## Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Doposud jsme jsme řešili rovnice typu $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je nějaká funkce jedné proměnné. Řešením této rovnice bylo reálné číslo $\alpha$, případně množina čísel, které danou funkci splňují.

Nyní se podíváme na trochu jiný typ rovnic. Tyto rovnice jsem potkávali už dříve, hlavně ve fyzice, ale většinou jsme viděli až jejich konkrétní řešení. Řešením diferenciální rovnice není číslo, ale funkce. Problém si můžeme demonstrovat na následovně: Pokusme se najít takovou funkci, aby její derivace byla rovna dvojnásobku její funkční hodnoty v každém bodě, kde je definovaná. Tento problém si nejdříve zapíšeme matematicky.

$$y'(x) = 2y(x)$$

nebo zkráceně:

$$y' = 2y$$

Můžeme tedy říci, že **diferenciální rovnice je vztah mezi hledanou funkcí a jejími derivacemi**.

Jak tedy budeme danou rovnici řešit? V tomto kurzu se naučíme řešit ty nejjednodušší typy diferenciálních rovnic a to rovnice se separovanými proměnnými. Jak už vyplývá z názvu, budeme při řešení oddělovat jednotlivé proměnné a po té budeme obě strany rovnice integrovat. Využijeme tedy předchozích znalostí z integrování funkce jedné proměnné. Jak už víme z integrálního počtu funkce jedné proměnné existuje nekonečně mnoho řešení při hledání primitivní funkce, která se liší o tzv. integrační konstantu. Tento jev se projeví i při řešení diferenciálních rovnic. Pokud existuje nějaké řešení diferenciální rovnice, existují i další řešení, která se liší o nějakou konstantu. Zde tedy hovoříme o **obecném řešení diferenciální rovnice**. Pokud ale máme na počátku zadané nějaké omezující podmínky, většinou nalezneme pouze jedno řešení, které je splňuje a v tomto případě mluvíme o **partikulárním řešení diferenciální rovnice**, které splňuje zadané podmínky. Zde nalezneme konkrétní hodnotu konstanty kterou se liší obecná řešení.

Podívejme se tedy na naši diferenciální rovnici. Ještě si uvědomme, že derivaci funkce $y'$ lze zapsat pomocí diferenciálu závislé a nezávislé proměnné $y$ a $x$, tedy $\frac{dy}{dx}$. Tento zápis budeme používat při řešení diferenciálních rovnic.

*Řešení.*

$$y' = 2y$$
$$\frac{dy}{dx} = 2y$$
$$\frac{dy}{y} = 2dx$$

Obě strany rovnice integrujeme:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2dx$$
$$\ln y = 2x + c$$

Ve výsledku máme $\ln y$, který převedeme odlogaritmováním na:

$$y = e^{2x+c}$$

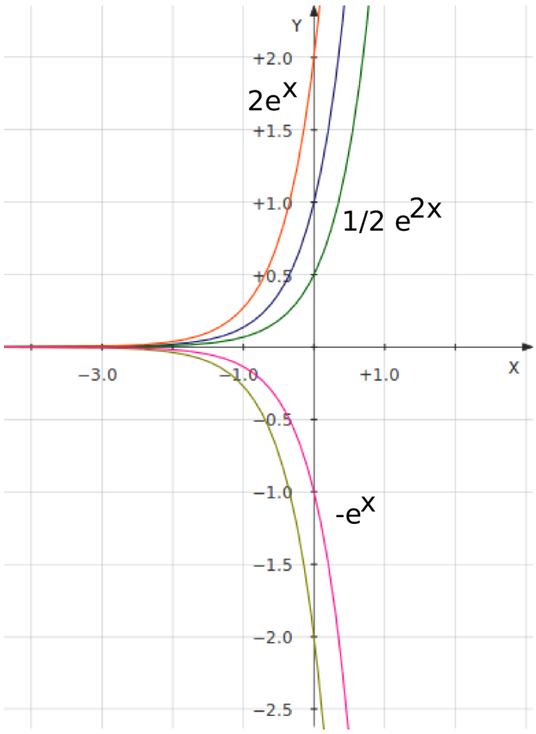
$$y = e^c \cdot e^{2x}$$

kde konstantu $e^c$ lze zapsat jako $K$.
Obecným řešením zadané diferenciální rovnice je tedy:

$$y = K \cdot e^{2x}$$

kde K je libovolné reálné číslo. Rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení.

Řešení diferenciální rovnice lze znázornit graficky:




**Obrázek 1:** Grafické řešení diferenciální rovnice $y' = 2y$.

## 0.1 Řešené příklady

**Příklad 1.** *Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 2x$ a partikulární řešení splňující podmínku pro $x = 2$ je $y = 1$.*

*Řešení.*

$$\begin{aligned} y' &= 2x \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \\ dy &= 2xdx \\ \int dy &= \int 2xdx \\ y &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

Obecné řešení je tedy zadané rovnice je: $y = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c$.
Nyní nalezneme partikulární řešení dosazením za proměnné $x = 2$ a $y = 1$ a vypočítáme konstantu $c$.

$$1 = 4 + c$$

tedy $c = -3$. Partikulární řešení má tvar: $y = x^2 - 3$.

**Příklad 2.** *Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $yy' = \frac{1+2x}{y}$ a partikulární řešení pro $y(0) = 1$. (Tedy pro $x = 0$ je $y = 1$).*

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
y\frac{dy}{dx} &= \frac{1+2x}{y} \\
y^2 dy &= 1+2xdx \\
\int y^2 dy &= \int (1+2x)dx \\
\frac{y^3}{3} &= x+2\frac{x^2}{2}+c \\
\frac{y^3}{3} &= x+x^2+c \\
y^3 &= 3x+3x^2+3c
\end{aligned}$$

konstantu $3c$ lze zapsat jako konstantu $k$, pro kterou platí $k=3c$

$$y^3 = 3x+3x^2+k$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice $y^3 = 3x+3x^2+k$.
Partikulární řešení rovnice nalezneme dosazením za $x$ a $y$ a vypočtením konstanty $k$. Tedy:

$$\begin{aligned}
1 &= 3\cdot 0+3\cdot 0^2+k \\
1 &= k
\end{aligned}$$

Partikulární řešení má tedy tvar: $y^3 = 3x+3^2+1$.

**Příklad 3.** *Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice* $xyy' = 1-x^2$ *a její partikulární řešení* $y(1)=2$.

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
xy\frac{dy}{dx} &= 1-x^2 \\
ydy &= \frac{1-x^2}{x}dx \\
ydy &= (\frac{1}{x}-x)dx \\
\int ydy &= \int(\frac{1}{x}-x)dx \\
\frac{y^2}{2} &= \ln|x|-\frac{x^2}{2}+c \\
y^2 &= 2\ln|x|-x^2+2c
\end{aligned}$$

Zde můžeme zavést novou konstantu $k=2c$.
Obecné řešení má tedy tvar: $y^2 = 2\ln|x|-x^2+k$.
Partikulární řešení je následující:

$$\begin{aligned}
2^2 &= 2\ln|1|-1^2+k \\
4 &= 2\ln 1-1+k \\
4 &= 2\cdot 0-1+k \\
5 &= k
\end{aligned}$$

Partikulární řešení má tedy tvar: $y^2 = 2\ln|x|-x^2+5$.

**Příklad 4.** *Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice* $\frac{x}{1+y} - \frac{y}{1+x}y' = 0$ *a její partikulární řešení* $y(0) = 1$.

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1+y} - \frac{y}{1+x}y' &= 0 \\
\frac{x}{1+y} &= \frac{y}{1+x}y' \\
x(1+x)dx &= y(1+y)dy \\
\int (x+x^2)dx &= \int (y+y^2)dy \\
\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} &= \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + c \\
3x^2 + 2x^3 &= 3y^2 + 2y^3 + 6c \\
3x^2 + 2x^3 &= 3y^2 + 2y^3 + k
\end{aligned}$$

kde $k = 6c$. Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je tedy: $3x^2 + 2x^3 = 3y^2 + 2y^3 + k$. Partikulární řešení získáme dosazením za $x$ a $y$ a vypočítáním konstanty $k$.

$$\begin{aligned}
3x^2 + 2x^3 &= 3y^2 + 2y^3 + k \\
3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^3 &= 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 + k \\
0 &= 3 + 2 + k \\
-5 &= k
\end{aligned}$$

Partikulární řešení rovnice má tvar: $3x^2 + 2x^3 = 3y^2 + 2y^3 - 5$.

### 0.1.1 Příklady na procvičení:

Nalezněte obecné řešení diferenciálních rovnic:

1. $y' = \frac{2x}{y+x^2y}$
2. $y' = (x+1)(y-1)$
3. $y' = \frac{x+1}{y+1}$ a partikulární řešení splňující podmínku $y(1) = 4$.
4. $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$ a partikulární řešení splňující podmínku $y(1) = 2$.
5. $y' = \frac{-x}{y}$
6. $xy' = y^2$ a partikulární řešení splňující podmínku $y(e) = 2$.

Výsledky:

1. $y^2 = 2\ln(1+x^2) + c$
2. $y = ke^{x(x+1)} + 1$
3. Obecné řešení: $y(y+2) = x(x+2) + c$, partikulární řešení: $y(y+2) = x(x+2) + 8$
4. Obecné řešení: $\arctan y = x^2 - 2x + c$, partikulární řešení: $\arctan y = x^2 - 2x + 1 + \arctan 2$.
5. $x^2 + y^2 = c^2$
6. $\frac{1}{y} = -\ln|x| - c$, partikulární řešení: $\frac{1}{y} = -\ln|x| - \frac{3}{2}$.