

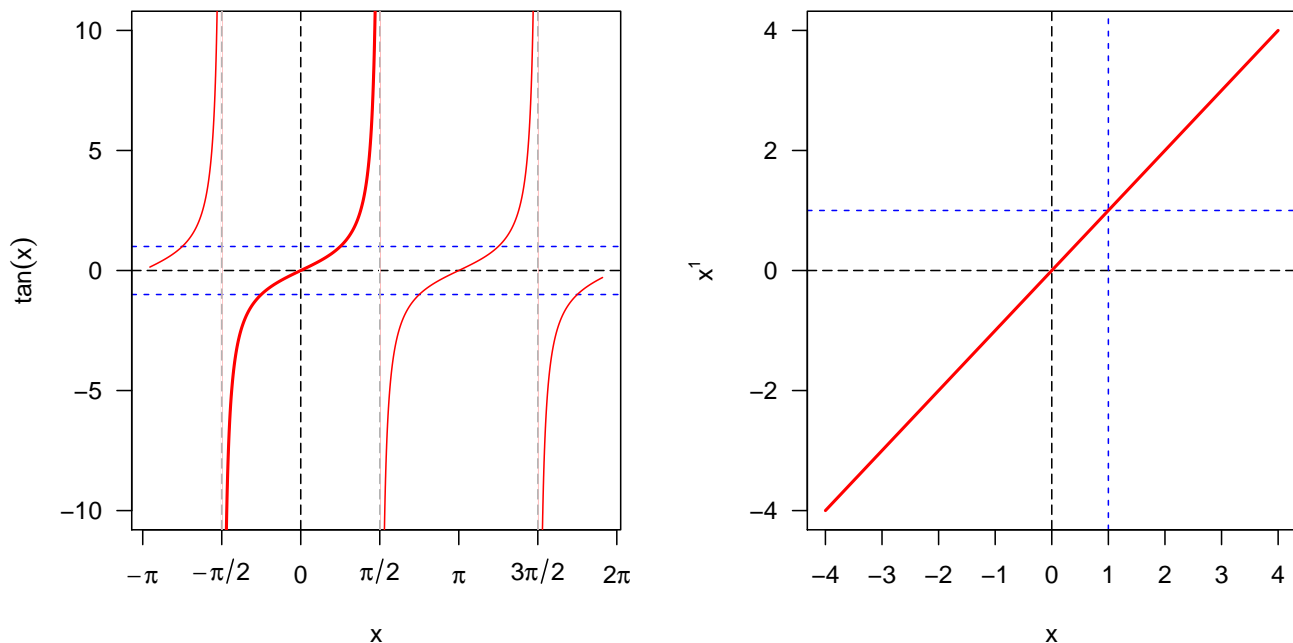
PŘÍKLADY KE CVIČENÍ PŘEDMĚTU C1460: ÚVOD DO MATEMATIKY
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: A

VERONIKA BENDOVÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2018**2.1 Vlastnosti základních funkcí****Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce $\tan(x)$** Na obrázku 1 vlevo je zobrazený graf funkce $f(x) = \tan(x)$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

Obrázek 1: Graf funkce $\tan(x)$ (vlevo); graf funkce x^1 (vpravo)

Příklad 2.2. Základní vlastnosti funkce x^1

Na obrázku 1 vpravo je zobrazený graf funkce $f(x) = x^1$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

2.2 Výpočty limit**Příklad 2.3. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele**

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

1. $x^2 + x - 2$ $(x + 2) \times (x - 1)$
2. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ $(x - 1) \times (x + 2) \times (x - 4)$

Příklad 2.4. Limity funkcí ve vlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 + 3x + 2$ 2
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 2^x}{5^x}$ $\frac{1}{5}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - x + 2}{x^4 - 6x^3 - 9x + 4}$ $-\frac{1}{2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 - 4}$ $\frac{15}{4}$

Příklad 2.5. Limity funkcí v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{x^2}$ 2
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + x^3 - x^4}{x^3 - 3x^5 - 2x^4 + 1}$ 0
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 4^x}{5^x}$ 0
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 2^x}{2 + 5^x}$ 2
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^7 - 5x^3 + 4x^4 - 1}{6 + x^2 - 3x^5 + 4x^7}$ $\frac{3}{2}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x - 2^x}{4^x}$ ∞
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 4x^8 - 3}{2x^6 - x^5 + 3x^4 - 5x}$ ∞
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 6^x}{6^x}$ -1

2.3 Výpočty derivací

Příklad 2.6. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

1. $(x^8 + x^{-8} + x^0 - \cos(x) + e^x)'$ $8x^7 - 8x^{-9} + \sin(x) + e^x$
2. $(3x^5 - 2x^3 - 4x + 4)'$ $15x^4 - 6x^2 - 4$
3. $(x^3 \sin(x) + 4x \tan(x))'$ $3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x) + 4 \tan(x) + \frac{4x}{\cos^2(x)}$
4. $\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)'$ $\frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$
5. $\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}\right)'$ 1
6. $(\ln(2x^2 - 4x))'$ $\frac{2(x-1)}{x(x-2)}$
7. $(\cos(x^2) + \sin(2x))'$ $2 \cos(2x) - 2x \sin(x^2)$
8. $(\tan(x) \cos(x) - 3 \ln(x) \cos(x))'$ $\frac{1 - \sin^2(x)}{\cos(x)} - \frac{3 \cos(x)}{x} + 3 \ln(x) \sin(x)$

Příklad 2.7. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

1. $(2x^5 - x^3 - 4x + 4)''$ $40x^3 - 6x$
2. $((x^4 - 1)e^x)''$ $(x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 1)e^x$
3. $(3e^x \sin(x))''$ $6e^x \cos(x)$
4. $\left(\frac{xe^{4x} - 2}{2x}\right)''$ $8e^{4x} - \frac{2}{x^3}$

2.4 l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 2.8. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 - 4}$ $\frac{15}{4}$
 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x - 6}{x^2 - 4}$ *l'Hospitalovo pravidlo nelze použít*
 3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 + 10x^2 + 9x + 2}{x^2 - 3x - 10}$ $-\frac{5}{7}$
- navíc $\lim_{x \rightarrow 1^-} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1}$ neexistuje.*