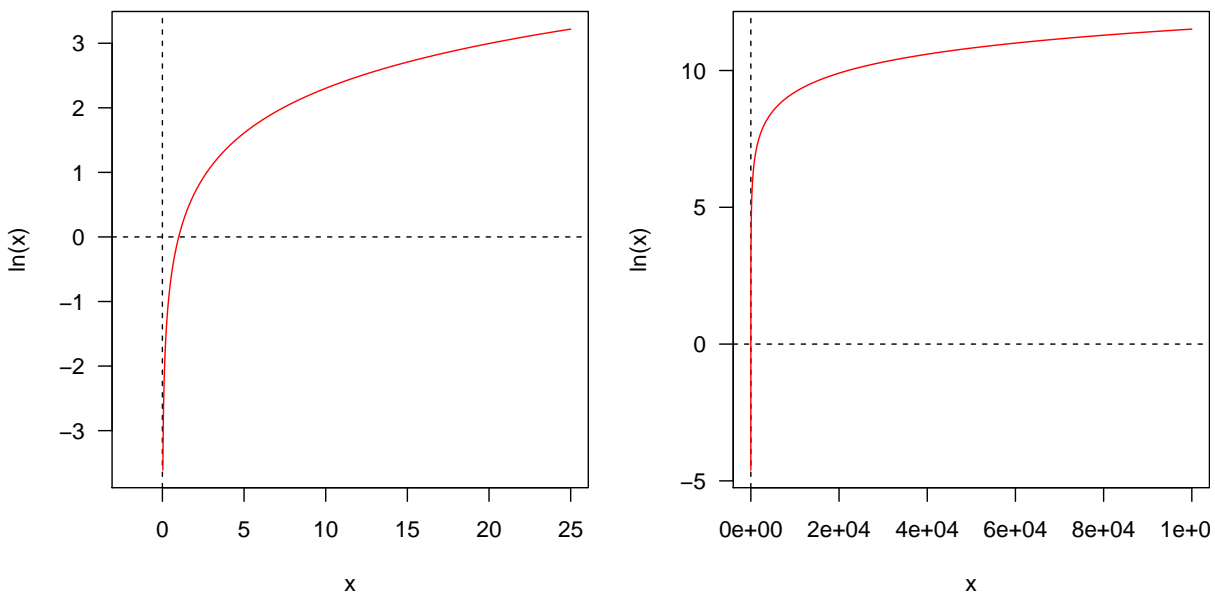


PŘÍKLADY KE CVIČENÍ PŘEDMĚTU C1460: ÚVOD DO MATEMATIKY  
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: Vyučující

VERONIKA BENDOVÁ  
PODZIMNÍ SEMESTR, 2018**2.1 Vlastnosti základních funkcí****Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce  $\ln(x)$** Na obrázku 1 je zobrazený graf funkce  $f(x) = \ln(x)$ . Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce  $f(x)$ ;
2. obor hodnot funkce  $f(x)$ ;
3. spojitost funkce  $f(x)$  na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce  $f(x)$  (horní / dolní / globální ohraničenost funkce  $f(x)$ );
5. periodicitu funkce  $f(x)$ , případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Obrázek 1: Graf funkce  $\ln(x)$

## 2.2 Výpočty limit

### Příklad 2.2. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

$$1. x^2 - 3x - 10 \qquad (x - 5) \times (x + 2)$$

$$2. x^3 + 6x^2 + 9x + 4 \qquad (x + 4) \times (x + 1) \times (x + 1)$$

### Příklad 2.3. Limity funkcí ve vlastním bodě

Vypočítejte následující limity

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 - 3x - 5 \qquad 9$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^4 - 21x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 1} \qquad 3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{x^4 - 1} \qquad 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 5^x}{4^x} - 2 \qquad -2$$

### Příklad 2.4. Limity funkcí v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} \qquad 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{21x^3 + 5x - 1}{4 + x^2 + 3x^3} \qquad 7$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 - 3x^3 + 1}{2 + x^3 - x^2} \qquad -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 - 2x^3 + 6}{3 + x^2 + x^7} \qquad 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x + 3^x}{4^x} \qquad \infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2^x}{4^x} \qquad 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 3^x}{3^x} \qquad 1$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 3^x}{3 - 2^x} \qquad \frac{2}{3}$$

## 2.3 Výpočty derivací

### Příklad 2.5. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

$$1. (3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1)' \qquad 12x^3 - 6x^2 - 2x$$

$$2. (x^5 - x^{-5} - x^0 + \sin(x) - \ln(x))' \qquad 5x^4 + 5x^{-6} + \cos(x) - \frac{1}{x}$$

$$3. (x^2 \cos(x) - 2xe^x)' \qquad 2x \cos(x) - x^2 \sin(x) - 2e^x(x + 1)$$

$$4. (x \tan(x) + \ln(x) \sin(x))' \qquad \tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{x} + \ln(x) \cos(x)$$

$$5. \left( \frac{2x}{1 - x^2} \right)' \qquad \frac{2(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^2}$$

6.  $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$   $\frac{1}{\cos^2(x)}$
7.  $(e^{x^2-2x})'$   $2(x-1)e^{x^2-2x}$
8.  $2\sin^3(x)$   $6\sin^2(x)\cos(x)$

**Příklad 2.6. Derivace druhého řádu funkce**

Vypočítejte následující druhé derivace

1.  $(3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1)''$   $36x^2 - 12x - 2$
2.  $(x \sin(x))''$   $2 \cos(x) - x \sin(x)$
3.  $(\cos(x) \sin(x))''$   $-4 \sin(x) \cos(x)$
4.  $(e^{x^2-2x})''$   $(4x^2 - 8x + 6)e^{x^2-2x}$

**2.4 l'Hospitalovo pravidlo****Příklad 2.7. l'Hospitalovo pravidlo**

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{x^4 - 1}$  0
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{x^4 - 1}$

*l'Hospitalovo pravidlo nelze použít*

*navíc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1}$  neexistuje.*