20. 9.

Cvičení : $^2/_2$ semestru ; 1 neomluvená neúčast

: 2 písemky, celkem 50% bodů z obou dohromady

Cíl předmětu : seznámení se základními pojmy

cca 6 témat - upřesnění v průběhu semestru

Skripta : ve st. materiálech 7 pdf : teorie k tématům

Téma 1: Lineární algebra

Vektor... uspořádaná n-tice

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad v \in \mathbb{R}^2$

sčítání vektorů

$v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u + v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

násobení skalárem : $a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \cdot u = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}$

násobení dvou vektorů:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 + 0 - 2 = -3$

$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \qquad u, v \in \mathbb{R}^n$

Lineární kombinace

$au + bv + cw \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \; u, v, w \in \mathbb{R}^n$

Matice... pár čísel zapsaných do obdélníku

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ... $A_{2\times3}$ $\quad A_{3\times3}$... čtvercová matice

matice 100x100... digitální fotka čísla 0-100

černá — bílá

Operace s maticemi

sčítání matic, násobení skalárem

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix} \qquad 5\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\15&20\end{pmatrix}$$

násobení dvou matic

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\5&-1\end{pmatrix} \qquad i\begin{pmatrix}\text{———}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Big| \end{pmatrix}^{j}=\begin{pmatrix}&ij\end{pmatrix}$$

je čtverec? ANO...OK

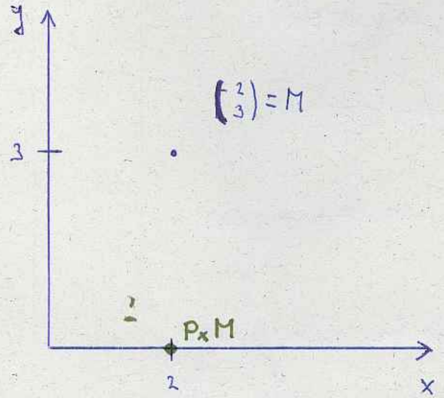
$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix}3&-1\\5&-1\end{matrix}}\end{matrix}$$ ... výsledek

Násobení matic není komutativní ... $A\cdot B \neq B\cdot A$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}\,B_{k,j} \qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

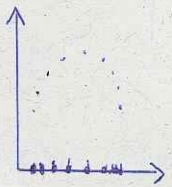
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$



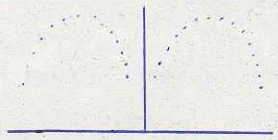
$$P_x=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$P_x\cdot M=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

projekce na osu x



$Z_4=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ... zrcadlení podle osy y (y stabilní, x má hodnotu



$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

Hodnost? Determinant?

Soustavy lineárních rovnic

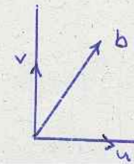
$$\begin{matrix}2x-y=0\\-x+2y=3\end{matrix} \qquad \underset{A}{\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}}\underset{x}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}=\underset{b}{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}} \qquad \begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}$$

$$Ax=b \qquad 1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$ ... zk

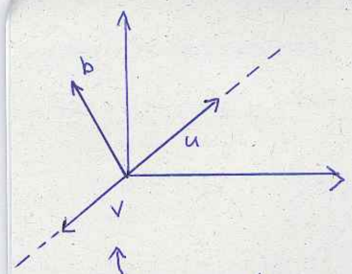
$$\begin{matrix}2x-y=0\\-x+2y-z=-1\\-3y+4z=4\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\overset{0}{x}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+\overset{0}{y}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\overset{1}{z}\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}x=0\\y=0\\z=1\end{matrix}$$

$Ax=b$ ... Existuje řešení pro $\forall b$?



$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1&1\\u&v\\1&1\end{pmatrix}$$ jde o... jde...



u, v leží v přímce, b leží mimo přímku

$\Rightarrow au + cv \neq b \quad \forall a, c \in \mathbb{R}$

Pokud jeden je násobkem druhého pak leží na přímce.

Pokud u a v nejsou násobkem druhého, má soustava

všechny řešení. u, v jsou LN.

zde $u = -1 \cdot v$

Mějme u, v, w. u, v, w jsou LZ, pokud jeden z nich lze napsat jako lineární kombinaci druhého.

Soustava má řešení, pokud všechny st. vektory jsou LN.

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ... příklad LN vektorů

? Jsou vektory $\begin{array}{c}x\\y\\z\end{array}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ lineárně nezávislé?

$$\begin{array}{ccc}x & y & z\end{array}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -2\\2 & 5 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{eliminace}]{\text{Gaussova}} \begin{pmatrix}m & m & m\\0 & m & m\\0 & 0 & m\end{pmatrix}$$

schodovitý tvar

ekvivalence

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -2\\2 & 5 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -2\\0 & 3 & -6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ekvivalentní úpravy:

1. Záměna řádků
2. Vynásobení řádku nenulovým číslem
3. Přičtením řádku nebo jeho násobku k jinému řádku
4. Vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků

$$2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\+1\\-2\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\-1 & 2 & -1 & -1\\0 & -3 & 4 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\-2 & 4 & -2 & -2\\0 & -3 & 4 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\0 & 3 & -2 & -2\\0 & -3 & 4 & 4\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\0 & 3 & -2 & -2\\0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right) \text{... LN} \Rightarrow \text{právě 1 řešení}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}x = 0\\y = 0\\z = 1\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Pokud:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \text{... nemá řešení}$$

Zuzana Došlá: Matematika pro chemiky I a II

Antonín Hlaváček: Sbírka příkladů z VŠ matematiky

Hodnost matice

Determinanty

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot 4 = -7$$

Jestliže determinant matice řádu n je 0, pak její hodnost je zcela jistě menší než n. Jestliže determinant matice řádu n je různý od 0, pak hodnost této matice je zcela jistě n.

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right| = (1\cdot 2(-1) + 2\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 1) - (1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 1 + (-1)\cdot 4\cdot 2)$$

$$= -2 + 6 + 4 - (2 + 3 - 8) =$$

$$= 8 + 3 = 11 \ \ldots$$ hodnost matice A je 3.

Určete x tak, aby determinant matice byl 0, resp. 1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & x \end{vmatrix} = x - 8 \quad \overset{|A|=0}{\Rightarrow} \quad x = 8$$

$$\overset{|A|=1}{\Rightarrow} \quad x = 9$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ ... Determinant řádu 4 matice A řešíme rozvojem podle jeho 1. řádku

definice $(-1)^{i+j}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| =$$

$$= (3\cdot 3\cdot 3 + 0\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2) - (1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 3 + 0\cdot 2\cdot 3) - (2\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1) + (1\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 3) =$$

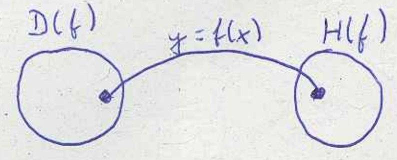
$$= (9 + 0 + 4) - (3 + 24 + 0) - (12 + 0 + 1) + (0 + 8 + 6) =$$

$$= 13 - 27 - 13 + 14 = -13$$

Matematická analýza

důležité pojmy: funkce, reálné číslo

Funkce: Zobrazení z 1 množiny do druhé množiny. Obě množiny jsou podmnožinami reálných čísel.



D(f)... definiční obor $\quad D(f), H(f) \subset \mathbb{R}$

H(f)... obor hodnot

Ohraničenost funkcí

ohraničená fce zdola: $y = x^2$ (číslem 0, -1, -1268163)

ohraničená fce shora: $y = -x^2$ (číslem 0, 1, 13, ...)

neohraničená fce: $y = x+1 \quad y = x^3$

Monotónnost fce:

rostoucí / nerostoucí

klesající / neklesající

rostoucí na intervalu $(0; -\infty)$

$y = x^2$ je rostoucí na intervalu $\langle 0; \infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty; 0)$

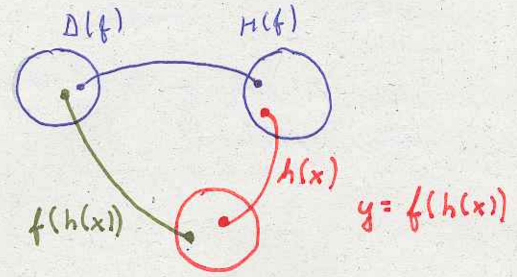
Periodicita

Každá fce $y = f(x)$ pro níž platí, jestliže x_0 $x_0 \pm p \in D(f) \Rightarrow f(x_0) = f(x_0+p) = f(x_0-p)$,

přičemž nejmenší číslo p, které splňuje tuto vlastnost se nazývá perioda.

Např: sin(x), cos(x), ... perioda $p = 2\pi$.

Složená funkce



$y = \sin(\sqrt{x})$

$y = \sin u, \ u = \sqrt{x}$

$y = \ln \cos e^{x^2}$

$y = \ln u \quad u = \cos v \quad v = e^{w} \quad w = x^2$

$w = x \cdot x$

konečné, [illegible]

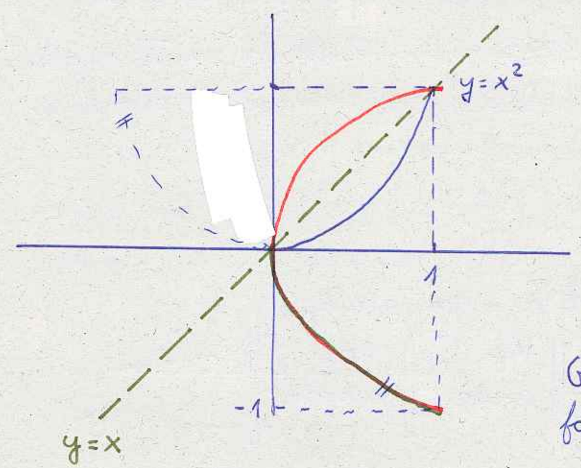
sin nic do[illegible]

neudělám

Inverzní funkce

Pro inverzní fci je obor hodnot původní funkce definičním oborem.

Definiční obor původní funkce je oborem hodnot funkce inverzní.



$x = y^2$

$y^2 = x$

$y = +\sqrt{x}$

symetrie podle přímky $y = x$

Graf inv. fce je symetrický k pů[illegible] fci okolo přímky $x = y$.

Vlastnost periodicity je nepřenosná, monotónnost ano

Polynomy

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$; $a_i \in R$, x je proměnná

Jestliže a_0 je různé od nuly, pak řekneme, že polynom je stupně n.
n je tedy nejvyšší mocnina, kterou v polynomu vidíme.

Kvadr. rovnice je polynom

Číslo x_0 je kořenem polynomu $P(x)$, jestliže platí $P(x_0) = 0$

V oboru reálných čísel platí, že polynom stupně n má nejvýše $\underline{n}$ kořenů.
Kvadr. rce má nejvýše 2 kořeny. (nemusí mít žádný kořen: $x^2+1=0$)
nemá kořen v $\mathbb{R}$. $x^2 = -1$, ale $x^2 \geq 0$.

Racionální lomenné fce: RLfce

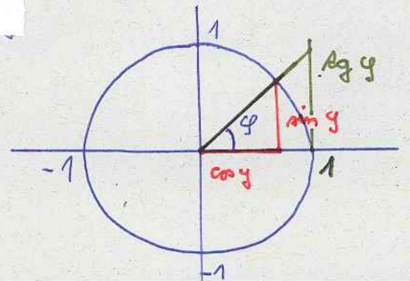
Fce, která se dá napsat jako podíl dvou polynomů: $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

O racion. lom. fci $R(x)$ řekneme, že je ryze lomenná, jestliže $m > n$.
Ve všech ostatních případech říkáme, že $R(x)$ je neryze lomenná.
Každou RL fci, která je neryze lomenná lze převést na součet nějakého polynomu a racionální lomenné fce, která je ryze lomenná, přes algoritmus nazvaný Dělení polynomu.

GOniometrické a cyklometrické fce

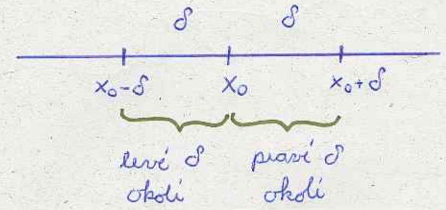
cyklometrické fce jsou fce inverzní ke fcím goniometrickým

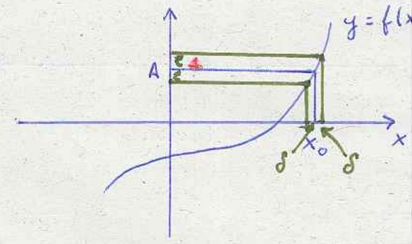
Goniometrické	sin	cos	tg	cotg
Cyklometrické	arcsin	arccos	arctg	arccotg



Matematická analýza 2:

δ okolí bodu x_0: $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$





Buď A číslo. Fce f má v bodě x_0 vlastní limitu rovnou A, píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje δ okolí bodu x_0 tak, že pro všechna x z tohoto okolí je fce f definována a platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.
pravého
levého

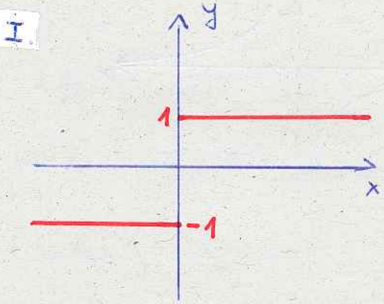
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ... limita

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ ... limita zprava

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ ... limita zleva

fce $f(x)$ v lib. bodě x má právě 1 limitu, nebo limitu nemá. Pokud má fce $f(x)$ v nějakém x_0 limitu A, pak má v tomto bodě limitu zprava i limitu zleva a obě tyto limity se rovnají.

I.



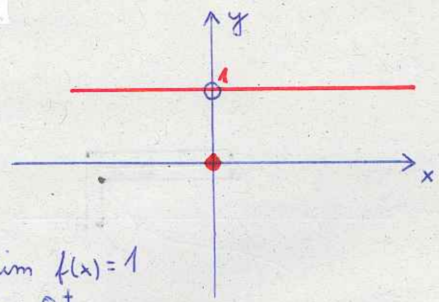
$y = \operatorname{sign} x$: $\begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sign} x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sign} x = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x$ neexistuje

II



$y = 1$ pro $x \neq 0$

$y = 0$ pro $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Spojitost funkce

Fce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, pokud je v tomto bodě definována, má v tomto bodě limitu a tato limita A se rovná funkční hodnotě v bodě x_0.

Fce I) není spojitá v bodě 0.

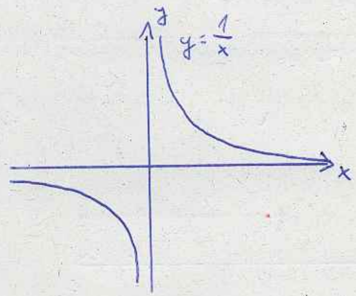
Fce II není spojitá v bodě 0. Jinak je spojitá všude.

$\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \approx \frac{0}{0} = 1$

nevlastní limita ve vlastním bodě

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$



$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

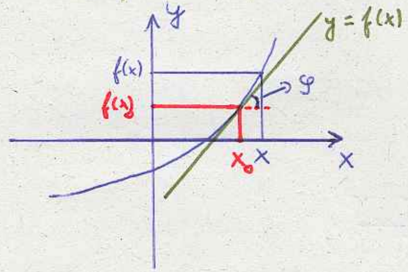
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ \frac{1}{t} = x \end{array} \right| = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{2\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right) - 1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1} = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\frac{2 + t - t^2}{\cancel{t^2}}}{\frac{1 - t^2}{\cancel{t^2}}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = \infty$

Derivace fce jedné proměnné



Limitou pro $x \to x_0$ dostaneme směrnici tečny

$k_t = \operatorname{tg} \varphi = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Tato limita (pokud existuje a je to reálné číslo) se nazývá derivace fce.

Derivace fce $f(x)$ v bodě x_0 je tangens úhlu φ, který svírá tečna ke grafu $y = f(x)$ v bodě x_0 s kladným směrem osy x, což je také směrnice tečny. Ale protože směrnice této tečny nás také informuje o monotónnosti fce $y = f(x)$ v bodě x_0, bude platit, že pokud derivace fce v daném bodě je kladná (záporná) je fce $y = f(x)$ v bodě x_0 je rostoucí (klesající).

Vzorce k výpočtům derivací

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$c' = 0$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Další pravidla pro výpočet derivací:

1. $(c f(x))' = c f'(x)$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. Je-li $g(x) \neq 0$, pak $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$$(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{\cos x\, x^2 - 2x \sin x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$$

L'Hospitalovo pravidlo

Výpočet vybraných limit. Chceme spočítat limitu $\frac{f(x)}{g(x)}$

L'Hosp. pr.: Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$. Nechť je splněna 1 z podmínek:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Je-li vlastní / nevlastní $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a

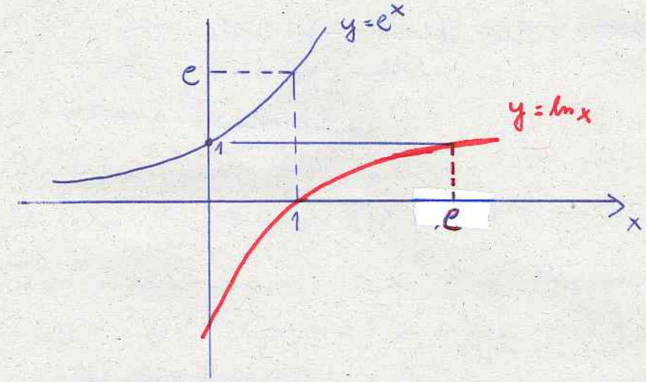
platí $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H.P.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \overset{L'H.P.}{=} \frac{4x+1}{2x} \overset{L'H.P.}{=} \frac{4}{2} = 2$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \left| \begin{matrix} 0^0 & \dots & 0^5 = 0 \\ & & x^0 = 1 \end{matrix} \right\} \text{spor} \Big|$$



$$\ln e^{\sin \sqrt{x}} = \sin \sqrt{x}$$

anihilace fce

Dopočítat x^x

Derivace vyšších řádů

11. 10. 2018

$y = x^3$

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$

$y''' = x$

tg kladná, sečna /, fce roste ... deriv. kladná – fce roste v bodě x
záporná – fce klesá v bodě x
0 – konstantní v bodě x

Lokální extrémy fce

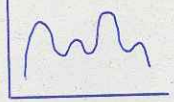
lokální minima / maxima

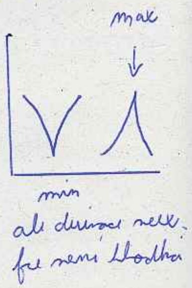
Fce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální maximum, jestliže ex. δ-okolí bodu x_0, tak, že pro ∀ x z ~~do~~ δ-okolí platí, že $f(x) \leq x_0$

Lok. extrémy hledáme pouze v bodech, v nichž derivace neexistuje nebo v bodech, kde je derivace rovná 0.

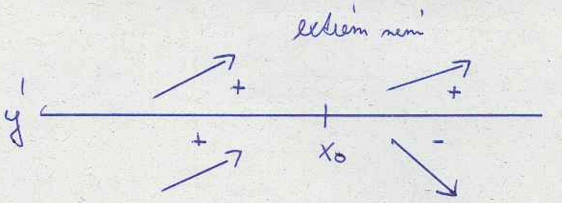
Cv: Hledání extrémů

derivace = 0 ... fce v bodě hladká
derivace neex. ... fce není v bodě ~~hladká~~ hladká





Jak poznám, že je v bodě extrém a jaký je směr?

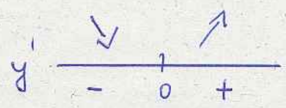


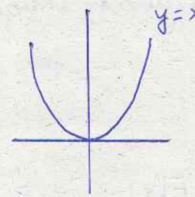
nic	↗	↗	+	+
max	↗	↘	+	−
min	↘	↗	−	+
nic	↘	↘	−	−

$y = x^2$

$y' = 2x$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

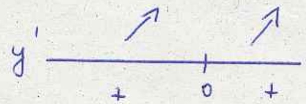




$y = x^3$

$y = 3x^2$

$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$



Konvexnost a konkávnost fce

Je-li fce v nějakém bodě nad svojí tečnou, říkáme, že je konvexní
Je-li fce v nějakém bodě pod svojí tečnou, říkáme, že je konkávní

Bod, ve kterém se fce z konkávní stává konvexní nebo naopak se nazývá inflexní bod. Např. bod 0 je u fce $y = x^3$ inflexním bodem, neboť nalevo od tohoto bodu je fce konkávní a napravo od tohoto bodu je konvexní.

Asymptota funkce

asymptota = přímka, která intuitivně nikdy neprotne fci, ale intuitivně se k ní fce blíží

- 1. bez směrnice (předem neurčitelné!)
- 2. se směrnicí – ty, které hledáme v bodech, kde je 0 v jmenovateli

Příklad: $\frac{1}{x}$ ... asymptota bez směrnice v bodě 0.

– rovnice asymptoty: $x = 0$

$\frac{17}{2-x}$ ... asymptota bez směrnice; rce asymptoty: $x = 2$

Asymptoty se směrnicí: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$$

Neurčitý integrál

$F'(x) = f(x)$

fci $F(x)$ nazveme primitivní fcí k fci $f(x)$.

$[F(x)+c]' = F'(x) + 0 = f(x)$

$F(x) = \int f(x)dx$

Nekonečnou množinu primitivních fcí nazveme neurčitý integrál.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq 1$

$\int 1 dx = x + c$

$\int \cos x dx = \sin x + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int c dx = cx + c$

$\int e^x dx = e^x$

$\int \sin x dx = -\cos x dx + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

Metoda per partes

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

$uv = \int u'v + \int uv'$

$\int x e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int 1 e^x dx =$

$= xe^x - e^x = e^x(x-1) + c$

Metoda substituce

V integrálu nahradím funkci, která tam je.

V integrálu nahradím funkci, která tam není a zavádím tedy novou funkci, která tam není.

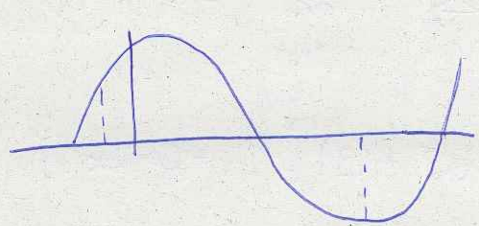
a) zavádím substituci fci, která tam je.

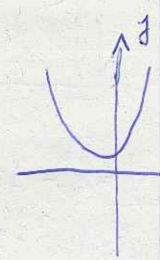
$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + c$

$\int \cos^3 x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int (1-t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} +$

Př.: $y = \cancel{x} + 3$

$y = kx + y$

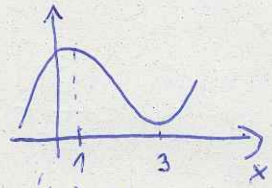




Lokální extrémy: 2 proměnné

1 proměnná

$y = f(x)$



$y'(x) = 0$

Př.: $y = x^2 + 2x + 2$

$y' = 2x + 2$

$2x + 2 = 0 \to x = -1$

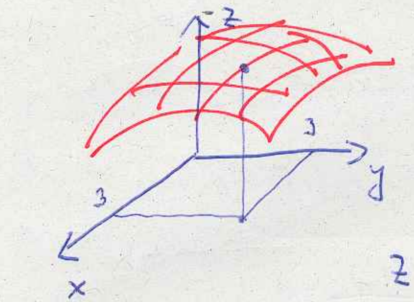
$y = (x+1)^2 + 1$

$y'(x) = \frac{dy}{dx}$

$y'' = 2$

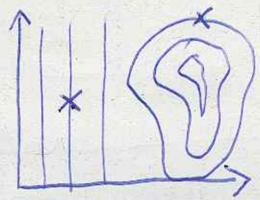
LMN

2 proměnné $z = f(x,y)$



$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$

PARCIÁLNÍ DERIVACE



$\cancel{\partial}$ ∂

$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$

$y = x^2 + 3$

$y' = (x^2+3)' = (x^2)' + (3)' = 2x + 0 = 2x$

$y = 5e^x$

$y' = (5e^x)' = 5e^x$

$z = x^2 \cdot y$

$z'_x = 2xy \quad z'_y = x^2$

$z = x^2 y + x$

$z'_x = 2xy + 1$

$z'_y = x^2$

$z = x^2 - y^2 - 2x - 4y + 12$ získání bodu

$z_x = 2x - 2 \qquad 2x - 2 = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 1$

$z'_y = 2y - y = \qquad 2y - y = 0 \qquad y = 2 \qquad y = 2$

A $[1;2]$

~~$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$~~

~~$z'_x = 2x - 2$~~

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$z''_{xx} \quad z''_{xy} \quad z''_{yx} \quad z''_{yy}$

$z''_{xx} = 2 \quad z''_{xy} = 0 \quad z''_{yx} = 0 \quad z''_{yy} = 2$

Hessova matice

Hessián

Determinant Hessovy matice

$$H = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix}$$

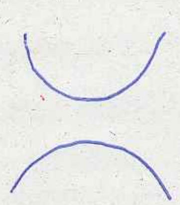
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

$\det H = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4$

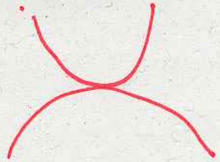
det H =
- ⊕ EXTRÉM
- 0 NEUMÍME ROZHODNOUT
- ⊖ NENÍ EXTRÉM

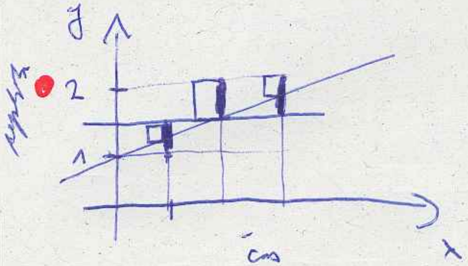
$z''_{xx}(A) > 0$ LMIN

$z''_{xx}(A) < 0$ LMAX

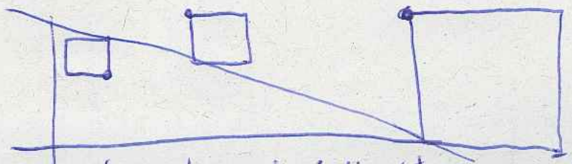


sedlo





$y = kx + q$



hledáme přímku s nejmenším obsahem čtverců, tj. hledáme k a q do rce $y = kx + q$

$S(k,q)$ - součet obsahů čtverců

$S = (k+q-1)^2 + (2k+q-2)^2 + (3k+q-2)^2$

$= \cancel{2 + 2 + 2 = 6}$

$= 2(k+q-1) + 2(2k+q-2) + 2(3k+q-2)$

$= 2(k+q-1)$

$\frac{\partial S}{\partial q} = 12k + 6q - 10$

$\frac{\partial S}{\partial k} = 2(k+q-1) + 2(2k+q-2) \cdot 2 + 2(3k+q-2) \cdot 3$

$= 28k + 12q - 22$

$12k + 6q - 10 = 0$

$28k + 12q - 22 = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 6 & 10 \\ 28 & 12 & 22 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 28 & 21 & 35 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 5 \\ 14 & 6 & 11 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} -28 & -12 & -22 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 13 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 13/9 \end{array}\right)$

$-3 \quad -\frac{13}{3} \quad \frac{15}{3}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 5 \\ 14 & 6 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

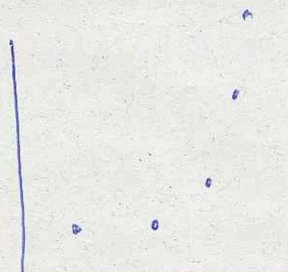
$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 6 & 10 \\ 28 & 12 & 22 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 42 & 21 & 35 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 5 \\ 14 & 6 & 11 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} -42 & -18 & -33 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc} 6 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$y = 1/2 x + 2/3$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$



$y = ax^2 + bx + c$

Diferenciální rovnice

derivace = změna

Značení

t … čas

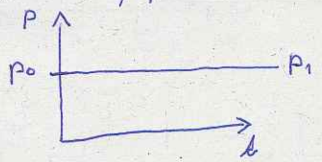
$p(t)$ … velikost populace v čase t

p_0 … iniciální velikost populace

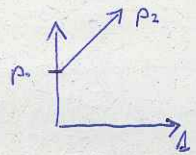
$p, p_0, t \geq 0$

$\frac{dp}{dt}$ … jak se mění populace v čase

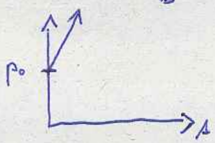
$\frac{dp_1}{dt} = 0$



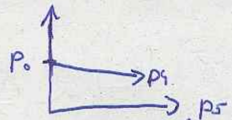
$\frac{dp_2}{dt} = 1$



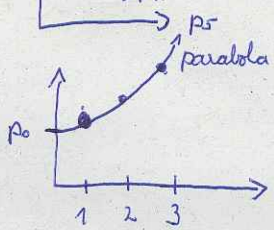
$\frac{dp_3}{dt} = 2$

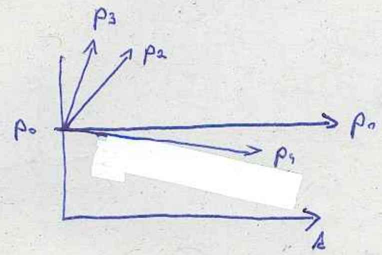


$\frac{dp_4}{dt} = -1/2$



$\frac{dp_5}{dt} = t$





$\frac{dp}{dt} = k \cdot p$ … model množení bakterií, míra množení roste s velikostí populace

k … koeficient … $k > 0$
rychlosti růstu

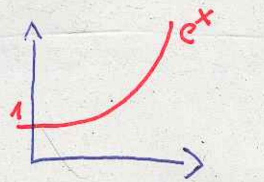
když zderivuji p podle t dostanu její k-násobek

~~…~~ $x^2 = 2x$

$(e^x) = e^x \qquad e^{2x} = 2e^{2x} \qquad (e^{kx})' = ke^{kx}$

$p(t) = e^{kt}$

$\frac{dp}{dt} = ke^{kt}$



$p(0) = e^{k \cdot 0} = e^0 = 1$

e^{kt} … řešení pouze když mám na začátku pouze 1 jedince $p(0) = 1$. =>

=> chceme obecnější řešení =>

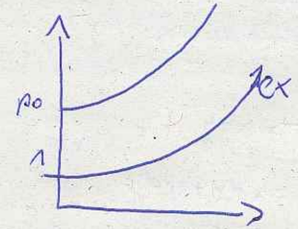
Nová volba

$p(t) = e^{kt} + p_0 \cdot 1$ ~~…~~
$p'(t) = ke^{kt}$
} nefunguje

$p(t) = e^{kt} \cdot p_0$

$p(0) = e^0 \cdot p_0 = p_0$

$p'(t) = ke^{kt} \cdot p_0$



$p(p_0 = 100, k = 1, t = 10) =$

$= 2.2$ mil.

10 stupňů a v populaci o délce 100 je populace o délce 2.2 mil.

$p(p_0 = 100, k = 2, t = 10) \doteq 48$ mld … předpoklad … bakterie se množí bez omezení

ANNO 17

Diferenciální rce

$f(x,y,y')=0 \xrightarrow{\text{řešení}} y=f(x)$

Př.: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$y\,dy = -x\,dx$

$dy = (x+y)\,dx$ NE tady

$\cancel{x\,dx + y\,dx}$

$= x\,dx + y\,dx$

$dy + y\,dx = x\,dx$

jen rce, kde pravá a levá jdou oddělit

$\int y\,dy = -\int x\,dx =$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$

$\boxed{y^2 = -x^2 + 2C}$

$y = \pm\sqrt{-x^2+c}$

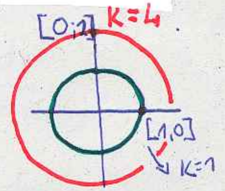
$\frac{y^2}{2} + k = -\frac{x^2}{2} + C$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \underbrace{C-k}_{C}$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

$y^2 + x^2 = K$ ... rce kružnice

K... poloměr kružnice



Poč. podmínka

$[x,y] = [1,0]$

=> PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ PRO POČ. PODMÍNKA

$[x,y] = [1,0]$ ... $y^2+x^2 = K$ OBECNÉ ŘEŠENÍ

$y^2+x^2 = 1$ PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

$y' = 2y$

$\frac{dy}{dx} = 2y$

$\frac{dy}{2y} = dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{2}{y}\,dy = \int dx$

$\frac{1}{2}\ln y = x$

$\ln y = 2x + 2c$

$y = e^{2(x+c)} = e^{2x} e^{2c} = C \cdot e^{2x}$

ANNO 18

Kapříci v rybníce

$\frac{dp}{dt} = kp\left(1-\frac{p}{N}\right)$

N... kapacita

k... konstanta

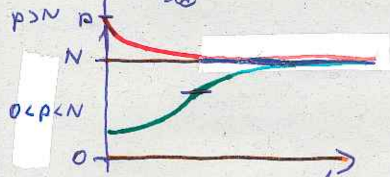
p... populace

změna nenastává, pokud $p=N$

nebo pokud $p=0$

- $p=0$: $\frac{dp}{dt} = k\,0\left(1-\frac{0}{N}\right) = 0 \cdot 1 = 0$
- $p=N$: $\frac{dp}{dt} = kN\left(1-\frac{N}{N}\right) = kN(1-1) = kN \cdot 0 = 0$

2 speciální případy ... na mnoha



p>N

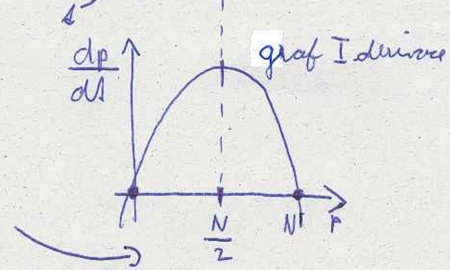
$\frac{dp}{dt} < 0$

0<p<N

$\frac{dp}{dt} > 0$

$\frac{dp}{dt} = kp - \frac{k}{N}p^2$

$p'(t) = kp - \frac{k}{N}p^2$



graf I derivace

graf II. derivace

$p''(t) = k - \frac{2k}{N}p$

Konvexní fce ... vždy rostoucí

Konkávní fce ... vždy klesající " KONEC VÝROKU

Model... zjednodušení reálné situace

$$p(t) = \frac{N p_0}{p_0 + (N - p_0)e^{-kt}}$$

... ukázka výsledku diferenciální rce, když nám nic nebrání

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - H$$

výlov kapříků

$H = 100$

$H = P/3$ řešíme počítačem

ANNO 1927

SIR modely

Susceptible - náchylní

Infected - nemocní

Recovered - uzdravení

předpoklad: každý může onemocnět jen jednou

předpoklad II: Rozsah populace N je stabilní.

? jak se mění počet lidí v kategoriích S, I, R.

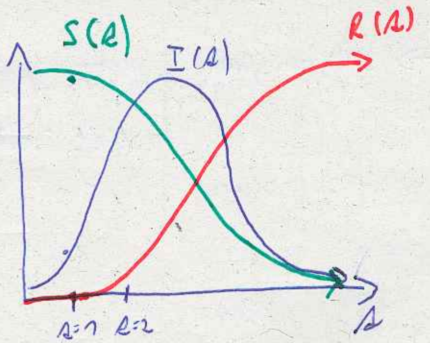
$S(t), I(t), R(t)$, α... míra nakažlivosti, β... míra uzdravení

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S(t) I(t)$$

... počet lidí, kteří se nakazí za jednotku času

$$\frac{dI}{dt} = \underbrace{\alpha S(t) I(t)}_{\text{počet nakažených}} - \overbrace{\beta I(t)}^{\text{ti, co se v průběhu času uzdraví}}$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t)$$ jen ti, co se uzdravili



? Kdy bude maximum nakažených

Předpověď chřipkové epidemie

$R(1) = 0$

$S(1) = 90$

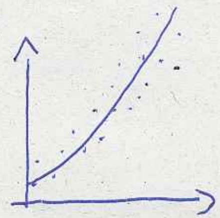
$I(1) = 10$

$R(2) = 5$

$S(2) = 15$

$I(2) = 80, \ldots$

$\Rightarrow \alpha, \beta$

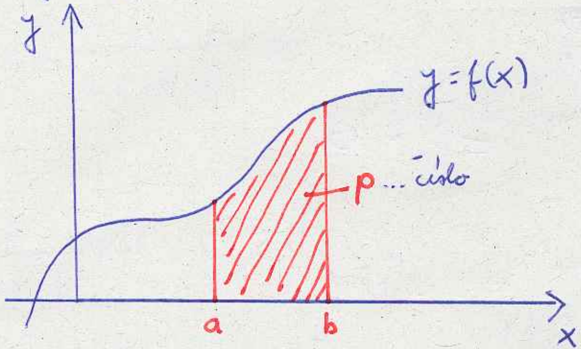


Diferenciální počet fcí více proměnných → zde jen počet 2 proměnných

Určitý integrál

1.11.2018

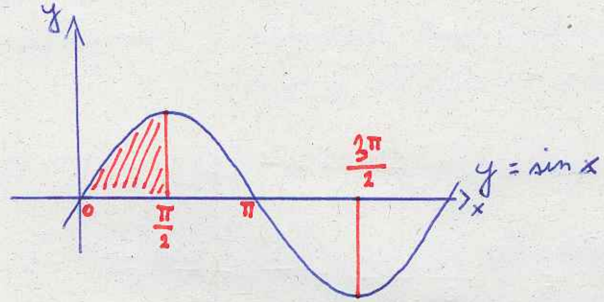
neurčitý integrál … fce
určitý integrál … číslo



p… určitý integrál od a do b z fce f(x)

$$p = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

↑ primitivní funkce



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = x & v' = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} -\cos x\,dx =$$

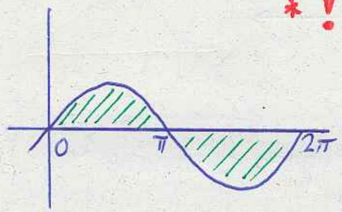
$$= \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{0\cos 0}_{0} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}$$

$$\underbrace{-\sin 0}_{0} = 1$$

Určitý integrál z těch částí fcí, které jsou nad osou x je kladné č…
Určitý integrál z těch částí fcí, které jsou pod osou x je záporné č…

Tedy např. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$, $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -2$, $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$

* ! ? Jaký je obsah plochy ohraničené křivkou y = sin x a osou x v intervalu [0; 2π] … je 4.



? Jaký je $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$? $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$.

=> * Vždy si ji musím namalovat.

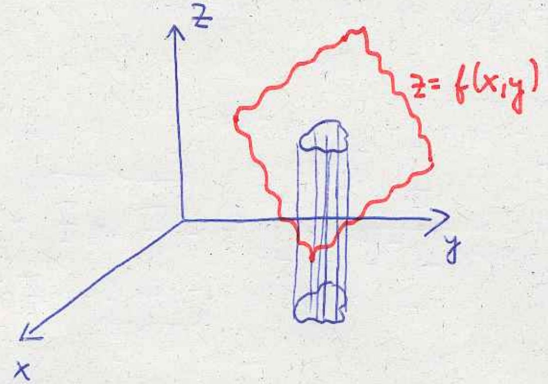
$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx = \begin{vmatrix} \sin x = s \\ \cos x\,dx = ds \end{vmatrix} = \int_{\underset{\sin 0}{0}}^{\overset{\sin\frac{\pi}{2}=}{1}} (1 - s^2)\,ds =$$

// $\cos^3 x\,dx = \cos^2 x \cos x\,dx = \cos^2 x\,ds = (1 - \sin^2 x)\,ds = (1 - s^2)\,ds$ //

$$= \left[s - \frac{s^3}{3}\right]_0^1 = 0 - \frac{0}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Dvojný integrál

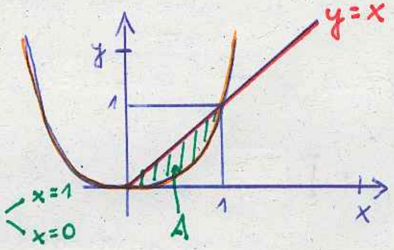
$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy$$



$$\iint_A (x+y)\,dx\,dy$$

A: $y=x^2$
$y=x$

$x^2=x$
$x^2-x=0$
$x(x-1)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$



Dvojné integrály se počítají převodem na integrály dvojnásobné.

$$\iint_A (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy \right\} dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x} =$$

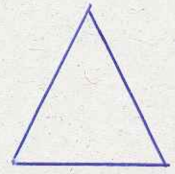
$$= \int_0^1 \left[x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right] =$$

$$= \frac{20+10-15-6}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

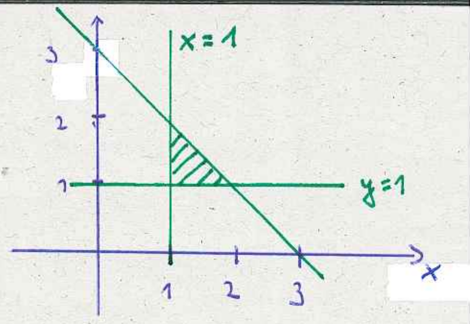
$$\iint_A x^2 y\,dx\,dy$$

A:

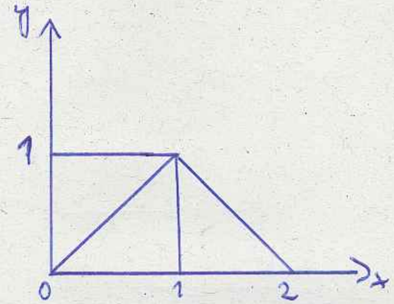


$x=1$
$y=1$
$x+y=3$
$y=3-x$

$1=3-x$
$x=2$



$$\iint_A x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \int_1^{3-x} x^2 y\,dy\,dx = \ldots = \frac{71}{60}$$



V některých případech bude nutné některý integrál rozdělit do více částí, abychom dokázali vyjádřit nutné meze. Viz výše zmíněný graf, kde je potřeba graf rozdělit na dvě části, jedna půjde od intervalu 0–1, druhá na intervalu 1–2