Příklady ke cvičení předmětu C1460: Úvod do matematiky
Téma 1: Lineární algebra

Skupina: **A**

Veronika Bendová
podzimní semestr, 2018

1.1 Základní operace s vektory

Mějme vektory $a = (2, 1, 2)$, $b = (-1, 0, 1)$, $c = (1, 2, 1, 1)$, $d = (1, 0, -2, 0)$, $e = (3, 0, 1, 3)$, $f = (-1, 1, 0, -2)$.

Příklad 1.1. Délka vektorů
Určete délku následujících vektorů

1. $b = (-1, 0, 1)$ — 3
2. $e = (3, 0, 1, 3)$ — 4

Příklad 1.2. Sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $c + d$ — $(2, 2, -1, 1)$
2. $e - 3f$ — $(6, -3, 1, 9)$
3. $a + 2b + f$ — nejde
4. $5c - (3d + 4e)$ — $(-10, 10, 7, -7)$

Příklad 1.3. Skalární součin vektorů
Vypočítejte následující skalární součiny

1. $8c \times d$ — -8
2. $-b \times a - 2e \times f$ — 18

1.2 Základní operace s maticemi

Mějme matice

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.4. Transpozice matic
Určete tvar následujících matic

1. C^T — $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. F^T — $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 1.5. Dimenze matic
Určete dimenzi následujících matic

1. B — 3×1
2. $E \times D^T$ — 2×3
3. $F^T \times C$ — nejde

Příklad 1.6. Sčítání matic, odčítání matic, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $E - F$ nejde

2. $2C^T + 4D$ $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 6 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

Příklad 1.7. Násobení matic
Vypočítejte

1. $E \times D^T$ $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

2. $C \times C^T + 3E$ $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Příklad 1.8. Diagonála matice
Najděte (hlavní) diagonálu následujících matic

1. $E \times D^T$ $\begin{pmatrix} -4 & -4 \end{pmatrix}$

2. $C \times C^T + 3E$ $\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}$

1.3 Gaussova eliminace, lineární (ne)závislost vektorů, soustavy lineárních rovnic

Příklad 1.9. Lineární závislost a nezávislost vektorů
Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. V případě lineární závislosti vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci zbylých lineárně nezávislých vektorů.

1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ lineárně závislé; $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ lineárně nezávislé

Příklad 1.10. Hodnost matice
Stanovte, jaká je hodnost následujících matic

1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, 2

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 3

Příklad 1.11. Řešení soustavy lineárních rovnic
Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

1. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$ nemá řešení

2. $\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & -3 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$ $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -1$

1.4 Determinant matice

Příklad 1.12. Determinant matice
Stanovte následující determinanty

1. $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad -6$

2. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad 1$

Příklad 1.13. Rovnice s determinanty
Vyřešte následující rovnici

1. $3\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$ $\qquad x = -3$ nebo $x = 3$