Příklady ke cvičení předmětu C1460: Úvod do matematiky
Téma 1: Lineární algebra

Skupina: **B**

Veronika Bendová
podzimní semestr, 2018

1.1 Základní operace s vektory

Mějme vektory $a = (2, 1, 2)$, $b = (-1, 0, 1)$, $c = (1, 2, 1, 1)$, $d = (1, 0, -2, 0)$, $e = (3, 0, 1, 3)$, $f = (-1, 1, 0, -2)$.

Příklad 1.1. Délka vektorů
Určete délku následujících vektorů

1. $a = (2, 1, 2)$ — 3
2. $f = (-1, 1, 0, -2)$ — 4

Příklad 1.2. Sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $d + e$ — $(4, 0, -1, 3)$
2. $2c - d$ — $(1, 4, 4, 2)$
3. $b - f + 3e$ — nejde
4. $3f - (4d - c)$ — $(-6, 5, 9, -5)$

Příklad 1.3. Skalární součin vektorů
Vypočítejte následující skalární součiny

1. $3e \times c$ — 21
2. $a \times b - 8d \times f$ — 8

1.2 Základní operace s maticemi

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.4. Transpozice matic
Určete tvar následujících matic

1. D^T — $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. F^T — $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 1.5. Dimenze matic
Určete dimenzi následujících matic

1. C — 2×3
2. $D^T \times C^T$ — 2×2
3. $E \times F$ — nejde

Příklad 1.6. Sčítání matic, odčítání matic, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $B - 2E$ nejde
2. $3D^T + 2C$ $\begin{pmatrix} 8 & 6 & -3 \\ -5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Příklad 1.7. Násobení matic
Vypočítejte

1. $D^T \times C^T$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$
2. $C \times F + 2D^T$ $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Příklad 1.8. Diagonála matice
Najděte (hlavní) diagonálu následujících matic

1. $D^T \times C^T$ $\begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}$
2. $C \times F + 2D^T$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.3 Gaussova eliminace, lineární (ne)závislost vektorů, soustavy lineárních rovnic

Příklad 1.9. Lineární závislost a nezávislost vektorů
Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. V případě lineární závislosti vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci zbylých lineárně nezávislých vektorů.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ lineárně nezávislé
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ lineárně závislé; $-2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Příklad 1.10. Hodnost matice
Stanovte, jaká je hodnost následujících matic

1. $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ 3
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ 2

Příklad 1.11. Řešení soustavy lineárních rovnic
Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

1. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= -7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= -3 \end{aligned}$ $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = -3$
2. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \\ -1x_1 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$ nemá řešení

1.4 Determinant matice

Příklad 1.12. Determinant matice
Stanovte následující determinanty

1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ 13

2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ -9

Příklad 1.13. Rovnice s determinanty
Vyřešte následující rovnici

1. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ -1 & x & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ x & -1 & x \end{vmatrix} = 4$ $x = 1$