom pak měli v testu dvakrát!

R:
```
> mcnemar.test(hrabos.tab)
        McNemar's Chi-squared test with continuity correction
  data:  hrabos.tab
  McNemar's chi-squared = 5.9211, df = 1, p-value = 0.01496
```

McNemarův test má přednastavené použití Yatesovy opravy na spojistost, což je v tomto případě správné.
Hypotézu o stejné pravděpodobnosti výskytu zamítáme. Znamená to, že výskyt parazitů je sice korelován (tj. existuje nějaká závislost), ale frekvence výskytu není podobná (symetrická). Pozor, test neříká nic o kauzální závislosti, je to čistě statistická korelace.

Čtyřpolní tabulka – příklad hraboš

Hraboš: Jsou pravděpodobnosti výskytu stejné pro oba parazity?

	Sarcocystis +	Sarcocystis -	celkem
Frenkelia +	4	27	31
Frenkelia -	11	473	484
Celkem	15	500	515

STAT: Na stejném místě, kde jsme zvolili Yatesovu opravu na spojitost, je také McNemarův test pro tabulky 2x2. Výsledek proto již máme spočítaný v tabulce. Porovnáváme četnosti ***b*** a ***c***

Do výpočtu je zahrnuta Yatesova oprava na spojistost.

Statist.	Statist. : Frenkelia(2) x Sarcocystis(2) Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	11,64288	df=1	p=,00064
M-V chí-kvadr.	6,800386	df=1	p=,00911
Yatesův chí-kv.	8,187032	df=1	p=,00422
Fisherův přesný, 1-str.			-----
Fisherův přesný, 2-str.			
McNemarův chí-kv. (A/D)	459,1698	df=1	p=0,0000
McNemarův chí-kv. (B/C)	5,921052	df=1	p=,01496
Fí pro tabulky 2 x 2	,1503580		
Tetrachorická korelace	,4318124		
Kontingenční koeficient	,1486867		

Fisherův exaktní (faktoriálový) test (2x2 tabulky)

- Jiný princip než χ^2-test, p-hodnotu počítá přímo, patří mezi tzv. podmíněné testy.
- Podmínka: marginální četnosti jsou dány (tedy je nepovažujeme za náhodné veličiny, jako u testu nezávislosti pomocí χ^2 rozdělení).
- Sčítá pravděpodobnost skutečně realizované tabulky a tabulek s danými (stejnými) marginálními četnostmi, které ještě více odporují nulové hypotéze.
- Test je to spíše konzervativní, tzn. že skutečná pravděpodobnost chyby 1. druhu může být výrazně menší než zvolená hladina α.
- Pro tabulky s velkými četnostmi je to výpočetně (časově i paměťově) náročný test.

Fisherův test – příklad hraboš

STAT: nepočítá Fisherův test pro větší četnosti…

R:
```
> fisher.test(hrabos.tab)
        Fisher's Exact Test for Count Data
 data:  hrabos.tab
 p-value = 0.009226
 alternative hypothesis: true odds ratio is not equal to 1
 95 percent confidence interval:
   1.377865 23.215915
 sample estimates:
 odds ratio
   6.322939
```

Fisherův test v Rkovém provedení testuje hypotézu o poměru šancí [odds ratio]. Jako bonus máme odhad tohoto poměru (pro zájemce viz Zvára str. 218) a konfidenční interval tohoto odhadu.

Cramérovo V

Kontingenční tabulky – další témata

- Test poměrem věrohodností [likelyhood ratio test]
- Míry těsnosti vazby (2x2 tabulka) – např. pro studium mezidruhové vazby
- Odhad poměru šancí [odds ratio] a jeho konfidenční interval.
- Nabídka eRkové funkce chisq.test(…, simulate.p.value = FALSE, B = 2000), která po přepnutí na TRUE simuluje odhad p-hodnoty …