

# C1480 Úvod do matematiky - seminář - Průběžný test

Řešení:

Maximum: 20 bodů

1) Určete hodnotu matice:

[2 body]

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix} \text{ první } \times (-3) + \text{druhý } \times (2) \rightarrow \text{druhý} \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & 4 & -9 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix} \text{ první } \times (2) + \text{třetí } \times (1) \rightarrow \text{třetí} \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & 4 & -9 \\ 0 & -6 & 21 & -1 & 15 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix} \text{ první } \times (-5) + \text{čtvrtý } \times (2) \rightarrow \text{čtvrtý} \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & 4 & -9 \\ 0 & -6 & 21 & -1 & 15 \\ 0 & 6 & -32 & 5 & -24 \end{pmatrix} \text{ Výměna třetího a druhého řádku} \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 21 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & -11 & 4 & -9 \\ 0 & 6 & -32 & 5 & -24 \end{pmatrix} \text{ druhý } \times (-1) + \text{čtvrtý } \times (1) \rightarrow \text{čtvrtý} \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 21 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & -11 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -11 & 4 & -9 \end{pmatrix} \text{ čtvrtý } \times (-1) + \text{třetí } \times (1) \rightarrow \text{čtvrtý} \\ & \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 21 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & -11 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Hodnota této matice je 3 protože se mi vynuloval poslední řádek,} \end{aligned}$$

tedy mám 3 nenulové řádky.

2) Řešte soustavu rovnic

[6 bodů]

$$\begin{aligned} y + z - 2w &= -3 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 4y + z - 3w &= -2 \\ x - 4y - 7z - w &= -19 \end{aligned}$$

nejprve si přepíšeme rovnice do matice:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array} \right) \text{vyměním první a druhý řádek}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & | & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & | & -19 \end{pmatrix}$$

druhý x (-2) + třetí → třetí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & | & -6 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & | & -19 \end{pmatrix}$$

druhý x (6) + čtvrtý → čtvrtý

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & | & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 1 & | & -21 \end{pmatrix}$$

třetí / 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & -6 & -6 & 1 & | & -21 \end{pmatrix}$$

druhý x (6) + čtvrtý → čtvrtý

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & | & -39 \end{pmatrix}$$

Přepíši zpět do rovnic:

$$-13w = -39 \rightarrow w = \frac{-39}{-13} \rightarrow w = 3$$

$$z - w = -2 \rightarrow z - 3 = -2 \rightarrow z = 1$$

$$y + z - 2w = -3 \rightarrow y + 1 - 6 = -3 \rightarrow y = 2$$

$$x + 2y + -z = 2 \rightarrow x + 4 - 1 = 2 \rightarrow x = -1$$

$$x = -1, y = 2, z = 1, w = 3$$

3) Určete první a druhou derivaci funkce  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$  [4 body]

První derivace

$$4 \left( \frac{1}{x^2 - 4} \right)' = 4 \frac{1'(x^2 - 4) - (x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} = 4 \frac{0 - 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

Druhá derivace

$$\begin{aligned}
\left( \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)' &= -8 \left( \frac{x}{(x^2 - 4)^2} \right)' = -8 \frac{x'(x^2 - 4)^2 - x((x^2 - 4)^2)'}{(x^2 - 4)^4} = -8 \frac{(x^2 - 4)^2 - x2(x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^4} = \\
&= -8 \frac{(x - 4)(x^2 - 4 - 4x^2)}{(x^2 - 4)^4} = -8 \frac{(-3x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}
\end{aligned}$$

4) Pro funkci  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$  určete: [8 bodů]

a) definiční obor; průsečíky s osami; intervaly, kde je  $f$  kladná/záporná [2 body]

$$Df = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

průsečík s osou x: neexistuje

průsečík s osou y:  $y = \frac{4}{-4} = 1 \rightarrow P[0, -1]$

$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
+	-	+
kladné	záporné	kladné

b) intervaly, kde je  $f$  rostoucí/klesající; body, ve kterých má lokální extrémý [1 bod]

$$\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
+	+	-	-
roste	roste	klesá	klesá

Lokální extrém je v bodě s x souřadnicí 0.

c) intervaly, kde je  $f$  konvexní/konkávní; inflexní body [1 bod]

$$\frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
+	-	+
konvexní	konkávní	konvexní

Protože body -2, 2 jsou body nespojitosti, nemůže být v těchto bodech inflexní bod.

d) asymptoty bez a se směrnici (pokud existují) [2 body]

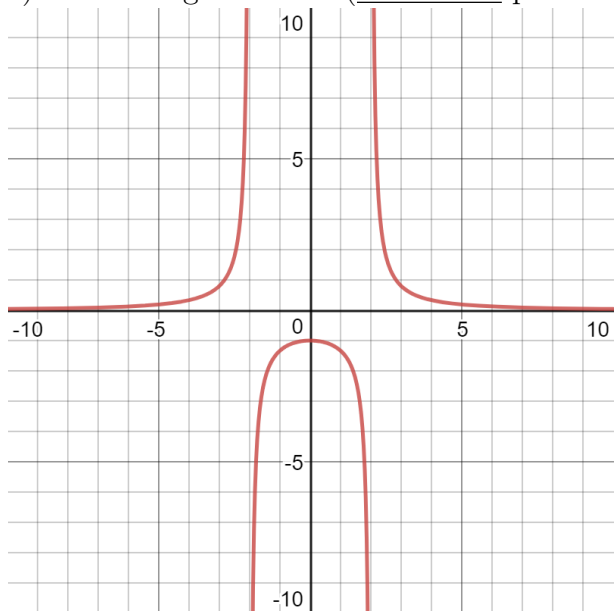
asymptoty bez směrnice jsou v bodech nespojitosti:  $x = -2, x = 2$ .

asymptoty se směrnici:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{4}{(x^2-4)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x(x^2-4)} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - a \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow y = 0$$

e) načrtněte graf funkce (není nutné počítat funkční hodnoty v jednotlivých bodech) [2 body]



Pomůcky:

A.S.S.:  $y = ax + b$ ,  $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - a \cdot x$  Kv. rovnice:  $D = b^2 - 4ac$ ,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$