Příklady ke cvičení předmětu C1460: Úvod do matematiky
Téma 1: Lineární algebra

Skupina: **Vyučující**

Veronika Bendová
podzimní semestr, 2018

1.1 Základní operace s vektory

Mějme vektory $a = (2, 1, 2)$, $b = (-1, 0, 1)$, $c = (1, 2, 1, 1)$, $d = (1, 0, -2, 0)$, $e = (3, 0, 1, 3)$, $f = (-1, 1, 0, -2)$.

Příklad 1.1. Délka vektorů
Určete délku vektoru

1. $c = (1, 2, 1, 1)$ — 4

Příklad 1.2. Sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $a + b$ — $(1, 1, 3)$
2. $a - 2b$ — $(4, 1, 0)$

Příklad 1.3. Skalární součin vektorů
Vypočítejte následující skalární součin

1. $4a \times b$ — 0

1.2 Základní operace s maticemi

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.4. Transpozice matic
Určete tvar následujících matic

1. A^T — $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. B^T — $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 1.5. Dimenze matic
Určete dimenzi následujících matic

1. A — 1×3
2. A^T — 3×1
3. $A^T \times B^T$ — 3×3
4. $A \times C^T$ — 1×2

Příklad 1.6. Sčítání matic, odčítání matic, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $A + B$ — nejde
2. $A + B^T$ — $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Příklad 1.7. Násobení matic
Vypočítejte

1. $A \times B$ $\quad (0)$
2. $A^T \times B^T$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A \times C^T$ $\quad \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix}$

Příklad 1.8. Diagonála matice
Najděte (hlavní) diagonálu následujících matic

1. $A \times B$ $\quad (0)$
2. $A^T \times B^T$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A \times C^T$ $\quad (5)$

1.3 Gaussova eliminace, lineární (ne)závislost vektorů, soustavy lineárních rovnic

Příklad 1.9. Lineární závislost a nezávislost vektorů
Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. V případě lineární závislosti vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci zbylých lineárně nezávislých vektorů.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ lineárně nezávislé
2. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ lineárně závislé; $4 \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Příklad 1.10. Hodnost matice
Stanovte, jaká je hodnost následujících matic

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad 3$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad 2$

Příklad 1.11. Řešení soustavy lineárních rovnic
Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

1. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -2x_1 \phantom{{}+x_2} + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$ $\quad x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 0$
2. $\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 \phantom{{}+4x_3} &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$ $\quad$ nemá řešení

1.4 Determinant matice

Příklad 1.12. Determinant matice
Stanovte následující determinanty

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad 5$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 4

Příklad 1.13. Rovnice s determinanty
Vyřešte následující rovnici

1. $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = -1$ $x = 3$ nebo $x = -1$