

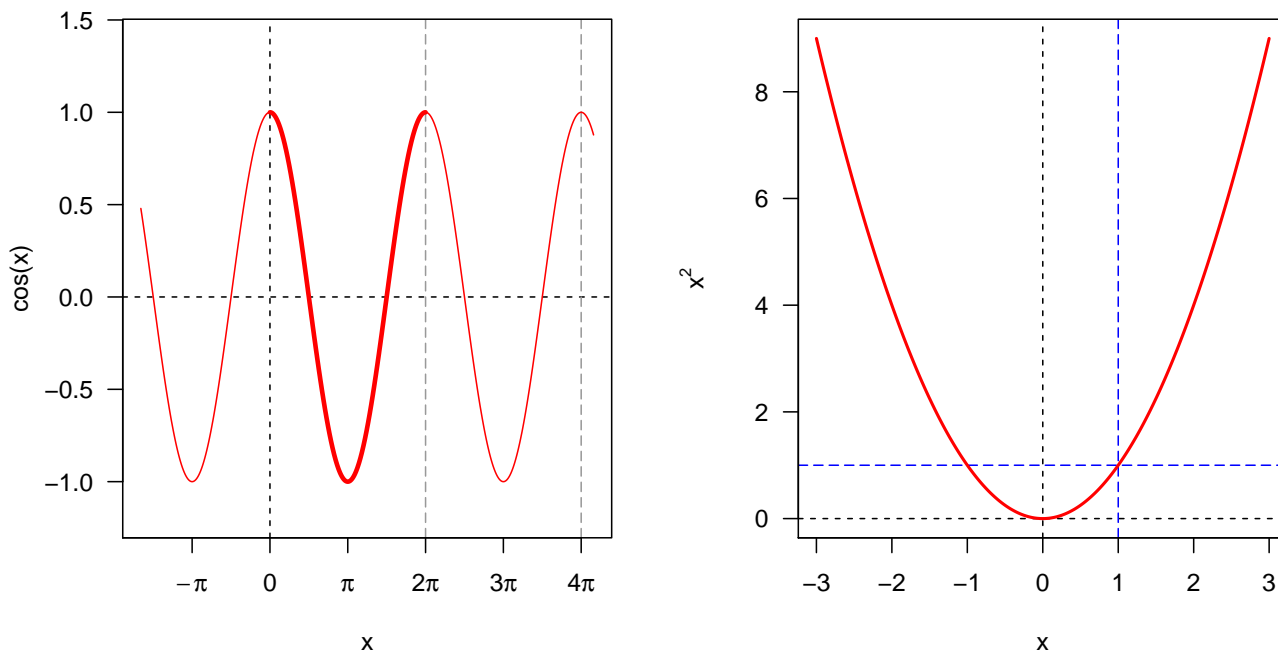
PŘÍKLADY KE CVIČENÍ PŘEDMĚTU C1460: ÚVOD DO MATEMATIKY
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: C

VERONIKA BENDOVÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2018**2.1 Vlastnosti základních funkcí****Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce $\cos(x)$** Na obrázku 1 vlevo je zobrazený graf funkce $f(x) = \cos(x)$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

Obrázek 1: Graf funkce $\cos(x)$ (vlevo); graf funkce x^2 (vpravo)

Příklad 2.2. Základní vlastnosti funkce x^2

Na obrázku 1 vpravo je zobrazený graf funkce $f(x) = x^2$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

2.2 Výpočty limit**Příklad 2.3. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele**

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

1. $x^2 + x - 6$ $(x + 3) \times (x - 2)$
2. $x^3 + 7x^2 + 11x + 5$ $(x + 1) \times (x + 1) \times (x + 5)$

Příklad 2.4. Limity funkcí ve vlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ 1
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x + 3}{2^x - 4^x}$ -1
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9}$ $\frac{8}{3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 - 7$ 20

Příklad 2.5. Limity funkcí v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x}$ $-\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 2 - 3x^2 - 2x^7}{2x^3 + x^5 - 3}$ ∞
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x^3 + x}{3x^5 - 2x^3 - 6x + 2}$ 0
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x - 5^x}{5^x}$ -1
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{4^x}}{2 - \frac{1}{5^x}}$ 1
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6^x - 2^x}{3^x}$ $-\infty$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x - x^3 + 4x^5}{x^4 + 2x^5 - x^3}$ 2
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^x}{5^x}$ 0

2.3 Výpočty derivací

Příklad 2.6. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

1. $(x^4 + x^{-4} + x^0 - \tan(x) + e^x)'$ $4x^3 - 4x^{-5} - \frac{1}{\cos^2(x)} + e^x$
2. $\left(\frac{e^x + x^2 - 4x}{\ln(x)}\right)'$ $\frac{2x + e^x - 4}{\ln(x)} - \frac{x^2 - 4x + e^x}{x \ln^2(x)}$
3. $((x + x^4) \ln(x) - 4x \sin(x))'$ $(1 + 4x^3) \ln(x) + x^3 + 1 - 4 \sin(x) - 4x \cos(x)$
4. $(\ln(\cos(x)) + \ln(\ln(x)))'$ $-\tan(x) + \frac{1}{x \ln(x)}$
5. $(3 \ln(x) \tan(x) + \sin(x) \cos(x))'$ $\frac{3 \tan(x)}{x} + \frac{3 \ln(x)}{\cos^2(x)} + \cos^2(x) - \sin^2(x)$
6. $(2x^6 - x^4 + 3x^3 + 5x)'$ $12x^5 - 4x^3 + 9x^2 + 5$
7. $\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'$ $\frac{1+x}{(1-x)^3}$
8. $\left(\frac{-2}{\sin(2x+3)}\right)'$ $\frac{4 \cos(2x+3)}{\sin^2(2x+3)}$

Příklad 2.7. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

1. $(x^{-1} \ln(x))''$ $\frac{2 \ln(x) - 3}{x^3}$
2. $(\cos(x^2) + \sin(2x))''$ $-2 \sin(x^2) - 4x^2 \cos(x^2) - 4 \sin(2x)$
3. $(\sin(x) \ln(x))''$ $\frac{2 \cos(x)}{x} - \sin(x) \left(\ln(x) + \frac{1}{x^2}\right)$
4. $(2x^6 - x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5)''$ $2(30x^4 - 6x^2 + 9x + 4)$

2.4 l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 2.8. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$ *l'Hospitalovo pravidlo nelze použít*
navíc $\lim_{x \rightarrow 3^-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 3^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3}$ *neexistuje.*
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9}$ $\frac{8}{3}$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 - 7x^2 - 2x + 8}{4x^2 + x - 3}$ -3