Příklady ke cvičení předmětu C1460: Úvod do matematiky
Téma 1: Lineární algebra

Skupina: **D**

Veronika Bendová
podzimní semestr, 2018

1.1 Základní operace s vektory

Mějme vektory $a = (2, 1, 2)$, $b = (-1, 0, 1)$, $c = (1, 2, 1, 1)$, $d = (1, 0, -2, 0)$, $e = (3, 0, 1, 3)$, $f = (-1, 1, 0, -2)$.

Příklad 1.1. Délka vektorů
Určete délku následujících vektorů

1. $d = (1, 0, -2, 0)$ 4
2. $a = (2, 1, 2)$ 3

Příklad 1.2. Sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $f + c$ $(0, 3, 1, -1)$
2. $-d + 3e$ $(8, 0, 5, 9)$
3. $4a - e + d$ nejde
4. $3(2c - e) - 4f$ $(1, 8, 3, 5)$

Příklad 1.3. Skalární součin vektorů
Vypočítejte následující skalární součiny

1. $6f \times d$ -6
2. $-a \times b + 2c \times e$ 14

1.2 Základní operace s maticemi

Mějme matice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Příklad 1.4. Transpozice matic
Určete tvar následujících matic

1. D^T $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. E^T $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Příklad 1.5. Dimenze matic
Určete dimenzi následujících matic

1. E 2×2
2. $C^T \times E$ 3×2
3. $F \times D^T$ nejde

Příklad 1.6. Sčítání matic, odčítání matic, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $E^T + 4A$ — nejde
2. $3C - D^T$ — $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$

Příklad 1.7. Násobení matic
Vypočítejte

1. $C^T \times E$ — $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B^T \times F + A \times F^T$ — $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Příklad 1.8. Diagonála matice
Najděte (hlavní) diagonálu následujících matic

1. $C^T \times E$ — $\begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B^T \times F + A \times F^T$ — $\begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix}$

1.3 Gaussova eliminace, lineární (ne)závislost vektorů, soustavy lineárních rovnic

Příklad 1.9. Lineární závislost a nezávislost vektorů
Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. V případě lineární závislosti vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci zbylých lineárně nezávislých vektorů.

1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — lineárně závislé; $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ — lineárně nezávislé

Příklad 1.10. Hodnost matice
Stanovte, jaká je hodnost následujících matic

1. $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ — 2
2. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ — 3

Příklad 1.11. Řešení soustavy lineárních rovnic
Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

1. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ — $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 2$
2. $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$ — nemá řešení

1.4 Determinant matice

Příklad 1.12. Determinant matice
Stanovte následující determinanty

1. $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ -10

2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ -4

Příklad 1.13. Rovnice s determinanty
Vyřešte následující rovnici

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ x & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = -6$ $x = 2$ nebo $x = -3$