

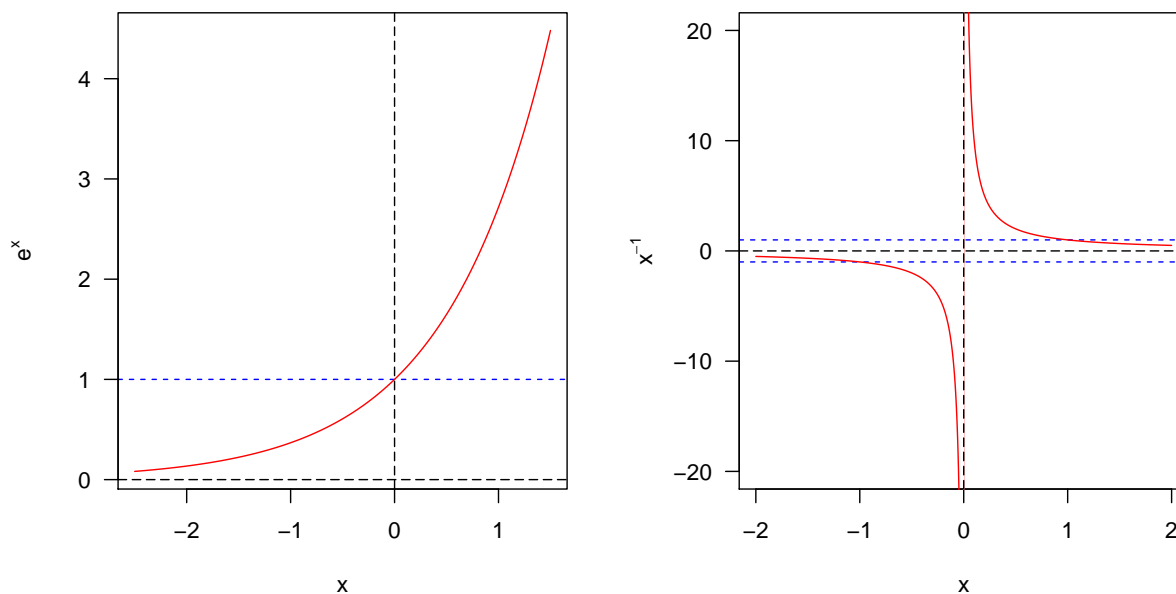
PŘÍKLADY KE CVIČENÍ PŘEDMĚTU C1460: ÚVOD DO MATEMATIKY
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: B

VERONIKA BENDOVÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2018**2.1 Vlastnosti základních funkcí****Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce e^x** Na obrázku 1 vlevo je zobrazený graf funkce $f(x) = e^x$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

Obrázek 1: Graf funkce e^x (vlevo); graf funkce x^{-1} (vpravo)

Příklad 2.2. Základní vlastnosti funkce x^{-1}

Na obrázku 1 vpravo je zobrazený graf funkce $f(x) = x^{-1}$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

2.2 Výpočty limit**Příklad 2.3. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele**

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

1. $x^2 - 5x + 4$ $(x - 4) \times (x - 1)$
2. $x^3 - 7x - 6$ $(x + 1) \times (x + 2) \times (x - 3)$

Příklad 2.4. Limity funkcí ve vlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^5 - 2}$ 0
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 6^x - 3^x}{2^x + 4^x}$ $-\frac{1}{2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 - 3x - 4$ 0
4. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x - 10}$ $-\frac{12}{7}$

Příklad 2.5. Limity funkcí v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + x} x$ 0
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 5^x}{8^x}$ 0
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^5 - 2x^3 - 8x + 2}{3 + x^2 + 4x^4}$ $-\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4^x} + 1}{\frac{1}{3^x} - 3}$ $-\frac{1}{3}$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 - x^5 + 3x^4 - 5x}{3x^4 + 4x^8 - 3}$ 0
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 4^x}{5^x}$ ∞
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 2^x}{3^x}$ 1
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 - x - 3}{x^3 - x + 9x^4 - 5}$ $-\frac{4}{9}$

2.3 Výpočty derivací

Příklad 2.6. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

1. $(x^5 - 4x^4 - 5x^2 - x - 3)'$ $5x^4 - 16x^3 - 10x - 1$
2. $(\cos^4(x) + \tan(3x))'$ $-4 \cos^3(x) \sin(x) + \frac{3}{\cos^2(3x)}$
3. $\left(\frac{4 - \cos(x)}{e^x}\right)'$ $\frac{\sin(x) - 4 + \cos(x)}{e^x}$
4. $(e^x \sin(x) - 4 \ln(x) \cos(x))'$ $\sin(x)(e^x + 4 \ln(x)) + \cos(x)(e^x - \frac{4}{x})$
5. $\left(\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}\right)'$ 1
6. $(x^7 - x^{-7} - x^0 - \ln(x) + \tan(x))'$ $7x^6 + 7x^{-8} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2(x)}$
7. $((2 - x^2) \sin(x) - x^3 \cos(x))'$ $x \sin(x)(x^2 - 2) + 2 \cos(x)(1 - 2x^2)$
8. $\left(\frac{x e^{4x} - 2}{2x}\right)'$ $2e^{4x} + \frac{1}{x^2}$

Příklad 2.7. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

1. $(\cos(x) \ln(x))''$ $-\frac{2x \sin(x) + \cos(x)(1 + x^2 \ln(x))}{x^2}$
2. $(x^5 - x^4 - 5x^2 + x - 3)''$ $2(10x^3 - 6x^2 - 5)$
3. $\left(\frac{\ln(x^2)}{x}\right)''$ $\frac{2(\ln(x^2) - 3)}{x^3}$
4. $(x \cos(x))''$ $-2 \sin(x) - x \cos(x)$

2.4 l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 2.8. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x - 10}$ $-\frac{12}{7}$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 + 4x + 4}{x^2 - 3x - 10}$ *l'Hospitalovo pravidlo nelze použít*
navíc $\lim_{x \rightarrow 1^-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1}$ *neexistuje.*
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 3}{5x^2 - 8x + 3}$ -1